

АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕЛКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ*

С. М. Рытов

Среда, состоящая из чередующихся слоев двух изотропных веществ, в том случае, когда волновое поле мало меняется на толщине отдельного слоя (тонкие слои), в среднем ведет себя как однородная, но анизотропная. Анизотропия соответствует кристаллу гексагональной симметрии. Получены выражения для эффективных упругих постоянных кристалла в функции от параметров обоих веществ и толщин слоев. Рассмотрено чередование слоев двух твердых веществ и чередование твердых слоев со слоями жидкости.

Искусственные мелкослоистые среды, изготовление которых не сложно, а свойства могут быть очень разнообразны (анизотропия скоростей распространения и поглощений как для волн сжатия, так и для волн сдвига), представляют известный практический интерес, в частности, для виброизоляции.

1. Среда, состоящая из чередующихся слоев двух однородных и изотропных веществ, «в среднем», т. е. в случае достаточно тонких слоев, ведет себя как однородная, но анизотропная. Условие тонкости слоев означает, что их толщины малы по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в их материалах.

К нахождению эффективных параметров (упругих модулей) мелкослоистой среды можно подойти различно. Один из способов основан на предположении, что слои повторяются периодически. Задача о распространении волн приводится тогда к решению волнового (а затем обыкновенного) уравнения с периодическими коэффициентами. Так как внутри слоев параметры постоянны и меняются скачком только на границах между слоями, решение может быть найдено в общем случае не тонких слоев. В результате предельного перехода из этого общего решения вытекает решение для мелкослоистой среды, причем учет поправочных членов позволяет уточнить условия применимости указанных предельных результатов.

Таким способом автором была рассмотрена ранее задача об электромагнитных свойствах мелкослоистой среды [1]. Они оказываются, естественно, такими же, как у одноосного кристалла, т. е. описываются однократно вырожденными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Следует заметить, что в указанном приближении (достаточно тонкие слои) потери и, вообще, квадратичные величины могут быть вычислены по обычным формулам, исходя непосредственно из усредненных уравнений поля с эффективными ϵ и μ . С увеличением толщин слоев соотношения между средними и средними квадратичными величинами усложняются и для расчета последних уже необходимо усреднять истинные квадратичные величины.

В отношении своих упругих свойств мелкослоистая среда является кристаллом гексагональной симметрии, т. е. характеризуется пятью упругими модулями. В электромагнитной задаче для нахождения эффективных ϵ и μ достаточно рассмотреть распространение волн только

* Доложено 1 июля 1955 г. на Совещании по электроакустике, созванном Комиссией по акустике, Акустическим институтом АН СССР и Киевским Политехническим институтом в Киеве.

в направлениях, перпендикулярном и параллельном слоям, причем в последнем случае — при двух поляризациях (электрический вектор параллелен или перпендикулярен слоям). В акустической задаче кроме трех аналогичных поперечных волн (волн сдвига) имеются еще две волны сжатия. Тем не менее, если ограничиться только двумя указанными направлениями распространения, то можно определить лишь четыре из пяти упругих модулей.

Направим ось z перпендикулярно к слоям. Свободная энергия единицы объема кристалла гексагональной симметрии запишется тогда в виде

$$F = \frac{\lambda_1}{2} u_{zz}^2 + \frac{\lambda_2}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_3 u_{zz} (u_{xx} + u_{yy}) + \\ + 2\lambda_4 (u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) + 2\lambda_5 (u_{xz}^2 + u_{yz}^2),$$

где u_{ik} — компоненты тензора деформации: $u_{ik} = \frac{1}{2} (\partial U_i / \partial x_k + \partial U_k / \partial x_i)$. В плоскости (x, y) среда изотропна. Переход к полной изотропии имеет место при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda + 2\mu, \quad \lambda_3 = \lambda, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \mu, \quad (1)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме. Если обозначить через $\tilde{\rho}$ плотность кристалла, то квадраты скоростей распространения волн в направлениях x и z выразятся следующим образом:

$$c_{xx}^2 = \lambda_2 / \tilde{\rho}, \quad c_{xz}^2 = c_{zx}^2 = \lambda_5 / \tilde{\rho}, \quad c_{xy}^2 = \lambda_4 / \tilde{\rho}, \quad c_{zz}^2 = \lambda_1 / \tilde{\rho}. \quad (2)$$

Здесь первый индекс при c указывает направление распространения волны, а второй — направление вектора смещения частиц среды U .

Упругий модуль λ_3 в (2) не входит. Для определения λ_3 надо знать скорости распространения волн под углом к оси z , отличным от нуля и $\pi/2$. Первоначально мы рассмотрим распространение волн в направлениях осей x и z .

2. Разложим полное смещение U частиц среды в материале слоя на безвихревую и соленоидальную части u и v :

$$U = u + v,$$

$$\ddot{u} - c_l^2 \text{grad div } u = 0, \quad \text{rot } u = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{v} - c_t^2 \text{rot rot } v = 0, \quad \text{div } v = 0,$$

где c_l и c_t — скорости распространения соответственно волн сжатия и волн сдвига:

$$c_l^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho, \quad c_t^2 = \mu / \rho. \quad (4)$$

Рассмотрим распространение параллельно слоям, скажем, по оси x . Очевидно, сдвиговая волна со смещением, параллельным слоям (U_y) автономна, т. е. не связана с волной сжатия. Напротив, сдвиг поперек слоев (U_z), вообще говоря, связан с продольным смещением U_x . Возьмем сначала случай продольно-поперечной волны со сдвигом по оси z , т. е. случай, когда отличны от нуля только компоненты U_x и U_z , зависящие от x и z . Для гармонической волны частоты ω уравнения (3) принимают тогда вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_l^2 u = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k_t^2 v = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (5)$$

где $k_l^2 = \omega^2 / c_l^2$, $k_t^2 = \omega^2 / c_t^2$.

