

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

КОНУСЫ ДИРАКА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЛЭМБА
В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

© 2025 г. С. Г. Саиян^{a,*}, С. В. Кузнецов^{b,**}

^aНациональный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ),
Москва, Россия

^bИнститут Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

*e-mail: Berformert@gmail.com

**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.05.2025 г.

После доработки 22.07.2025 г.

Принята к публикации 06.11.2025 г.

Анализируется появление собственных и вырожденных конусов Дирака, возникающих при распространении волн Лэмба в изотропном функционально-градиентном слое, удовлетворяющем условию Вихерта. Обнаружено, что конусы Дирака появляются в слое с асимметричным относительно срединной поверхности распределением физических свойств и при любом коэффициенте Пуассона. Исследование осуществляется на основе формализма Коши и метода экспоненциальных фундаментальных матриц.

Ключевые слова: волна Лэмба, конус Дирака, дисперсия, формализм Коши

DOI: 10.7868/S3034500625060045

ВВЕДЕНИЕ

Миндлин [1] обнаружил, что в свободном от напряжений, однородном, изотропном и линейно-упругом слое при некоторых специфических значениях коэффициента Пуассона ν распространяющиеся волны Лэмба могут проявлять следующие свойства:

1. Две высокочастотные симметричные или антисимметричные моды Лэмба могут совпадать при фазовой скорости c , стремящейся к бесконечности;

2. Угол между этими модами, рассматриваемый как функция фазовой медленности $s = c^{-1}$ или волнового числа $k = \omega s$, при $s \rightarrow 0$ или $k \rightarrow 0$, не исчезает (см. рис. 1а). Аналогичное явление обнаружено и для горизонтально поляризованной SH-волны [2].

Явление, характеризуемое свойствами 1 и 2, известно как конус Дирака в слое без фоновой структуры [2]. В рассматриваемом контексте конус Дирака представляет собой пересечение дисперсионных мод при фазовой медленности, стремящейся к нулю $s \rightarrow 0$. Последнее означает совпадение резонансных частот двух (или более) волновых мод при продольно-поперечном резонансе (рис. 1а).

Надо отметить, что в общем случае при произвольном коэффициенте Пуассона конус Дира-

ка не возникает [3], а все высокочастотные симметричные (S_k) и антисимметричные (A_k) моды волн Лэмба стремятся к вертикальной оси фазовой медленности с нулевым наклоном $s = 0$ (см. рис. 1б). Дисперсионные соотношения Релле–Лэмба для волн Лэмба в однородном изотропном слое имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\text{th}(\gamma_2 h)}{\text{th}(\gamma_1 h)} = \left(\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_2^2 - k^2)^2} \right)^{\pm 1}, \quad (1)$$

где h – полутолщина слоя,

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_k^2} - k^2}; \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь c_1, c_2 – это соответственно скорости продольных и поперечных объемных упругих волн:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала; λ и μ – постоянные Ламе, которые связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν следующими уравнениями [3]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4)$$

