АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том III 1957 Вып. 4

ДИФРАКЦИЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. ЧАСТЬ I

М. Д. Хаскинд

Излагается общая теория гидродинамических сил, действующих на тело при дифракции и излучении акустических волн в жидкостях и газах.

Показывается, что развитая ранее теория обобщенных коэффициентов присоединенных масс и демпфирования [1] находится в тесной связи с теорией гидродинамических сил и моментов в дифракционной проблеме. В этом случае гидродинамические силы и моменты полностью определяются через функции излучения, характеризующие излучение акустических волн в жидкостях и газах при колебании тела с единичными амплитудами скоростей. В частности, при дифракции плоских волн, указанные силы и моменты, равно как и коэффициенты демпфирования, выражаются только через асимптотические характеристики функций излучения.

Линейная теория гидродинамических сил и моментов

В линеаризированной теории излучения и дифракции акустических волн в жидкостях и газах потенциал скоростей $\Phi^0(x, y, z, t)$ определяется из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi^0}{\partial y^2}+\frac{\partial\Phi^0}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $c=\sqrt{(dp/dr)_0}$ — скорость звука в невозмущенной жидкости, p и ρ — соответственно давление и плотность.

На поверхности тела S потенциал скоростей удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\Phi^0}{\partial n}=v_n(M, t), \tag{2}$$

где $v_n(M, t)$ — нормальная составляющая скорости какой-либо точки M поверхности тела S; при этом нормаль к поверхности S мы будем считать направленной внутрь жидкости. Для твердого тела функция v_n выражается через поступательные и угловые скорости следующим образом:

$$v_n(M, t)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\cdot\Omega$$

$$(\mathbf{V}=V_1\mathbf{i}_1+V_2\mathbf{i}_2+V_3\mathbf{i}_3,\quad \Omega=V_4\mathbf{i}_1+V_5\mathbf{i}_2+\mathbf{V}_6\mathbf{i}_3,\quad \mathbf{r}=x\mathbf{i}_1+y\mathbf{i}_2+z\mathbf{i}_3). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{V}$ и Ω — соответственно векторы поступательной и угловой скорости, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M и $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали.

Кроме перечисленных условий, излучаемые и продифрагированные волны удовлетворяют на бесконечности принципу излучения, т. е. на больших расстояниях от тела они переходят в расходящиеся волны.

Если потенциал скоростей $\Phi^0(x, y, z, t)$ определен, то давление в каждой точке жидкости определяется из линеаризированного соотношения

$$p-p_0=-\rho_0\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}, \tag{4}$$

где p_0 и ρ_0 — соответственно давление и плотность невозмущенной жидкости.

Пользуясь этим, можно найти выражения для главного вектора и главного момента гидродинамических сил. Имеем

$$\mathbf{F} = -\iint\limits_S (p - p_0)\,\mathbf{n}\,dS, \quad \mathbf{M} = -\iint\limits_S (p - p_0)\,(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,dS. \tag{5}$$

В дальнейшем мы рассматриваем случай, когда набегающие и излучаемые колеблющимся телом волны имеют одну и ту же частоту σ, так что поступательная и угловая скорости колебаний тела и потенциал скоростей набегающих волн Φ_0 могут быть определены соотношениями:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}e^{i\sigma t}, \quad \Omega = \boldsymbol{\omega}e^{i\sigma t}, \quad V_s = v_s e^{i\sigma t} \quad (s = 1, 2, \ldots, 6),$$

$$\Phi_0(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z)\,e^{i\sigma t} \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем в комплексных выражениях, содержащих множитель $\exp i\sigma t$, следует рассматривать только действительную часть.