Общее решение целесообразно записать через специально выбранные частные решения, а именно — четное и нечетное относительно середин слоев. Для слоя материала I, лежащего между $z = 0$ и $z = a$ (фиг. 1), имеем следующие решения уравнений (5):

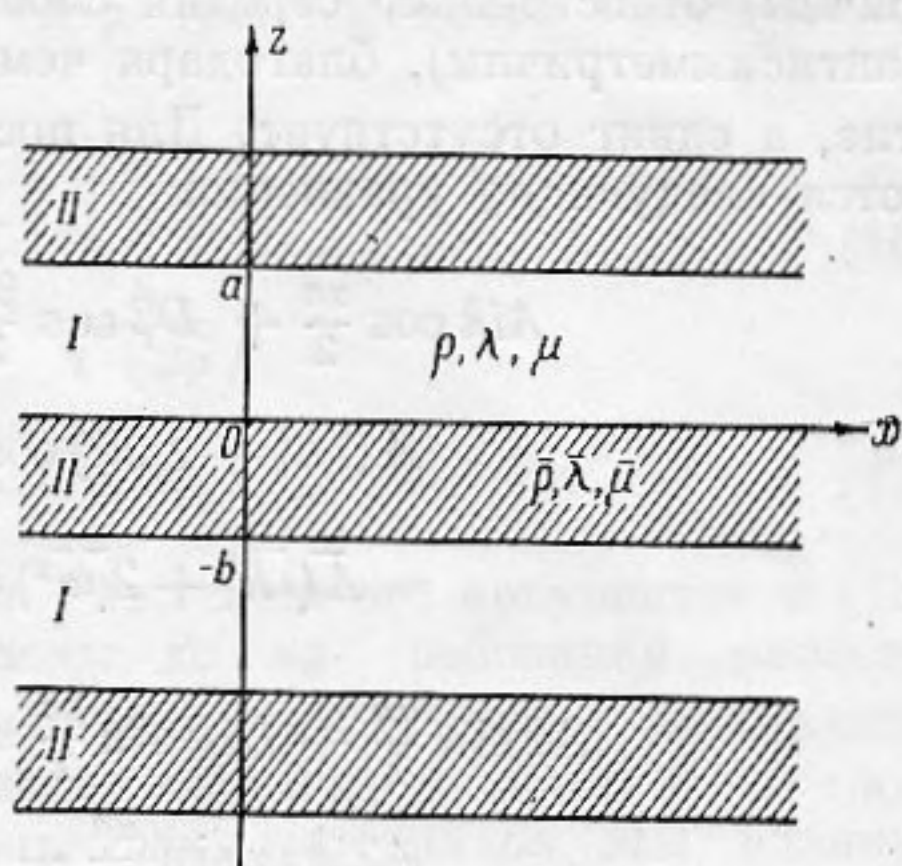
$$u_x = P(z) e^{-ikx}, u_z = - \frac{P'(z)}{ik} e^{-ikx}, \quad (6)$$

$$v_x = \frac{Q'(z)}{ik} e^{-ikx}, v_z = Q(z) e^{-ikx},$$

причем

$$P(z) = A \cos \alpha (z - a/2) + B \sin \alpha (z - a/2), \alpha^2 = k_1^2 - k^2,$$

$$Q(z) = C \cos \beta (z - a/2) + D \sin \beta (z - a/2), \beta^2 = k_1^2 - k^2. \quad (7)$$



Фиг. 1

Величины, относящиеся к слою II, лежащему между $z = -b$ и $z = 0$, мы будем обозначать теми же буквами, но с чертой наверху. Таким образом, в слое II

$$\bar{u}_x = \bar{P}(z) e^{-ikx}, \bar{u}_z = - \frac{\bar{P}'(z)}{ik} e^{-ikx}, \bar{v}_x = \frac{\bar{Q}'(z)}{ik} e^{-ikx}, \bar{v}_z = \bar{Q}(z) e^{-ikx}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P}(z) &= \bar{A} \cos \bar{\alpha} (z + b/2) + \bar{B} \sin \bar{\alpha} (z + b/2), \bar{\alpha}^2 = \bar{k}_1^2 - k^2, \\ \bar{Q}(z) &= \bar{C} \cos \bar{\beta} (z + b/2) + \bar{D} \sin \bar{\beta} (z + b/2), \bar{\beta}^2 = \bar{k}_1^2 - k^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для компонент тензора деформации в слое I получаем

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -(ikP + Q') e^{-ikx}, u_{xy} = 0, u_{xz} = \left(P' + \frac{k^2 - \beta^2}{2ik} Q \right) e^{-ikx}, \\ u_{yy} &= u_{yz} = 0, u_{zz} = \left(\frac{\alpha^2}{ik} P + Q' \right) e^{-ikx}, \end{aligned}$$

откуда компоненты σ_{iz} тензора напряжений ($\sigma_{ik} = \lambda u_{\alpha\alpha} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$) получаются равными

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2\mu \left(P' + \frac{k^2 - \beta^2}{2ik} Q \right) e^{-ikx}, \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_{zz} &= \left(\frac{\lambda k_1^2 + 2\mu \alpha^2}{ik} P + 2\mu Q' \right) e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичным образом выражаются компоненты \bar{u}_{ik} и $\bar{\sigma}_{ik}$ в слое II.

На границах между слоями для $U_x = u_x + v_x$, $U_z = u_z + v_z$, σ_{xz} и σ_{zz} должны выполняться, во-первых, условия непрерывности при $z = 0$ и, во-вторых, условия периодичности, т. е. указанные величины в слое I при $z = a - 0$ должны равняться соответствующим величинам в слое II при $z = -b + 0$:

$$\begin{aligned} U_x(0) &= \bar{U}_x(0), & U_x(a - 0) &= \bar{U}_x(-b + 0), \\ U_z(0) &= \bar{U}_z(0), & U_z(a - 0) &= \bar{U}_z(-b + 0), \\ \sigma_{xz}(0) &= \bar{\sigma}_{xz}(0), & \sigma_{xz}(a - 0) &= \bar{\sigma}_{xz}(-b + 0), \\ \sigma_{zz}(0) &= \bar{\sigma}_{zz}(0), & \sigma_{zz}(a - 0) &= \bar{\sigma}_{zz}(-b + 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка в (11) решений (6) — (10) дает восемь уравнений для постоянных A, B, \dots, \bar{D} , которые распадаются на две независимые группы.