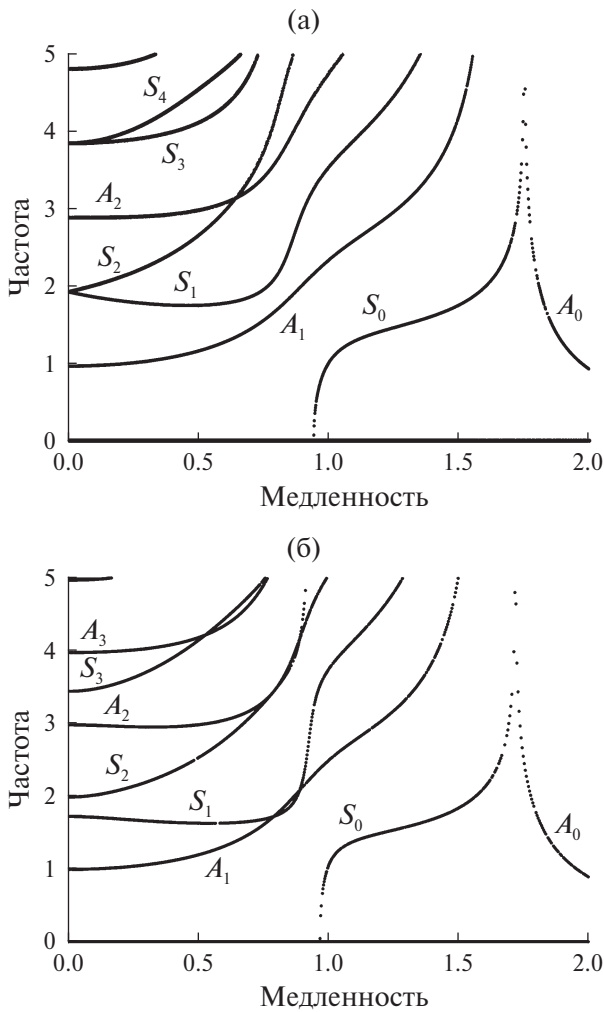


Рис. 1. Дисперсионные портреты в координатах частота–медленность: (а) – при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ наблюдается корректный (истинный) конус Дирака между модами S_1 и S_2 , а также вырожденный конус между модами S_3 и S_4 ; (б) – при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/4$ конус Дирака отсутствует.

Разрешая дисперсионное уравнение (1) для свободного от напряжений слоя при $s \rightarrow 0$ и накладывая условие ненулевой групповой скорости $c_g \neq 0$ при $s \rightarrow 0$ [4], получим:

$$c_g \equiv \frac{d\omega}{dk} > 0, \quad s \rightarrow 0. \quad (5)$$

Отсюда вытекает следующее соотношение между объемными скоростями волн, обеспечивающее появление конусов, подобных конусам Дирака, между симметричными модами [1]:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2n}{2m+1}; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+; \quad n > m. \quad (6)$$

Один из наиболее изученных случаев [2, 5–7] соответствует $n = 3; m = 1$, что дает $c_1/c_2 = 2$ и,

таким образом, в силу уравнений (3) и (4), приводит к $\nu = 1/3$. Аналогично, следующее соотношение предполагает наличие конусов, подобных конусам Дирака, между антисимметричными модами:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{2n}{2m+1}; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+; \quad m > n. \quad (7)$$

Условие появления конусов, подобных конусам Дирака, в слое с нулевыми перемещениями на границах исследовано в работе [5].

Достаточно большое число работ посвящено анализу конусов, подобных дельтаобразным, в акустике твердого тела. Например, в работах [8–10] рассматриваются волны Лэмба в тонких полосках. С учетом условия [11] между коэффициентами Пуассона для слоя ν при плоской деформации и бесконечно тонкой полоски ν' при плоском напряженном состоянии:

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad (8)$$

получаем, что соотношение $c_1/c_2 = 2$ в условиях плоского напряженного состояния означает $\nu = 1/2$, и, следовательно, материал полоски необходимо является несжимаемым. Для достижения одного из требуемых соотношений (6) в работах [6, 7] были проанализированы длинноволновые моды Лэмба, распространяющиеся в медленно охлажденной предварительно нагретой алюминиевой пластине, где был обнаружен истинный конус Дирака между S_1 и S_2 , возникший при $n = 3; m = 1$. Другим практическим методом создания материалов с конусами, подобными конусам Дирака, является построение трехслойной системы с сердцевинным слоем и тонкими наружными слоями, подобранными так, чтобы совокупные механические свойства композитной пластины обеспечивали появление конусов Дирака [2]. В этом контексте пластины с покрытиями и резонансными явлениями рассматриваются в работах [12, 13].

В данной работе рассматривается задача появления конусов, подобных конусам Дирака, в функционально-градиентных (FG) пластинах с поперечной неоднородностью, удовлетворяющей модифицированному условию Вихерта. Обобщенное условие Вихерта обсуждается в разделе 2, а также в ряде работ [14–19]. Задача анализируется с применением шестимерного формализма Коши в сочетании с методом экспоненциальных фундаментальных матриц [20]. Повидимому, впервые установлено, что для среды Вихерта с функционально градиентными свойствами независимо от типа поперечной неоднородности конусы, подобные конусам Дирака, подчиняются тем же уравнениям существования (6), (7), что и для однородной среды. Таким образом, класс FG-сред вихертовского типа,

обладающих конусами Дирака, оказывается, по крайней мере, непустым.

УСЛОВИЯ ВИХЕРТА

Две изотропные однородные среды, находящиеся в контакте, называются средами Вихерта, если [14, 15]:

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}} = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}} = q > 0, \quad (9)$$

где верхний индекс обозначает номер среды; а q – параметр Вихерта. Уравнение (9) известно как условие Вихерта. Из уравнений (3) следует, что объемные скорости волн в этих средах совпадают [15], однако соответствующие акустические импедансы, определяемые как:

$$z_1 = c_1\rho; \quad z_2 = c_2\rho, \quad (10)$$

отличаются, причем, в силу соотношений (9):

$$\frac{z_1^{(1)}}{z_1^{(2)}} = \frac{z_2^{(1)}}{z_2^{(2)}} = q. \quad (11)$$

Заметим, что условие (11) обеспечивает существование интерфейсных волн Стоунли на плоской границе между этими средами [19]. Среда Вихерта встречается в различных областях акустики твердого тела – от геофизики [21–28] до микро- и нанозлектроники [29, 30].