В соответствии с соотношениями (6), положим

$$\Phi^0(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\,e^{i\sigma t} + \varphi_0(x, y, z)\,e^{i\sigma t}, \tag{7}$$

где функция $\varphi(x, y, z)$ при колебаниях твердого тела удовлетворяет условиям *:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k = \frac{\sigma}{c}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\omega} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \text{ на } S, \tag{9}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + ik\varphi\right) = 0 \quad \text{(принцип излучения)}. \tag{10}$$

Для функции $\varphi(x, y, z)$ имеем следующее общее представление:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)\right] dS, \tag{11}$$

$$(r_0^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2).$$

Из формулы (11) вытекает асимптотическое выражение:

$$\varphi = -Q(k, \theta, \psi)\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} - L(k, \theta, \psi)\frac{e^{-ikr}}{4\pi r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{12}$$

где r, θ и ψ — сферические координаты, а функции $Q(k, \theta, \psi)$ и $L(k, \theta, \psi)$ определяются соотношениями

$$Q(k, \theta, \psi) = \iint\limits_S e^{ik\chi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - ik\varphi\frac{\partial\chi}{\partial n}\right) dS, \tag{13}$$

$$L(k, \theta, \psi) = \iint\limits_S e^{ik\chi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\left[\chi - \frac{ik}{2}(r^2 - \chi^2)\right] - \varphi\left[ik\frac{\partial\chi}{\partial n}\left(\chi - \frac{ik}{2}(r^2 - \chi^2)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial\chi}{\partial n} - ik\left(r\frac{\partial r}{\partial n} - \chi\frac{\partial\chi}{\partial n}\right)\right]\right\} dS \tag{14}$$

$$(\chi = (x\cos\psi + y\sin\psi)\sin\theta + z\cos\theta, \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

---

* Дальнейшее изложение справедливо также для области, ограниченной поверхностью Σ, на которой задан импеданц z. Соответствующая функция источника может быть найдена в частных случаях.

Представим функцию $\varphi(x, y, z)$ в расчлененном виде:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{6} \varphi_m v_m + \varphi_7, \quad \varphi = \mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} + \varphi_7, \tag{15}$$

где векторы $\mathbf{\Phi}_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и $\mathbf{\Phi}_2(\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ и функция φ_7 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial n} = \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}_2}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \varphi_7}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \text{ на } S, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} + k^2 \varphi_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, 7), \tag{17}$$

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + ik\varphi_m \right) = 0. \tag{18}$$

При этом асимптотический характер функций $\varphi_m(x, y, z)$ определяется формулой

$$\varphi_m(x, y, z) = -Q_m(k, \theta, \psi) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} - L_m(k, \theta, \psi) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r^2} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{19}$$

где $Q_m(k, \theta, \psi)$ и $L_m(k, \theta, \psi)$ определяются через φ_m, согласно соотношениям (13) и (14).

Функции $\varphi_m(x, y, z) \exp i\sigma t$ $(m = 1, 2, \ldots, 6)$ представляют собой потенциалы скоростей возмущенного движения жидкости при колебаниях твердого тела с единичными амплитудами скоростей. Этими функциями определяются простейшие формы излучения акустических волн, в связи с чем будем их называть функциями излучения, функцией $\varphi_7(x, y, z) \exp i\sigma t$ определяется решение дифракционной проблемы (функция рассеяния). Наконец, величины $Q_m(k, \theta, \psi)$ и $L_m(k, \theta, \psi)$ являются асимптотическими характеристиками функций излучения и рассеяния.

Из соотношений (4), (7) и (15) имеем следующее выражение для давления в жидкости:

$$p - p_0 = -\rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} (\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) - \rho_0 i\sigma (\varphi_0 + \varphi_7) e^{i\sigma t}. \tag{20}$$

Подставив выражение (20) в формулы (5), получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}. \tag{21}$$

Здесь $\mathbf{F}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$ представляют собой главный вектор и главный момент гидродинамических сил, вызванных вынужденными колебаниями тела

$$\mathbf{F}^{(1)} = \rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} \iint_S (\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial n} dS,$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} \iint_S (\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_2}{\partial n} dS, \tag{22}$$

а $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$ — главный вектор и главный момент гидродинамических сил, обусловленных дифракцией набегающих волн вокруг тела (дифракционные силы)

$$\mathbf{F}^{(2)} = \rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} \iint_S (\varphi_0 + \varphi_7) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial n} dS, \quad \mathbf{M}^{(2)} = \rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} \iint_S (\varphi_0 + \varphi_7) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_2}{\partial n} dS. \tag{23}$$