а) Волна в среднем продольная ($B = C = \bar{B} = \bar{C} = 0$). Как видно из (7) и (9), в этом случае продольные смещения четны (симметричны) относительно середины слоев, в то время как поперечные нечетны (антисимметричны), благодаря чему «в среднем» имеет место только сжатие, а сдвиг отсутствует. Для постоянных A, D и \bar{A}, \bar{D} из (11) получаются следующие уравнения:

$$Aik \cos \frac{\alpha a}{2} + D\beta \cos \frac{\beta a}{2} = \bar{A}ik \cos \frac{\bar{\alpha} b}{2} + \bar{D}\bar{\beta} \cos \frac{\bar{\beta} b}{2},$$

$$A(\lambda k_i^2 + 2\mu\alpha^2) \cos \frac{\alpha a}{2} + D2ik\mu\beta \cos \frac{\beta a}{2} =$$

$$= \bar{A}(\bar{\lambda}\bar{k}_i^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2) \cos \frac{\bar{\alpha} b}{2} + \bar{D}2ik\bar{\mu}\bar{\beta} \cos \frac{\bar{\beta} b}{2},$$

$$A\alpha \sin \frac{\alpha a}{2} + Dik \sin \frac{\beta a}{2} = -\bar{A}\bar{\alpha} \sin \frac{\bar{\alpha} b}{2} - \bar{D}ik \sin \frac{\bar{\beta} b}{2},$$

$$A2ik\mu\alpha \sin \frac{\alpha a}{2} + D(\lambda k_i^2 + 2\mu\alpha^2) \sin \frac{\beta a}{2} =$$

$$= -\bar{A}2ik\bar{\mu}\bar{\alpha} \sin \frac{\bar{\alpha} b}{2} - \bar{D}(\bar{\lambda}\bar{k}_i^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2) \sin \frac{\bar{\beta} b}{2}.$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение, определяющее значения волнового числа k , т. е. значения скорости распространения волны сжатия $c_{xx} = \omega/k$:

$$4(\mu - \bar{\mu})^2 X\bar{X} + \omega^2\rho \left[\frac{\omega^2\rho}{k^2} - 4(\mu - \bar{\mu}) \right] \bar{X} \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} + \\ + \omega^2\bar{\rho} \left[\frac{\omega^2\bar{\rho}}{k^2} + 4(\mu - \bar{\mu}) \right] X \operatorname{tg} \frac{\bar{\beta} b}{2} - \frac{\omega^4\rho\bar{\rho}}{k^2} (Y \operatorname{tg} \frac{\bar{\beta} b}{2} + \bar{Y} \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2}) = 0, \quad (12)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$X = k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} + \alpha\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha a}{2}, \quad Y = k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} - \bar{\alpha}\bar{\beta} \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha} b}{2},$$

$$\bar{X} = k^2 \operatorname{tg} \frac{\bar{\beta} b}{2} + \bar{\alpha}\bar{\beta} \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha} b}{2}, \quad \bar{Y} = k^2 \operatorname{tg} \frac{\bar{\beta} b}{2} - \alpha\bar{\beta} \operatorname{tg} \frac{\alpha a}{2}.$$

Уравнение (12) определяет k при любых значениях толщин слоев a и b в рассматриваемой периодической структуре. Переход к мелкослоистой среде соответствует замене всех тангенсов их аргументами. Это приводит к существенному упрощению дисперсионного уравнения и дает следующее выражение для квадрата скорости волны сжатия c_{xx} :

$$c_{xx}^2 = \frac{(a+b)^2 + 4ab \frac{(\mu - \bar{\mu})(\lambda + \mu - \bar{\lambda} - \bar{\mu})}{(\lambda + 2\mu)(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}}{\bar{\rho}(a+b) \left(\frac{a}{\lambda + 2\mu} + \frac{b}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)}, \quad (13)$$

где введена средняя плотность среды

$$\bar{\rho} = \frac{a\rho + b\bar{\rho}}{a+b}. \quad (14)$$

Очевидно, в рассматриваемом случае тонких слоев периодичность уже не играет роли. Толщины чередующихся слоев могут сменяться произвольным образом, лишь бы оставалось в силе условие тонкости этих слоев. Соответственно, в (13) и (14), равно как и во все последующие результаты, относящиеся к предельному случаю мелкослоистой среды, a и b входят только в виде относительных толщин или долей материалов I и II:

$$n = \frac{a}{a+b}, \quad \bar{n} = \frac{b}{a+b}. \quad (15)$$

Через эти относительные толщины c_{xx}^2 и $\tilde{\rho}$ записываются следующим образом:

$$c_{xx}^2 = \frac{1 + 4n\bar{n} \frac{(\mu - \bar{\mu})(\lambda + \mu - \bar{\lambda} - \bar{\mu})}{(\lambda + 2\mu)(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}}{\tilde{\rho} \left(\frac{n}{\lambda + 2\mu} + \frac{\bar{n}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)}, \quad (16)$$

$$\tilde{\rho} = n\rho + \bar{n}\bar{\rho}. \quad (17)$$

Если при разложениях тангенсов по степеням аргументов в (12) учесть и следующие (кубические) члены, то из требования малости соответствующих поправок к c_{xx}^2 можно получить условия справедливости (16), т. е. условия того, насколько тонкими должны быть слои при заданной частоте и заданных параметрах материалов. Мы, однако, не будем на этом останавливаться*.

б) Волна в среднем поперечная ($A = D = \bar{A} = \bar{D} = 0$). Согласно (7) и (9), в этом случае поперечные смещения четны относительно середин слоев, а продольные нечетны. В результате волна «в среднем» является чисто сдвиговой. Не выписывая соответствующих уравнений для B, C и \bar{B}, \bar{C} , а также получающегося из них общего дисперсионного уравнения, приведем сразу же только предельное (для тонких слоев) выражение для скорости $c_{xz} = \omega/k$. При этом мы уже воспользуемся средней плотностью (17) и относительными толщинами (15):

$$c_{xz}^2 = \frac{1}{\tilde{\rho} (n/\mu + \bar{n}/\bar{\mu})}. \quad (18)$$

3. Для других основных случаев распространения решение получается совершенно аналогичным путем, что позволяет ограничиться лишь несколькими пояснительными замечаниями.