Пусть функционально-градиентный (FG) материал удовлетворяет следующему соотношению, которое является непрерывным аналогом дискретного условия Вихерта (9):

$$\frac{\lambda(x)}{\lambda_0} = \frac{\mu(x)}{\mu_0} = \frac{\rho(x)}{\rho_0} = q(x) > 0, \quad (12)$$

где λ_0, μ_0 и ρ_0 – соответствующие параметры материала, используемые для нормировки; x – поперечная координата (см. рис. 2). Соотношение (12) можно естественным образом назвать модифицированным условием Вихерта. При рассмотрении FG-пластины удобно выбирать параметры нормировки, соответствующие определенной координате, например, координате $x = 0$ (см. рис. 2).

В силу уравнений (3), модифицированное условие Вихерта (12) обеспечивает постоянство объемных скоростей волн по толщине слоя и следующее условие для акустических импедансов:

$$\frac{z_1(x)}{z_1(0)} = \frac{z_2(x)}{z_2(0)} = q(x), \quad (13)$$

что напоминает импедансное условие (11). Таким образом, модифицированное условие Вихерта можно рассматривать как обобщение условия (9) на среды с непрерывным поперечным изменением физических свойств.

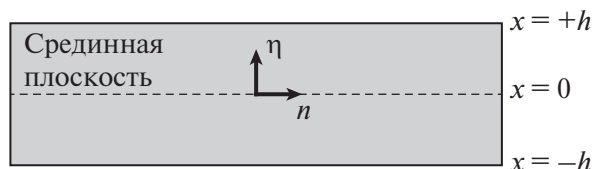


Рис. 2. FG-слой со средней плоскостью при $x = 0$; η – единичный нормальный вектор; \mathbf{n} – единичный вектор волнового распространения; $2h$ – толщина слоя.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение движения может быть записано в следующей форме [11]:

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (14)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – поле перемещений; $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ – тензор упругости четвертого ранга, предполагаемый положительно определенным; двойные точки обозначают свертку по двум индексам. Гармоническое поле перемещений для волны Лэмба допускает следующее представление [3]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(ik\boldsymbol{\eta}\mathbf{x}) \exp(ik(\mathbf{n}\mathbf{x} - ct)), \quad (15)$$

где \mathbf{m} – вектор поляризации, рассматриваемый как функция комплексной поперечной координаты $x' = ik\boldsymbol{\eta}\mathbf{x}$ и $i = \sqrt{-1}$.

Подстановка представления (14) в уравнение (15) дает [20, 31]):

$$(\mathbf{A}_1(x') \partial_{x'x'}^2 + \mathbf{A}_2(x') \partial_{x'} + \mathbf{A}_3(x')) \cdot \mathbf{m}(x') = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(x') &= \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{A}_2(x') &= \partial_{x'} (\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + \\ &+ \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad (17) \\ \mathbf{A}_3(x') &= \partial_{x'} (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{n} + \partial_{x'} (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{w} \otimes \boldsymbol{\eta}) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \\ &+ \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\eta} - \rho(x') \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{I} – единичная диагональная матрица 3×3 ; $\mathbf{w} = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n}$, знак \otimes обозначает тензорное произведение, \times – векторное произведение. С учетом предполагаемой упругой изотропии, уравнения (17) принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(x') &= (\lambda(x') + 2\mu(x')) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + \\ &+ \lambda(x') (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}), \\ \mathbf{A}_2(x') &= \partial_{x'} (\lambda(x') + 2\mu(x')) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + \\ &+ (\lambda(x') + \mu(x')) (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\eta}), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3(x') &= \partial_{x'} \lambda(x') (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) + \\ &+ (\lambda(x') + 2\mu(x')) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \lambda(x') (\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) - \rho(x') \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Для свободного от напряжений слоя соответствующие граничные условия могут быть записаны, с точностью до гармонического множителя $\exp(ik(\mathbf{n}x - ct))$, в следующем виде:

$$\mathbf{t}_v(x') \equiv (\mathbf{A}_1(x') \partial_x + \mathbf{A}_4(x')) \cdot \mathbf{m}(x') \Big|_{x'=\pm ikh} = 0, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{A}_4(x') = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(x') \cdot \mathbf{n}. \quad (20)$$