Для последующих преобразований заметим, что если мы имеем две функции U и W, удовлетворяющие волновому уравнению (17) и принципу

излучения (18), то на основании формулы Грина легко установить правило перестановки [1]

$$\iint\limits_S U \frac{\partial W}{\partial n}\, ds = \iint\limits_S W \frac{\partial U}{\partial n}\, ds. \tag{24}$$

Далее введем в рассмотрение группу комплексных коэффициентов

$$\mu_{mj} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{mj} = -\rho_0 \iint\limits_S \varphi_m \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\, ds \quad (m,\ j = 1, 2, \ldots, 6). \tag{25}$$

Из правила перестановки (24) следует симметричность коэффициентов μ_{mj} и λ_{mj}, т. е. $\mu_{mj} = \mu_{jm}$ и $\lambda_{mj} = \lambda_{jm}$. Коэффициенты μ_{mj} и λ_{mj} зависят от формы поверхности S и волнового числа k излучаемых волн.

Используя соотношения (22) и (25), получаем

$$X_j = -\sum_{m=1}^{6}\left(\mu_{mj}\frac{dV_m}{dt} + \lambda_{mj} V_m\right) \quad (V_m = v_m e^{i\sigma t},\ j = 1, 2, \ldots, 6), \tag{26}$$

где X_j — проекции главного вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ и главного момента $\mathbf{M}^{(1)}$ $(j = 4, 5, 6)$. Из этих выражений видно, что μ_{mj} и λ_{mj} представляют собой обобщенные коэффициенты присоединенных масс и демпфирования *.

Из формул (16) и (24) имеем

$$\iint\limits_S \varphi_7 \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial n}\, dS = -\iint\limits_S \Phi_{1,2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\, dS. \tag{27}$$

Поэтому для проекций Y_m главного вектора $\mathbf{F}^{(2)}$ $(m = 1, 2, 3)$ и главного момента $\mathbf{M}^{(2)}$ $(m = 4, 5, 6)$ дифракционных сил находим

$$Y_m = \rho_0 i\sigma e^{i\sigma t} \iint\limits_S \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right) ds \quad (m = 1, 2, \ldots, 6). \tag{28}$$

Таким образом, дифракционные силы, играющие роль возмущающих сил, полностью определяются через функции излучения φ_m для произвольно заданной системы набегающих волн $(\varphi_0 \exp i\sigma t)$.

Рассмотрим, в частности, дифракцию сферических волн, для которых φ_0 определяется выражением

$$\varphi_0 = \frac{Ae^{-ikr_1}}{4\pi r_1} \quad (r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2). \tag{29}$$

Тогда из общих формул (11) и (28) получаем простые выражения:

$$Y_m = -\rho_0 i\sigma \varphi_m (x_1,\ y_1,\ z_1,\ k)\, Ae^{i\sigma t} \quad (m = 1,\ 2, \ldots, 6). \tag{30}$$

В случае же дифракции плоских волн функция φ_0 имеет вид:

$$\varphi_0 = Be^{-i\mathbf{kr}} \quad (\mathbf{k} = k(\sin\theta_0 \cos\psi_0\, \mathbf{i}_1 + \sin\theta_0 \sin\psi_0\, \mathbf{i}_2 + \cos\theta_0\, \mathbf{i}_3)). \tag{31}$$

Пользуясь этим и формулами (13) и (28), находим

$$Y_m = \rho_0 i\sigma Q_m (k,\ \theta_0 \pm \pi,\ \psi_0)\, Be^{i\sigma t} \quad (m = 1, 2, \ldots, 6). \tag{32}$$

---

* Основные закономерности для коэффициентов μ_{mj} и λ_{mj} и некоторые количественные данные содержатся в работе [1]. Совокупность величин $z_{mj} = -i\sigma\left(\mu_{mj} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{mj}\right)$ образует тензор импеданцев. Однако физический смысл имеют коэффициенты μ_{mj} и λ_{mj} в отдельности.