В чисто сдвиговой волне, распространяющейся по оси x , но со смещением частиц параллельным слоям, отлична от нуля только компонента $U_y = v_y$. В слое I мы имеем для нее решение

$$v_y = Q(z) e^{-ikx},$$

$$Q(z) = C \cos \beta (z - a/2) + D \sin \beta (z - a/2), \quad \beta^2 = k_t^2 - k^2,$$

а в слое II — решение

$$\bar{v}_y = \bar{Q}(z) e^{-ikx},$$

$$\bar{Q}(z) = \bar{C} \cos \bar{\beta} (z + b/2) + \bar{D} \sin \bar{\beta} (z + b/2), \quad \bar{\beta}^2 = \bar{k}_t^2 - k^2.$$

Легко видеть, что из компонент σ_{iz} тензора деформации отлична от нуля только компонента σ_{yz} . Детерминант четырех уравнений для C, D и \bar{C}, \bar{D} , вытекающих из условий непрерывности U_y и σ_{yz} , будучи приравнен нулю, дает следующее дисперсионное уравнение:

* Аналогичные условия подробно рассмотрены в [1] для электромагнитных волн. В основном, как было уже отмечено, они сводятся к требованию тонкости слоев по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в их материалах, хотя существенное значение имеют разности параметров обоих материалов. Физически ясно, что слои могут быть тем толще, чем меньше разнятся свойства материалов. Но и при очень различных материалах условия не являются особенно жесткими.

$$\kappa \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\beta a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\bar{\beta} b}{2} \right) + (1 + \kappa^2) \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} \operatorname{tg} \frac{\bar{\beta} b}{2} = 0,$$

где $\kappa = \frac{\bar{\mu}\beta}{\mu\bar{\beta}}$.

Отсюда для тонких слоев, т. е. при замене тангенсов их аргументами, получаем для квадрата скорости $c_{xy} = \omega/k$ выражение:

$$c_{xy}^2 = \frac{n\mu + \bar{n}\bar{\mu}}{\bar{\rho}}. \quad (19)$$

При распространении по оси z продольную волну, в которой отлична от нуля только компонента смещения $U_z = u_z = P(z)e^{-ikz}$ и поперечную волну, в которой смещение параллельно слоям, например, равно $U_x = v_x = Q(z)e^{-ikz}$, можно рассматривать независимо друг от друга. Согласно теореме Флоке [2], $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть периодическими функциями с периодом структуры $d = a + b$. Условия периодичности (при $z = a - 0$ и $z = -b + 0$) и непрерывности (при $z = 0$) должны выполняться для амплитуд U_z и σ_{zz} в волне сжатия и для амплитуд U_x и σ_{xz} в волне сдвига. В первом случае дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\cos k(a + b) = \cos k_1 a \cos \bar{k}_1 b - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \sin k_1 a \sin \bar{k}_1 b,$$

причем

$$\kappa = \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \bar{k}_1}{(\lambda + 2\mu) k_1},$$

а во втором — тот же вид, но с заменой k_1 и \bar{k}_1 в аргументах косинусов и синусов соответственно на k_1 и \bar{k}_1 и с $\kappa = \frac{\bar{\mu}k_1}{\mu\bar{k}_1}$.

В случае тонких слоев, когда синусы можно заменить их аргументами, а в косинусах удержать только члены второго порядка относительно a и b , получаем следующие квадраты скоростей распространения: для волны сжатия —

$$c_{zz}^2 = \frac{1}{\bar{\rho} [n/(\lambda + 2\mu) + \bar{n}/(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})]}, \quad (20)$$

а для волны сдвига скорость c_{zx} оказывается равной c_{xz} [см. (18)], как это и должно быть при гексагональной симметрии.

Найдя скорости (2), мы тотчас же получаем эффективные упругие модули мелкослоистой среды $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ и λ_5 . Для этого достаточно сравнить формулы (16), (18), (19), (20) с (2). Результат мы запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{n}{\lambda + 2\mu} + \frac{\bar{n}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad \lambda_4 = n\mu + \bar{n}\bar{\mu}, \quad (21)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left[1 + 4n\bar{n} \frac{(\mu - \bar{\mu})(\lambda + \mu - \bar{\lambda} - \bar{\mu})}{(\lambda + 2\mu)(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \right], \quad \frac{1}{\lambda_5} = \frac{n}{\mu} + \frac{\bar{n}}{\bar{\mu}}.$$

Как уже отмечалось, для нахождения λ_3 необходимо рассмотреть распространение волны под любым углом к оси z , т. е. волну, в которой смещение частиц среды выражается в соответствии с уравнениями (3) формулами

$$U_x = \left[P(z) + \frac{Q'(z) - ik_3 Q(z)}{ik_1} \right] e^{-i(k_1 x + k_3 z)},$$

$$U_z = \left[-\frac{P'(z) - ik_3 P(z)}{ik_1} + Q(z) \right] e^{-i(k_1 x + k_3 z)},$$

причем $P(z)$ и $Q(z)$ периодичны с периодом $d = a + b$. Условия (11) дают тогда восемь уравнений, уже не распадающихся на две группы, и расчет,

если даже сразу перейти к случаю тонких слоев, становится довольно громоздким. Раскрыв детерминант восьмого порядка, надо сопоставить получающееся дисперсионное уравнение с соответствующим приближенным уравнением для кристалла гексагональной симметрии, которое имеет в рассматриваемом случае вид:

$$(\lambda_2 k_1^2 + \lambda_5 k_3^2 - \tilde{\rho} \omega^2)(\lambda_5 k_1^2 + \lambda_1 k_3^2 - \tilde{\rho} \omega^2) - (\lambda_3 + \lambda_5)^2 k_1^2 k_3^2 = 0.$$

Указанное сопоставление приводит к следующему выражению для λ_3 :

$$\lambda_3 = -\lambda_5 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_5)^2 + 4n\bar{n}\lambda_1^2\lambda_5(1/\bar{\mu} - 1/\mu)} \times \\ \times [(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) - (\bar{\lambda} + \bar{\mu})/(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})] [n(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) + \bar{n}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})/(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})]. \quad (22)$$

В случае изотропной среды ($\lambda = \bar{\lambda}$, $\mu = \bar{\mu}$, $\lambda_1 = \lambda + 2\mu$, $\lambda_5 = \mu$) эта формула дает $\lambda_3 \equiv \lambda$, как это и должно иметь место. Для исчезновения второго члена под радикалом достаточно, если выполняется какое-либо одно из условий $\mu = \bar{\mu}$ или $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}$. В обоих случаях формула (22) дает

$$\lambda_3 = \lambda_1 - 2\lambda_5,$$

т. е. при $\mu = \bar{\mu}$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n/(\lambda + 2\mu) + \bar{n}/(\bar{\lambda} + 2\mu)} - 2\mu,$$

а при $\lambda/\mu = \bar{\lambda}/\bar{\mu}$

$$\lambda_3 = \lambda/\mu / (n/\mu + \bar{n}/\bar{\mu}).$$

Зная все пять эффективных упругих модулей, т. е. располагая исчерпывающей характеристикой «кристалла», мы имеем возможность вычислять скорости распространения волн по направлениям, ориентированным относительно слоев произвольным образом.