Вводя новую векторную переменную

$$\mathbf{v}(x') = \partial_{x'} \mathbf{m}(x') \quad (21)$$

и новый шестикомпонентный вектор

$$\mathbf{Y}(x') = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x') \\ \mathbf{v}(x') \end{pmatrix}, \quad (22)$$

перепишем уравнение (16) в терминах вектора $\mathbf{Y}(x')$

$$\partial_{x'} \mathbf{Y}(x') = \mathbf{G}(x') \cdot \mathbf{Y}(x'), \quad (23)$$

где $\mathbf{G}(x')$ – блочная матрица размерности 6×6 , известная как фундаментальная матрица [20]:

$$\mathbf{G}(x') = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1^{-1}(x') \cdot \mathbf{A}_3(x') & -\mathbf{A}_1^{-1}(x') \cdot \mathbf{A}_2(x') \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Заметим, что матрица $\mathbf{A}_1(x')$ обратима благодаря предполагаемой положительной определенности тензора упругости.

Аналогично, граничное условие свободной от напряжений поверхности (19) может быть выражено через вектор $\mathbf{Y}(x')$:

$$\mathbf{t}_v(x') \equiv (\mathbf{A}_4(x'); \mathbf{A}_1(x')) \cdot \mathbf{Y}(x') \Big|_{x'=\pm ikh} = 0, \quad (25)$$

где $(\mathbf{A}_4(x'); \mathbf{A}_1(x'))$ – блочная матрица размерности 3×6 .

Общее решение уравнения (23) может быть представлено в виде [32]:

$$\mathbf{Y}(x') = \exp(\mathbf{F}(x')) \cdot \mathbf{Y}_0, \quad (26)$$

где \mathbf{Y}_0 – шестикомпонентный вектор, определяемый граничными условиями; а $\mathbf{F}(x')$ – первообразная фундаментальной матрицы:

$$\mathbf{F}(x') = \int_0^{x'} \mathbf{G}(x'') dx''. \quad (27)$$

Матрица-экспонента в (26) может быть построена с использованием разложения матрицы $\mathbf{F}(x')$ в

жорданову нормальную форму, при условии, что $\mathbf{F}(x')$ является полупростой (semi-simple) [31, 33]:

$$\mathbf{F}(x') = \mathbf{W}(x') \cdot \mathbf{D}(x') \cdot \mathbf{W}^{-1}(x'), \quad (28)$$

где $\mathbf{W}(x')$ – матрица размерности 6×6 , составленная из собственных векторов матрицы $\mathbf{F}(x')$, расположенных по столбцам; $\mathbf{D}(x')$ – диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные значения. Разложение (28) дает:

$$\exp(\mathbf{F}(x')) = \mathbf{W}(x') \cdot \exp(\mathbf{D}(x')) \cdot \mathbf{W}^{-1}(x'), \quad (29)$$

где

$$\exp(\mathbf{D}(x')) = \text{diag}(e^{d_1(x')}, \dots, e^{d_6(x')}). \quad (30)$$

Здесь $d_k(x')$, $k = 1, \dots, 6$ – собственные значения матрицы $\mathbf{F}(x')$.

Введем блочную матрицу размерности 6×6 :

$$\mathbf{Z}(x') = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_4(x') & \mathbf{A}_1(x') \end{pmatrix}, \quad (31)$$

которая напоминает матрицу импеданса, введенную в шестимерном формализме Штро [34–38]. Заметим, что матрица $\mathbf{Z}(x')$ не является вырожденной благодаря предполагаемой положительной определенности тензора упругости, что обеспечивает $\det(\mathbf{A}_1(x')) > 0$. Матрица импеданса (31) отображает шестимерные векторы $\mathbf{Y}(x')$ в два трехмерных подпространства: поверхностных перемещений и поверхностных напряжений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}(x') \\ \mathbf{t}_\eta(x') \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x') \\ \mathbf{v}(x') \end{pmatrix}. \quad (32)$$

С использованием матрицы импеданса (31) и экспоненциального решения (26) искомое дисперсионное уравнение принимает следующий вид [20, 31]:

$$\begin{aligned} \det \left((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Z}(-ikh) \cdot \exp(\mathbf{F}(-2ikh)) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{Z}^{-1}(ikh) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим FG-слой с симметричным изменением физических свойств относительно срединного слоя, определенным следующей функцией:

$$q(x) = q_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{h-x}{h} \right)^2 \right), \quad (34)$$

где $q_0 > 0$ и $|\alpha| < 1$ – безразмерные константы, определяющие профиль поперечной неоднородности. Ниже рассматриваются случаи $q_0 = 1$ и