Таким образом, при дифракции плоских волн дифракционные силы выражаются только через асимптотические характеристики Q_m функций излучения φ_m. Через эти же характеристики определяются коэффициенты демпфирования [1]:

$$\lambda_{jm} = \frac{\rho_0 \sigma k}{16\pi^2} \operatorname{Re}\left[\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} Q_j(k, \theta, \psi)\, \overline{Q_m(k, \theta, \psi)} \sin\theta d\theta\right]. \tag{33}$$

Полученные выше результаты легко обобщить на случай плоской задачи. В самом деле, пусть координатная плоскость yz параллельна контуру C поперечного сечения цилиндрического тела, на которое набегает система волн с потенциалом скоростей следующего вида:

$$\Phi_0(x, y, z, t) = e^{i(\sigma t - k_x x)} \psi_0(y, z). \tag{34}$$

Тогда при наличии колебаний контура C давление может быть представлено в форме

$$p - p_0 = -\rho_0 i\sigma\, [v_2\varphi_2(y, z) + v_3\varphi_3(y, z) + v_4\varphi_4(y, z)]\, e^{i\sigma t} - \\ - \rho_0 i\sigma e^{i(\sigma t - k_x x)} [\psi_0(y, z) + \psi^{(1)}(y, z)], \tag{35}$$

где v_2, v_3 и v_4 — комплексные амплитуды поступательной и угловой скоростей контура C, а функции излучения $\varphi_m(y, z)$ $(m = 2, 3, 4)$ и функция рассеяния $\psi^{(1)}(y, z)$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(n, z), \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\cos(n, z) - z\cos(n, y) \text{ на } C, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z^2} + k^2\varphi_m = 0 \quad (m = 2, 3, 4), \tag{37}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial r} + ik\varphi_m\right) = 0 \qquad (r^2 = y^2 + z^2), \tag{38}$$

$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial\psi_0}{\partial n} \quad \text{на } C, \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2} + k_0^2\psi^{(1)} = 0 \quad (k_0^2 = k^2 - k_x^2), \tag{40}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r} + ik_0\psi^{(1)}\right) = 0. \tag{41}$$

Все функции излучения $\varphi_m(y, z, k)$ определяются общей формулой:

$$\varphi_m(y, z, k) = \frac{i}{4}\int_C \left[H_0^{(2)}(kr_0)\frac{\partial\varphi_m}{\partial n} - \varphi_m\frac{\partial}{\partial n}H_0^{(2)}(kr_0)\right] dl, \\ (r_0^2 = (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2), \tag{42}$$

где $H_0^{(2)}(kr_0)$ — функция Ганкеля 2-го рода.

Из формулы (42) находим асимптотическое выражение:

$$\varphi_m(y, z, k) = \frac{iQ_m^0(k, \theta)}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{iL_m^0(k, \theta)}{2r\,(8\pi kr)^{1/2}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} + 0(r^{-5/2}), \tag{43}$$

где r и θ — полярные координаты, а асимптотические характеристики Q_m^0 L_m^0 определяются соотношениями

$$Q_m^0(k, \theta) = \int_C e^{ik\chi_0}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n} - ik\varphi_m\frac{\partial\chi_0}{\partial n}\right) dl, \tag{44}$$

$$L_m^0(k, \theta) = \int_C e^{ik\chi_0} \left\{ \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \left[\chi_0 - ik(r^2 - \chi_0^2) - \frac{1}{4ik} \right] - \right.$$

$$\left. - \varphi_m \left[ik \frac{\partial \chi_0}{\partial n} \left(\chi_0 - ik(r^2 - \chi_0^2) - \frac{1}{4ik} \right) + \frac{\partial \chi_0}{\partial n} - 2ik \left(r \frac{\partial r}{\partial n} - \chi_0 \frac{\partial \chi_0}{\partial n} \right) \right] \right\} dl, \quad (45)$$

$$\chi_0 = y \cos \vartheta + z \sin \theta \quad r^2 = y^2 + z^2).$$

Аналогичные формулы имеют место для функции рассеяния $\psi^{(1)}(y, z, k_0)$. Подставив выражение (35) в общие формулы (5), получим

$$X_j = -\sum_{m=2}^{4} \left(\mu_{mj} \frac{dV_m}{dt} + \lambda_{mj} V_m \right) \quad (j = 2, 3, 4, V_m = v_m e^{i\sigma t}), \quad (46)$$

$$Y_m = \rho_0 i \sigma e^{i(\sigma t - k_x x)} \int_C (\psi_0 + \psi^{(1)}) \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} dl \quad (m = 2, 3, 4). \quad (47)$$