4. В недавней работе Уайта и Ангона [3] формулы (16) и (18) — (20) для скоростей распространения волн сжатия и сдвига в направлениях, перпендикулярном и параллельном слоям, были получены другим способом. Имея в виду с самого начала случай тонких слоев, эти авторы рассматривают статические деформации элемента объема (кубика), вырезанного из мелкослоистой среды. Деформации берутся именно такие, какие испытывает этот кубик в волне соответствующего типа*. Формулы Уайта и Ангона отличаются от полученных выше лишь по внешнему виду: скорости волн в мелкослоистой среде выражены у них через скорости волн сжатия и сдвига в материалах слоев, через плотности этих материалов и их коэффициенты Пуассона σ и $\bar{\sigma}$. Замена λ и μ на указанные величины при помощи соотношений

$$\lambda + 2\mu = \rho c_l^2, \quad \mu = \rho c_t^2 = \frac{\rho c_l^2}{2} \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma}$$

приводит к полному совпадению результатов.

К рассматриваемой задаче авторов работы [3] привлекло обнаруженное при сейсмической разведке нефти превышение скорости волн, рас-

* Этот метод еще раньше был применен Ю. В. Ризниченко [5], на работы которого [4,5] мне указал Л. М. Бреховских. Рассматривая слоистую среду и интересуясь сейсмическим аспектом задачи, Ризниченко нашел только скорости волн сжатия и только в случаях продольного и поперечного распространения. Тем самым в его работах вопрос о модуле λ_3 (как и в [3]) не затронут. Выражения для всех пяти модулей дает Бругеман [6]. Его выражения для λ_1 , λ_4 и λ_5 совпадают с (21), а для λ_2 и λ_3 — расходятся с (21) и (22) и представляются нам по способу их получения сомнительными.

пространяющихся вдоль нефтеносных слоев, на 3—20% над скоростью волн, распространяющихся перпендикулярно к слоям*. Такого порядка превышение получается и из теоретических формул при тех соотношениях параметров, какие можно предположить в реальных условиях.

Нам представляется, однако, что этот специальный вопрос не исчерпывает возможностей приложения полученных результатов. Несомненный интерес может представить использование искусственных анизотропных материалов, изготовление которых вряд ли натолкнется на технологические трудности, а свойства могут быть очень разнообразны. В частности, речь может идти о виброизолирующих материалах и, возможно, о монохроматорах направления распространения волны определенного типа, причем соответствующие свойства будут, очевидно, сохраняться в широком диапазоне частот.

Для такого рода применений важно знать не только скорости распространения волн различных типов, но и их коэффициенты поглощения. Этот последний вопрос (не затрагиваемый в работе [3]) решается весьма просто, если условие тонкости слоев выполнено также при учете затухания. В этом случае полученные выше формулы (21) остаются в силе и тогда, когда действительные коэффициенты λ и μ заменены комплексными благодаря введению объемной и сдвиговой вязкостей:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \rightarrow \lambda + \frac{2}{3}\mu + i\omega\zeta, \quad \mu \rightarrow \mu + i\omega\eta,$$

так что

$$\lambda \rightarrow \lambda + i\omega\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right), \quad \lambda + 2\mu \rightarrow \lambda + 2\mu + i\omega\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right).$$

Комплексные волновые числа определяются, согласно (2), формулами

$$k_{xx}^2 = \frac{\omega^2 \tilde{\rho}}{\lambda_2}, \quad k_{xz}^2 = k_{zx}^2 = \frac{\omega^2 \tilde{\rho}}{\lambda_5}, \quad k_{xy}^2 = \frac{\omega^2 \tilde{\rho}}{\lambda_4}, \quad k_{zz}^2 = \frac{\omega^2 \tilde{\rho}}{\lambda_1}. \quad (23)$$

Полагая $k = k_0 - i\kappa$, нетрудно получить выражения для амплитудных коэффициентов поглощения κ . В том случае, когда вязкости настолько невелики, что можно ограничиться членами первого порядка относительно η и ζ , эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} &= \frac{\omega^2 \lambda_1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\lambda_2}} \left\{ \frac{n\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)}{(\lambda + 2\mu)^2} + \frac{\bar{n}\left(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}\right)}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})^2} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \left[\frac{\eta - \bar{\eta}}{\mu - \bar{\mu}} + \frac{\zeta - \bar{\zeta} + \frac{\eta - \bar{\eta}}{3}}{\lambda + \mu - \bar{\lambda} - \bar{\mu}} - \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\lambda + 2\mu} - \frac{\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right] \right\}, \quad (24) \\ \kappa_{xz} &= \kappa_{zx} = \frac{\omega^2}{2} \sqrt{\tilde{\rho} \lambda_5} \left(\frac{n\eta}{\mu^2} + \frac{\bar{n}\bar{\eta}}{\bar{\mu}^2} \right), \quad \kappa_{xy} = \frac{\omega^2}{2\lambda_4} \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\lambda_4}} (n\eta + \bar{n}\bar{\eta}), \\ \kappa_{zz} &= \frac{\omega^2}{2} \sqrt{\tilde{\rho} \lambda_1} \left[\frac{n\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)}{(\lambda + 2\mu)^2} + \frac{\bar{n}\left(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}\right)}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})^2} \right], \end{aligned}$$

причем под λ_i ($i = 1, 2, 4, 5$) здесь понимаются действительные модули, выражающиеся через коэффициенты Ляме по формулам (21).