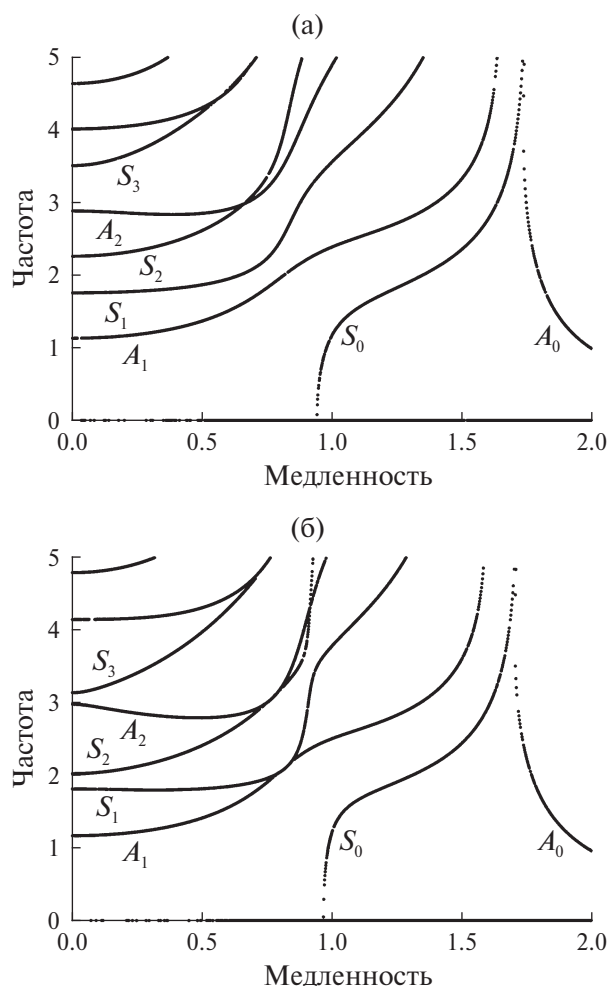


Рис. 3. Дисперсионные портреты для выпуклого профиля $\alpha = +1$ при коэффициенте Пуассона (а) – $\nu = 1/3$ и (б) – $\nu = 1/4$.

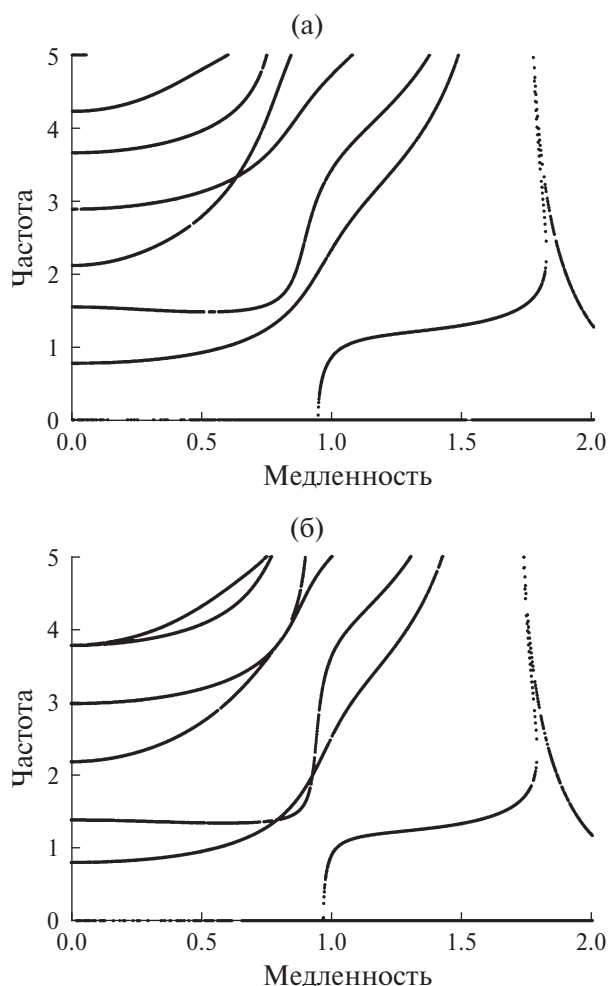


Рис. 4. Дисперсионные портреты для вогнутого профиля $\alpha = -0.5$ при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ (а) и $\nu = 1/4$ (б).

$\alpha = +1$; $\alpha = -0.5$, что соответственно соответствует выпуклым и вогнутым профилям.

Типичные дисперсионные портреты для выпуклого профиля при $\alpha = +1$ и коэффициентах Пуассона $\nu = 1/3$ и $\nu = 1/4$ приведены на рис. 3.