Здесь X_2, X_3, X_4 и Y_2, Y_3, Y_4 — составляющие главного вектора гидродинамических сил и момента этих сил относительно оси x, обусловленные соответственно колебаниями контура C и дифракцией набегающих волн вокруг цилиндрического тела, причем

$$\mu_{mj}(k) - \frac{i}{\sigma} \lambda_{mj}(k) = -\rho_0 \int_C \varphi_m \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dl. \quad (48)$$

Для дальнейшего рассмотрим деформационные колебания цилиндрического тела, каждое сечение которого колеблется как твердое сечение, но вместе с тем вдоль образующей нормальная составляющая скорости меняется по экспоненциальному или синусоидальному закону, так что потенциал скоростей всего движения жидкости может быть представлен в форме

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i(\sigma t - k_x x)} [u_2 \varphi_2(y, z, k_0) + u_3 \varphi_3(y, z, k_0) + u_4 \varphi_4(y, z, k_0)], \quad (49)$$

где u_2, u_3 и u_4 — комплексные амплитуды поступательной и угловой скоростей контура C.

Гидродинамические силы при этих деформационных колебаниях определяются выражениями, аналогично (46):

$$Z_j = -\sum_{m=2}^{4} \left[\mu_{mj}(k_0) \frac{dU_m}{dt} + \lambda_{mj}(k_0) U_m \right] \times$$

$$\times (j = 2, 3, 4; U_m = u_m e^{i(\sigma t - k_x x)}). \quad (50)$$

Пользуясь правилом перестановки (24) и условием (39), имеем

$$\int_C \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi_m(y, z, k_0)}{\partial n} dl = -\int_C \varphi_m(y, z, k_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} dl. \quad (51)$$

На этом основании выражения (47) для дифракционных сил принимают компактный вид:

$$Y_m = \rho_0 i \sigma e^{i(\sigma t - k_x x)} \int_C \left[\psi_0 \frac{\partial \varphi_m(y, z, k_0)}{\partial n} - \varphi_m(y, z, k_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right] dl \quad (m = 2, 3, 4). \quad (52)$$

При дифракции плоских волн функция ψ_0 имеет вид:

$$\psi_0 = B e^{-ik_0(y \cos \theta_0 + z \sin \theta_0)}. \quad (53)$$

Поэтому из формул (44) и (52) находим

$$Y_m = \rho_0 i\sigma Q_m^0 (k_0,\ \theta_0 \pm \pi) B e^{i(\sigma t - k_x x)} \quad (m = 2,\ 3,\ 4), \tag{54}$$

где $Q_m^0(k_0, \theta)$ — асимптотические характеристики функций излучения $\varphi_m(y, z, k_0)$. Через эти характеристики коэффициенты демпфирования $\lambda_{jm}(k_0)$ выражаются следующим образом [1]:

$$\lambda_{jm}(k_0) = \frac{\rho_0 \sigma}{8\pi} \operatorname{Re}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} Q_j^0(k_0,\ \theta)\, \overline{Q_m^0(k_0,\ \theta)}\, d\theta\right]. \tag{55}$$