Заслуживает внимания тот случай, когда чередуются слои материала,

* См. также [5] и [7].

в котором потерями можно пренебречь (например, металла), со слоями вязкой жидкости. Учитывая в жидкости (слой II) только сдвиговую вязкость, имеем

$$\bar{\lambda} = \bar{\rho} \bar{c}_l^2 - \frac{2}{3} i \omega \bar{\eta}, \quad \bar{\mu} = i \omega \bar{\eta}.$$

Обозначим для краткости

$$\bar{\rho} \bar{c}_l^2 = \bar{K}, \quad \omega \bar{\eta} = \bar{\eta}_1.$$

Тогда, согласно (21),

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{n}{\lambda + 2\mu} + \frac{\bar{n}}{\bar{K} + \frac{4}{3} i \bar{\eta}_1}, \quad \lambda_4 = n\mu + i n \bar{\eta}_1, \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left[1 + 4n\bar{n} \frac{(\mu - i \bar{\eta}_1) \left(\lambda + \mu - \bar{K} - \frac{i}{3} \bar{\eta}_1 \right)}{(\lambda + 2\mu) \left(\bar{K} + \frac{4}{3} i \bar{\eta}_1 \right)} \right], \quad \frac{1}{\lambda_5} = \frac{n}{\mu} - \frac{i \bar{n}}{\bar{\eta}_1}$$

и формулы (23) позволяют получить соответствующие выражения для скоростей распространения и амплитудных коэффициентов поглощения. Если $\bar{\eta}_1$ мало (по сравнению с \bar{K} и μ), то в λ_1 , λ_2 и λ_4 вязкость жидкости входит только как поправка, т. е. коэффициенты поглощения κ_{xx} , κ_{zz} для волн сжатия и κ_{xy} для волны сдвига уменьшаются вместе с $\bar{\eta}_1$. Но в λ_5 вязкость жидкости сказывается тем сильнее, чем она меньше, т. е. $\kappa_{xz} = \kappa_{zx}$ с уменьшением $\bar{\eta}_1$ растет (конечно, для справедливости рассматриваемых формул должно оставаться в силе условие тонкости слоев жидкости по сравнению с длиной вязкой волны в ней). Для скоростей и поглощений сдвиговых волн в общем случае любого $\bar{\eta}_1$ имеем:

$$c_{xz}^2 = \frac{2\mu}{n\bar{\rho} \left(\sqrt{1 + (\bar{n}\mu/n\bar{\eta}_1)^2} + 1 \right)}, \quad \kappa_{xz}^2 = \frac{n\omega^2\bar{\rho}}{2\mu} \left(\sqrt{1 + (\bar{n}\mu/n\bar{\eta}_1)^2} - 1 \right),$$

$$c_{xy}^2 = \frac{1(n^2\mu^2 + \bar{n}^2\bar{\eta}_1^2)}{n\bar{\rho}\bar{\mu} \left(\sqrt{1 + (\bar{n}\bar{\eta}_1/n\mu)^2} + 1 \right)}, \quad \kappa_{xy}^2 = \frac{n\omega^2\bar{\rho}\bar{\mu}}{2(n^2\mu^2 + \bar{n}^2\bar{\eta}_1^2)} \left(\sqrt{1 + (\bar{n}\bar{\eta}_1/n\mu)^2} - 1 \right).$$

При достаточно малом $\bar{\eta}_1 = \omega \bar{\eta}$ отсюда следует,

$$c_{xz}^2 = \frac{2\omega\bar{\eta}}{n\bar{\rho}}, \quad \kappa_{xz}^2 = \frac{\omega\bar{\rho}\bar{n}}{2\bar{\eta}},$$

$$c_{xy}^2 = \frac{n\mu}{\bar{\rho}}, \quad \kappa_{xy}^2 = \frac{\omega^4\bar{\rho}\bar{n}^2\bar{\eta}^2}{4n^3\mu^3},$$

т. е. с уменьшением $\bar{\eta}$ скорость c_{xz} падает и поглощение κ_{xz} растет, в то время как c_{xy} перестает зависеть от $\bar{\eta}$, а κ_{xy} уменьшается. Существенно различна и частотная зависимость этих величин.

5. Рассматривая в предыдущем разделе чередование слоев твердого тела и жидкости, мы предполагали, что введенное в самом начале условие тонкости слоев по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в их материале выполнено как для твердого тела, так и для жидкости. Но если вязкость жидкости мала, то может представить интерес другая постановка задачи, когда толщина слоев жидкости попрежнему мала по сравнению с длиной волны сжатия, но значительно превосходит длину сдвиговой (вязкой) волны. При этих условиях целесообразно рассматривать жидкость в первом приближении как идеальную, т. е. учитывать в ней лишь продольные волны, а на границах с твердыми слоями требовать только непрерывности давления и нормального смещения, наряду с отсутствием тангенциальных напряжений в твердом теле. Из получающе-

гося при этом разрыва тангенциальной скорости можно затем найти затухание волн, обусловленное вязкостью жидкости.

Среда, состоящая из слоев твердого тела и идеальной жидкости, конечно, тоже ведет себя «в среднем» как кристалл, обладающий гексагональной симметрией, но с такими значениями эффективных упругих модулей, которые в реальных кристаллах невозможны. В частности, заранее ясно, что по отношению к сдвигам в своей плоскости твердые слои разобцены и, следовательно, сдвиговая волна, распространяющаяся перпендикулярно к слоям, неосуществима.