На рис. 3 и далее, как медленность s^* , так и частота ω^* являются безразмерными:

$$s^* = c_1 s; \omega^* = \omega h / c_1. \quad (35)$$

Графики на рис. 3 наглядно демонстрируют отсутствие наблюдаемых структур, подобных конусам Дирака, в рассматриваемых функционально-градиентных слоях, несмотря на то что при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ в однородном слое конусы Дирака существуют (см. рис. 1а).

Типичные дисперсионные портреты для вогнутого профиля при $\alpha = -0.5$ и тех же коэффициентах Пуассона, что и в предыдущем случае, приведены на рис. 4. Данные графики также наглядно демонстрируют отсутствие наблюдае-

мых структур, подобных конусам Дирака, для вогнутого профиля в исследуемых функционально-градиентных материалах.

Рассмотрим теперь функционально-градиентный слой с асимметричным изменением физических свойств, определенным функцией $q(x)$:

$$q(x) = q_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{h} \right); \alpha \in (-1; 0). \quad (36)$$

Это соответствует линейному изменению физических свойств по толщине. Было установлено, что при настройке параметра α можно добиться появления истинного конуса Дирака между высокочастотными дисперсионными модами практически при любом коэффициенте Пуассона. Графики на рис. 5 демонстрируют появление истинных конусов Дирака между высокими (симметричными) дисперсионными модами; эти конусы показаны для коэффициентов Пуассона $\nu = 0.3$ и $\nu = 0.2$, достигнутых при $\alpha \approx -0.38$ и $\alpha \approx -0.34$ соответственно.