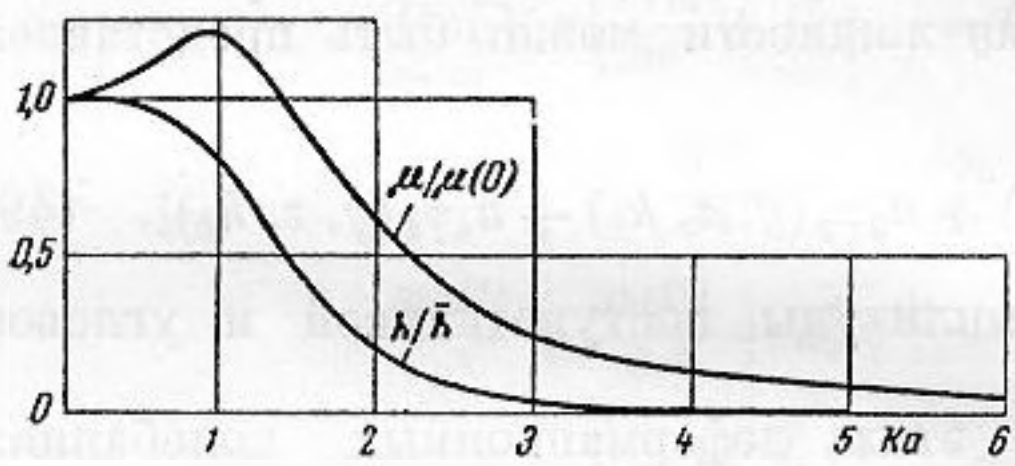
Если же мы имеем дифракцию цилиндрических волн вокруг контура C, то потенциал скоростей Φ_0 определяется в форме

$$\Phi_0 = -\frac{iA}{4} H_0^{(2)}(kr_1)\, e^{i\sigma t} \quad (r_1^2 = (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2). \tag{56}$$

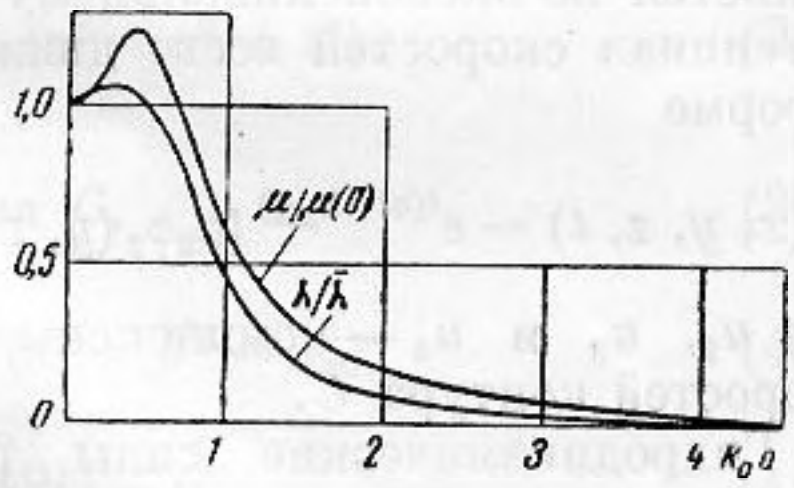
В данном случае $k_x = 0$ и $k = k_0$. Следовательно, из формул (42) и (52) мы получим

$$Y_m = -\rho_0 i\sigma \varphi_m(y_1, z_1, k)\, A e^{i\sigma t} \quad (m = 2,\ 3,\ 4). \tag{57}$$

Отметим, что если цилиндрическое тело движется поступательно вдоль образующей (оси x) со скоростью u, то формулы (46), (50) и (52) остаются без изменения. Осуществив необходимое дифференцирование, можно затем перейти к подвижной координате $x_1 = x - ut$. При этом частота σ в экспоненциально-временном множителе выражений (50) и (52) заменяется на кажущуюся $\sigma_1 = \sigma - k_x u$ (эффект Допплера).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Присоединенная масса и коэффициент демпфирования шара

Фиг. 2. Присоединенная масса и коэффициент демпфирования цилиндра

Рассмотрим некоторые применения полученных результатов. Пусть мы имеем шар радиуса a, тогда $\mathbf{\Phi}_2 = 0$, а для вектор-функции $\mathbf{\Phi}_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ мы имеем

$$\Phi_1 = -\frac{3\left(\mu - \frac{i}{\sigma}\lambda\right) e^{ika}}{4\pi\rho_0 (1 + ika)} \left(\frac{1}{r} + ik\right) \frac{e^{-ikr}}{r}\, \mathbf{l}_r, \tag{58}$$

$$\mathbf{l}_r = \sin\theta\,(\mathbf{i}_1 \cos\psi + \mathbf{i}_2 \sin\psi) + \mathbf{i}_3 \cos\theta,$$