Итак, мы имеем теперь в жидкости (слой II) только продольные волны ($\mathbf{U} = \mathbf{u}$), причем давление есть $p = -\bar{K} \operatorname{div} \mathbf{U}$, где $\bar{K} = \bar{\rho} \bar{c}^2$ (\bar{c} — скорость продольных волн, индекс l опускаем). Для твердого тела (слой I) имеют место уравнения (3), (4). На границах должны выполняться следующие условия непрерывности и периодичности:

$$\begin{aligned} U_z(0) &= \bar{U}_z(0), & U_z(a-0) &= \bar{U}_z(-b+0), \\ \sigma_{xz}(0) &= \sigma_{yz}(0) = 0, & \sigma_{xz}(a-0) &= \sigma_{yz}(a-0) = 0, \\ \sigma_{zz}(0) &= -p(0), & \sigma_{zz}(a-0) &= -p(-b+0). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим сразу же, что единственный случай, при котором нет никаких особенностей по сравнению с чередованием твердых слоев, это распространение волны сжатия в направлении, перпендикулярном к слоям. Для c_{zz} получается формула, аналогичная (20):

$$c_{zz}^2 = \frac{1}{\bar{\rho} (n / (\lambda + 2\mu) + \bar{n} / \bar{K})}, \quad (27)$$

т. е. дело сводится к замене $\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}$ на сжимаемость жидкости \bar{K} . В остальных случаях результаты оказываются, естественно, отличающимися от (16), (18) и (19).

Начнем опять с распространения вдоль слоев (по оси x) и рассмотрим продольно-поперечную волну, в которой смещение лежит в плоскости (x, z) . В твердых слоях мы имеем для смещений и напряжений прежние выражения (6), (7) и (10), а в жидкости

$$\bar{U}_x = \bar{P}(z) e^{-ikx}, \quad \bar{U}_z = -\frac{\bar{P}'(z)}{ik} e^{-ikx}, \quad p = -\frac{\bar{\rho} \omega^2}{ik} \bar{P}(z) e^{-ikx},$$

причем

$$\bar{P}(z) = \bar{A} \cos \bar{\alpha}(z + b/2) + \bar{B} \sin \bar{\alpha}(z + b/2), \quad \bar{\alpha}^2 = \bar{k}^2 - k^2, \quad \bar{k} = \omega / \bar{c}.$$

Условия (26) дают для постоянных A, B, C, D и \bar{A}, \bar{B} шесть уравнений, которые и здесь распадаются на две группы.

а) Волна в среднем продольная ($B = C = \bar{B} = 0$). Граничные условия имеют вид:

$$A\alpha \sin \frac{\alpha a}{2} + Dik \sin \frac{\beta a}{2} + \bar{A} \bar{\alpha} \sin \frac{\bar{\alpha} b}{2} = 0,$$

$$A2ik\alpha \sin \frac{\alpha a}{2} + D\gamma \sin \frac{\beta a}{2} = 0,$$

$$A\mu\gamma \cos \frac{\alpha a}{2} + D2ik\mu\beta \cos \frac{\beta a}{2} - \bar{A}\bar{\rho}\omega^2 \cos \frac{\bar{\alpha} b}{2} = 0,$$

$$(\gamma = k_l^2 - 2k^2),$$

откуда следует дисперсионное уравнение:

$$\bar{\mu} \bar{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha} b}{2} \left(4k^2 \alpha \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha a}{2} + \gamma^2 \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} \right) + \bar{\rho} \omega^2 \alpha (\gamma + 2k^2) \operatorname{tg} \frac{\alpha a}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} = 0.$$

Переходя к случаю тонких слоев (тангенсы заменяются их аргументами) и подставляя $\mu = \omega^2 \rho / k_l^2$, $\alpha^2 = k_l^2 - k^2$, $\bar{\alpha}^2 = \bar{k}^2 - k^2$, $\gamma = k^2 - 2k^2$, получаем:

$$\bar{n}\rho(\bar{k}^2 - k^2)[4k^2(k_l^2 - k_l^2) + k_l^4] + n\rho k_l^4(k_l^2 - k^2) = 0.$$

Если ввести обозначения

$$x = (k/k_l)^2, \quad \xi = n\bar{\rho}/\bar{n}\rho, \quad \eta = (k_l/k_l)^2, \quad \zeta = (\bar{k}/k_l)^2, \quad (28)$$

то уравнение принимает вид:

$$4(1 - \eta)x^2 - [4\zeta(1 - \eta) + \xi + 1]x + \xi\eta + \zeta = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{4\zeta(1 - \eta) + \xi + 1 \pm \sqrt{[4\zeta(1 - \eta) + \xi - 1]^2 + 4\xi[1 - 4\eta(1 - \eta)]}}{8(1 - \eta)}. \quad (29)$$

Нетрудно убедиться, что в области $\eta < 1$, которая только и представляет реальный интерес, оба корня x_1 и x_2 вещественны и положительны, т. е. существуют две скорости волны сжатия c_{xx} . Приведем для некоторых частных случаев выражения для x_1 и x_2 , для соответствующей им скорости распространения c_{xx} и для соотношения амплитуд $A:D:\bar{A}$ сжатия и сдвига в твердых слоях и сжатия в жидкости.

При $\eta = 1/2$ ($c_l = \sqrt{2}c_l$) имеем

$$x_1 = \zeta + \frac{\xi}{2}, \quad c_{xx1} = \frac{\bar{c}c_l}{\sqrt{c^2 + c_l^2}}, \quad A:D:\bar{A} = 1:\sqrt{\frac{\xi + 2\zeta}{\xi + 2\zeta - 2}}:\frac{\rho}{\bar{\rho}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad c_{xx2} = c_l, \quad A:D:\bar{A} = 1:0:0.$$

Таким образом, второй корень отвечает волне чистого сжатия в твердых слоях, которое не сопровождается сдвигом ввиду специального соотношения скоростей c_l и c_l .

При $\xi \rightarrow 0$, т. е. при утоньшении твердых слоев или увеличении их плотности, имеем

$$x_1 = \zeta, \quad c_{xx1} = \bar{c}, \quad A:D:\bar{A} = 0:0:1,$$

$$x_2 = \frac{1}{4(1 - \eta)}, \quad c_{xx2} = \frac{2c_l \sqrt{c_l^2 - c_l^2}}{c_l}, \quad A:D:\bar{A} = \frac{\eta}{1 - 2\eta}:\frac{-1}{\sqrt{4\eta - 3}}:\frac{2a(1 - \eta)}{b[4\zeta(1 - \eta) - 1]}.$$

Здесь x_1 соответствует волне чистого сжатия в жидкости при неподвижных твердых слоях.