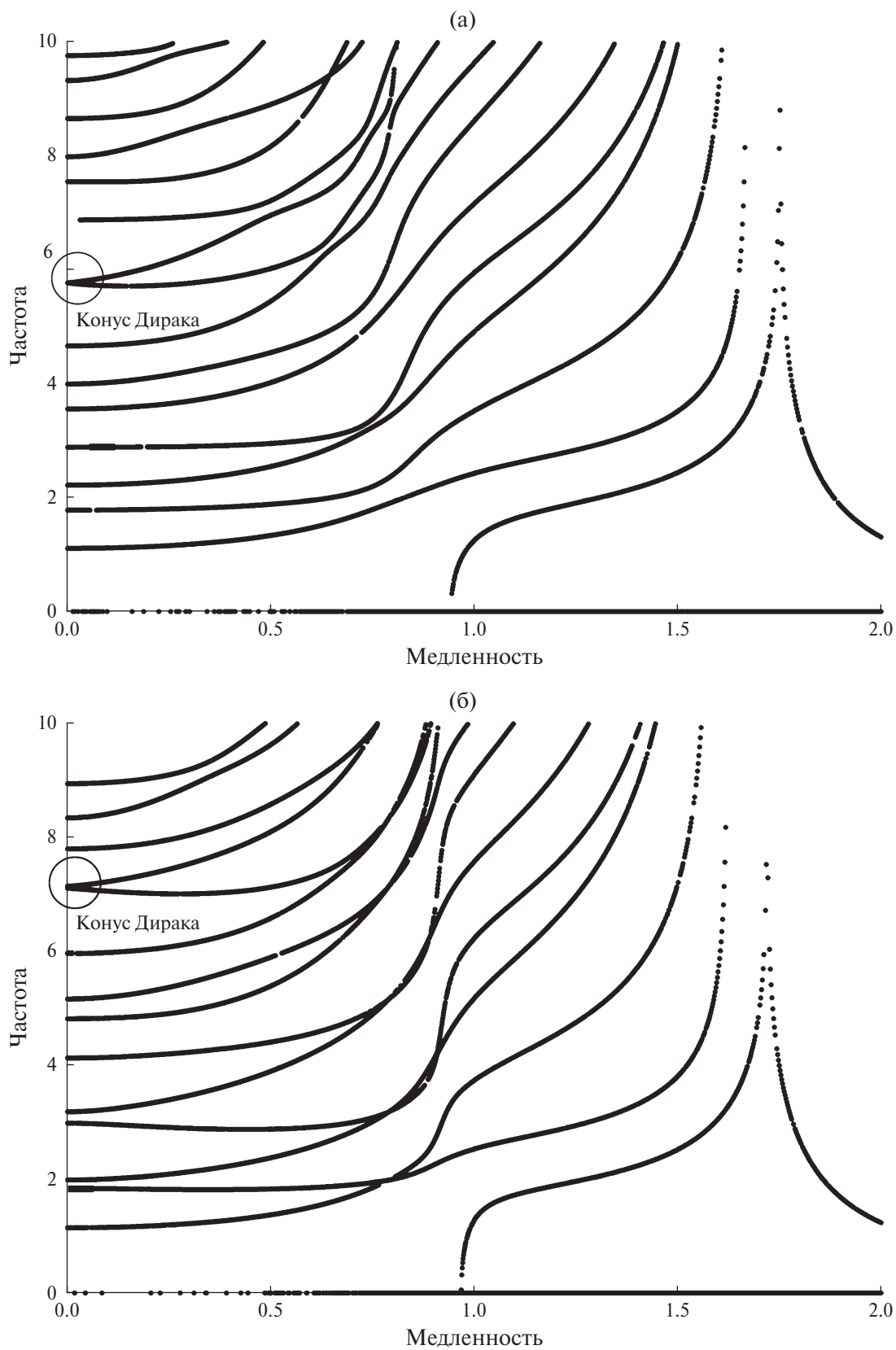


Рис. 5. Дисперсионные портреты для асимметричного профиля (а) – при $\nu = 0.3$ и $\alpha = -0.38$, и (б) – при $\nu = 0.2$ и $\alpha = -0.34$.

Более того, проведенный анализ для рассматриваемого асимметричного профиля (36) показывает возможность образования конусов Дирака между высокочастотными симметричными модами при любом положительном коэффициенте Пуассона в диапазоне $\nu \in (0; 0.5)$. Результаты по определению параметра α получены путем применения алгоритма дихотомии на интервале $\alpha \in (-1; 0)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ выявил ряд особенностей в дисперсионных портретах волн Лэмба для функционально градиентных слоев с поперечной неоднородностью, удовлетворяющей модифицированному условию Вихерта (12), в частности:

1. Дисперсионные портреты волн Лэмба в функционально градиентных слоях с симметричными выпуклыми профилями и коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$ не приводят к появлению истинного конуса, подобного конусу Дирака, между симметричными модами S_1 и S_2 , а также к вырожденному конусу между модами S_3 и S_4 , в отличие от однородного слоя с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$.

2. Дисперсионные портреты, соответствующие симметричным вогнутым профилям, также демонстрируют отсутствие как истинных, так и вырожденных конусов, подобных конусам Дирака, между симметричными модами S_1 и S_2 , а также между модами S_3 и S_4 при $\nu = 1/3$ и $\nu = 1/4$.

3. Дисперсионные портреты волн Лэмба в функционально-градиентных слоях с асимметричными профилями и различными неотрицательными коэффициентами Пуассона $\nu \in (0; 0.5)$ демонстрируют появление истинных конусов, подобных конусам Дирака, между симметричными модами S_4 и S_5 при определенных значениях параметра α .

Таким образом, поперечная неоднородность функционально-градиентной среды с асимметричным профилем предлагает новый подход к получению конусов, подобных конусам Дирака, в материалах с произвольными (положительными) коэффициентами Пуассона $\nu \in (0; 0.5)$, путем подбора безразмерного физического параметра α , управляющего типом поперечной неоднородности (см. уравнение (36)).