При возрастании ξ , т. е. при увеличении плотности жидкости или утоньшении ее слоев (однако, лишь до тех пор, пока они не станут сравнимы с длиной вязкой волны), получаем

$$[x_1 = \frac{\xi}{4(1 - \eta)}, \quad c_{xx1} = \frac{2c_l}{c_l} \sqrt{\frac{c_l^2 - c_l^2}{\xi}}, \quad A:D:\bar{A} = 1:1:\frac{2\rho(1 - \eta)}{\bar{\rho}},$$

$$x_2 = \eta, \quad c_{xx2} = c_l, \quad A:D:\bar{A} = 1:0:0.$$

С ростом ξ скорость c_{xx1} убывает. Корень x_2 дает волну сжатия в твердых слоях — без сдвигов, так как жидкость практически отсутствует.

б) Волна в среднем поперечная ($A = D = \bar{A} = 0$). В этом случае поперечное смещение в твердом слое четно относительно его середины, а продольное — нечетно, т. е. должно происходить изгибание твердых слоев. Дисперсионное уравнение в общем случае имеет вид

$$\bar{\mu}\alpha \left(4k^2 \alpha\beta \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} + \gamma^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha a}{2} \right) + \bar{\rho}\omega^2\alpha (\gamma + 2k^2) \operatorname{tg} \frac{\alpha b}{2} = 0.$$

В случае тонких слоев, если удерживать лишь члены первого порядка относительно a и b , получается невыполнимое условие $\bar{\rho} = n\rho + \bar{n}\bar{\rho} = 0$. Другими словами, детерминант уравнений для B , C и \bar{B} отличен от нуля и, следовательно, рассматриваемая волна в мелкослоистой среде невозможна.

Если при переходе к малым a и b учесть в дисперсионном уравнении следующие (кубические) члены в разложениях тангенсов, то получим

$$k_t^2 \{ a^2 [x(3-4x) + \eta(2x-1)^2] + b^2 \xi_1 (\zeta - x) \} + 12(1 + \xi_1) = 0,$$

где использованы обозначения (28) и, кроме того, $\xi_1 = \bar{n}\bar{\rho}/n\rho$. При малых $k_t a$ и $k_t b$ один из корней этого уравнения положителен и очень велик. В частности, при $a = b$ он равен

$$x \approx \frac{1}{k_t a} \sqrt{\frac{3(1 + \xi_1)}{1 - \eta}}.$$

Таким образом, существует волна сдвига с очень малой скоростью c_{xz} явно зависящей от толщин слоев. В пределе, при очень тонких слоях, надо считать

$$c_{xz} = 0. \quad (30)$$

6. Остается рассмотреть сдвиговые волны со скоростями c_{xy} и c_{zx} . При распространении по оси x чисто сдвиговой волны со смещением по оси y взаимодействие между твердыми слоями и жидкостью отсутствует. Следовательно, возможна только сдвиговая волна в твердых слоях, которые скользят при ее распространении по неподвижной жидкости:

$$U_y = v_y = [C \cos \beta(z - a/2) + D \sin \beta(z - a/2)] e^{-ikx}, \quad \bar{U}_y = 0.$$

Граничные условия сводятся к тому, что на обеих сторонах твердого листа равно нулю тангенциальное напряжение σ_{yz} , что дает для постоянных C и D два уравнения:

$$\begin{aligned} C \sin \frac{\beta a}{2} + D \cos \frac{\beta a}{2} &= 0, \\ -C \sin \frac{\beta a}{2} + D \cos \frac{\beta a}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этих уравнений есть $\sin \beta a = 0$, т. е. $\beta a = n\pi$ или

$$k = \sqrt{k_t^2 - (n\pi/a)^2}.$$

Так как по условию $k_t a \ll 1$, то все волноводные волны являются закрытыми и бегущей будет только волна с $n = 0$ ($\beta = 0$). В этой волне смещение постоянно по толщине твердого слоя ($U_y = C e^{-ikx}$) и $k = k_t$, т. е.

$$c_{xy} = c_t. \quad (31)$$

Расчет затухания этой волны (по величине потерь, вносимых вязкостью жидкости η при скольжении твердых слоев относительно жидких) дает для амплитудного коэффициента поглощения значение

$$\kappa_{xy} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\bar{\rho}\omega\eta}{\rho\mu}}.$$

При распространении чисто сдвиговой волны по направлению оси z мы снова не имеем взаимодействия твердых слоев с жидкостью, сдвиговая упругость для колебаний твердых слоев в их собственной плоскости отсутствует и, соответственно, $c_{zx} = 0$, как это и должно быть в кристалле с гексагональной симметрией в силу (30).

В результате, сравнивая формулы (27), (29) и (30) с (2), мы получаем следующие значения четырех (из пяти) эффективных упругих модулей среды, состоящей из слоев твердого тела и идеальной жидкости:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{n}{\lambda + 2\mu} + \frac{\bar{n}}{K}, \quad \lambda_4 = \mu \frac{\tilde{\rho}}{\rho}, \quad \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 \frac{4\zeta(1-\eta) + \xi + 1 \mp \sqrt{[4\zeta(1-\eta) + \xi - 1]^2 + 4\xi[1 - 4\eta(1-\eta)]}}{2(\zeta + \xi\eta)},$$

где $\bar{K} = \bar{\rho} \bar{c}^2$ — сжимаемость жидкости, и где вновь использованы обозначения (28). Таким образом, модуль λ_2 двузначен. Переход к изотропной среде, конечно, невозможен, что видно хотя бы из неосуществимости равенства λ_4 и λ_5 .

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов. Электромагнитные свойства мелкослоистой среды. ЖЭТФ, 1955, 29, 5 (11), 605—616.
2. G. Floquet. Ann. Ecole Norm., 1883, 12, 47—88.
3. J. E. White a. F. A. Angona. Elastic wave velocities in laminated media. J. Acoust. Soc. Am., 1955, 27, 311—317
4. Ю. В. Ризниченко. О распространении сейсмических волн в дискретных и гетерогенных средах. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1949, 13, 2, 115—128.
5. Ю. В. Ризниченко. О сейсмической квазианизотропии. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1949, 13, 6, 518—544.
6. D. A. G. Bruggeman. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, III. Ann. d. Phys., 1937, 29, 2, 160—178.
7. И. С. Борзон. Об индикатрисах средних сейсмических скоростей в случае слоистых сред. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1949, 13, 2, 129—142.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 сентября 1955 г.