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа авторов финансировалась РФФ, грант 24-49-02002.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mindlin R.D.* An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. Singapore: World Scientific, 2006. 212 p.
2. *Maznev A.A.* Dirac cone dispersion of acoustic waves in plates without phononic crystals (L) // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 135. № 2. P. 577–580.
3. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic Waves in Solids. New York: Wiley, 1980. 511 p.
4. *Hayes M.* A note on group velocity // *Proc. Roy. Soc. A.* 1977. V. 354. № 1679. P. 533–535.
5. *Maznev A.A., Every A.G.* Existence of backward propagating acoustic waves in supported layers // *Wave Motion.* 2011. V. 48. P. 401–407.
6. *Stobbe D.M., Günsteidl C.M., Murray T.W.* Propagation and scattering of Lamb waves at conical points in plates // *Sci. Rep.* 2019. V. 9. P. 15216.
7. *Stobbe D.M., Murray T.W.* Conical dispersion of Lamb waves in elastic plates // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 96. P. 144101.
8. *Chantelot P., Domino L., Eddi A.* How capillarity affects the propagation of elastic waves in soft gels // *Phys. Rev. E.* 2020. V. 101. P. 032609.
9. *Lanoy M., Lemoult F., Eddi A., Prada C.* Dirac cones and chiral selection of elastic waves in a soft strip // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020. V. 117. № 48. P. 30186–30190.
10. *Laurent J., Royer D., Prada C.* In-plane backward and zero-group-velocity guided modes in rigid and soft strips // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. V. 147. P. 1302–1310.
11. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity // *Handbuch der Physik.* V. VIa/2 / Ed. Truesdell C. Berlin: Springer-Verlag, 1972. P. 1–296.
12. *Cherednichenko K.D., Cooper S.* On the existence of high-frequency boundary resonances in layered elastic media // *Proc. Roy. Soc. A.* 2015. V. 471. № 2178. P. 20140878.
13. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Rayleigh-type waves on a coated elastic half-space with a clamped surface // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 2019. V. 377. 20190111.
14. *Wiechert E., Geiger L.* Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern // *Phys. Z.* 1910. V. 11. P. 294–311.
15. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1924. V. 106. P. 416–428.
16. *Ma G. and Sheng P.* Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons // *Sci. Adv.* V. 2(2). e1501595.
17. *Bilal O.R., Foehr A., Daraio C.* Bistable metamaterial for switching and cascading elastic vibrations // *Proc. Nat. Acad. Sci.* 2017. V. 114(18). P. 4603–4606.
18. *Kuznetsov S.V.* Stoneley waves at the Wiechert condition // *Z. Angew. Math. Phys.* 2020. V. 71. P. 180.
19. *Ilyashenko A.V.* Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // *Int. J. Dynam. Control.* 2021. V. 9. P. 30–32.
20. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
21. *Murty G.S.* Wave propagation at an unbounded interface between two elastic half-spaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 58. P. 1094–1095.
22. *Meleshko V.V.* Energy analysis of Stoneley surface waves // *Soviet Appl. Mech.* 1980. V. 16. P. 382–385.

23. Vinh P.C., Malischewsky P.G., Giang P.T.H. Formulas for the speed and slowness of Stoneley waves in bonded isotropic elastic half-spaces with the same bulk wave velocities // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. V. 60. P. 53–58.
24. Torrent D., Sánchez-Dehesa J. Acoustic analogue of graphene: Observation of Dirac cones in acoustic surface waves // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108(17). P.174301.
25. Wang D., Dong J., Liu Y., Lai Y. Topology-optimized square-lattice sonic crystals with multi-fold degenerate Dirac cones // *J. Sound Vib.* 2021. V. 504. 116121.
26. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Europ. J. Environ. Civil Eng.* 2020. V. 24. № 14. P. 2400–2421.
27. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comp. Geotech.* 2021. V. 131. 103808.
28. Dudchenko A.V., Dias D., Kuznetsov S.V. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.* 2021. V. 91. P. 257–276.
29. Brock L.M. Stoneley wave generation in joined materials with and without thermal relaxation due to thermal mismatch // *ASME J. Appl. Mech.* 2007. V. 74. № 5. P. 1019–1025.
30. Morocha A.K., Rozhkov A.S. On new types of Stoneley waves and the possibility of using them in integrated acoustoelectronics // *Russ. Microelectron.* 2017. V. 46. P. 443–448.
31. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. P. 89.
32. Hartman Ph. *Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics)*. 2-nd ed. Ed. N.Y.: SIAM, 1987. 632 p.
33. Marcus M., Minc H. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Revised ed. Dover Publication: New York, 2010. 208 p.
34. Barnett D.M., Lothe J. Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals // *J. Phys. F: Metal Phys.* 1974. V. 4. P. 671–686.
35. Chadwick P., Smith G.D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // *Adv. Appl. Mech.* 1977. V. 17. P. 303–376.
36. Kuznetsov S.V. Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. № 3. P. 577–587.
37. Fu Y.B. Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. № 2088. P. 3073–3087.
38. Fu Y., Kaplunov J., Prikazhnikov D. Reduced model for the surface dynamics of a generally anisotropic elastic half-space // *Proc. Roy. Soc. A.* 2020. V. 476. P. 20190590.

DIRAC CONES DURING LAMB WAVE PROPAGATION IN A FUNCTIONALLY GRADIENTED LAYER

S. G. Saiyan^{a,*}, S. V. Kuznetsov^{b,**}

^a National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow, Russia

^b Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS

*e-mail: Berformert@gmail.com

**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

This paper analyzes the appearance of proper and degenerate Dirac cones arising during Lamb wave propagation in an isotropic functionally graded layer satisfying the Wiechert condition. It is found that Dirac cones appear in a layer with a distribution of physical properties asymmetric with respect to the midsurface and for any Poisson's ratio. The study is based on the Cauchy formalism and the exponential fundamental matrix method.

Keywords: Lamb wave, Dirac cone, dispersion, Cauchy formalism