где

$$\mu(k) - \frac{i}{\sigma}\lambda(k) = \frac{4\pi\rho_0}{3} \frac{(1 + ika)\, a^3}{2 - k^2a^2 + 2ika},$$

$$\mu(k) = \mu(0) \frac{4 + 2k^2a^2}{4 + k^4a^4}, \quad \lambda(k) = \frac{2\sigma\mu(0)\, k^3a^3}{4 + k^4a^4}, \quad \mu(0) = \frac{2}{3}\pi\rho_0 a^3. \tag{59}$$

График зависимостей $\mu/\mu(0)$ и $\lambda/\tilde{\lambda}$ $\left(\tilde{\lambda}=\frac{1}{2}\sigma\mu(0)k^3a^3\right)$ от ka представлены на фиг. 1.

Из формулы (58) получаем следующее выражение для асимптотической характеристики $\mathbf{Q}_1(Q_1, Q_2, Q_3)$:

$$\mathbf{Q}_1(k,\ \theta,\ \psi)=\frac{3ik\left(\mu-\frac{i}{\sigma}\lambda\right)e^{ika}}{\rho_0(1+ika)}\mathbf{l}_r. \tag{60}$$

Формулами (26), (28), (30), (32), (58) и (60) определяются гидродинамические силы, действующие на шар при дифракции и излучении акустических волн в жидкостях и газах. В частности, из формул (32) и (60) следует, что при дифракции плоских волн дифракционные силы сводятся к равнодействующей, приложенной к центру шара:

$$\mathbf{F}_{\text{диф}}=\frac{3\left(\mu-\frac{i}{\sigma}\lambda\right)}{1+ika}e^{ika}\frac{d\mathbf{V}_0}{dt},\quad \mathbf{V}_0=-iB\mathbf{k}e^{i\sigma t}. \tag{61}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ — вектор скорости набегающих волн в центре шара.

Аналогичные результаты имеют место для кругового цилиндра радиуса a. В этом случае $\varphi_4=0$, а для вектора $\mathbf{\Phi}_1(0,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ мы получаем выражение:

$$\mathbf{\Phi}_1=-\frac{\mu(k_0)-\frac{i}{\sigma}\lambda(k_0)}{\pi\rho_0 aH_1^{(2)}(k_0a)}H_1^{(2)}(k_0r)\,\mathbf{l}_r,\quad \mathbf{l}_r=\mathbf{i}_2\cos\theta+\mathbf{i}_3\sin\theta, \tag{62}$$

где $H_1^{(2)}(x)=I_1(x)-iN_1(x)$ — функция Ганкеля, а $\mu(k_0)$ и $\lambda(k_0)$ определяются соотношениями:

$$\mu(k_0)-\frac{i}{\sigma}\lambda(k_0)=\mu(0)\frac{H_1^{(2)}(k_0a)}{H_1^{(2)}(k_0a)-k_0aH_0^{(2)}(k_0a)},$$

$$\mu(k_0)=\mu(0)\frac{I_1(I_1-xI_0)+N_1(N_1-xN_0)}{(I_1-xI_0)^2+(N_1-xN_0)^2},\quad \lambda=\frac{2}{\pi}\frac{\sigma\mu(0)}{(I_1-xI_0)+(N_1-xN_0)^2} \tag{63}$$

$$(\mu(0)=\pi\rho_0a^2,\quad x=k_0a).$$

Графики зависимостей $\mu(k_0)/\mu(0)$ и $\lambda(k_0)/\tilde{\lambda}\left(\tilde{\lambda}=\frac{1}{2}\sigma\mu(0)\pi x^2\right)$ от k_0a представлены на фиг. 2.

В соответствии с (62) находим следующее выражение для асимптотической характеристики $\mathbf{Q}_1^0(0,\ Q_2^0,\ Q_0^3)$:

$$\mathbf{Q}_1^0(k_0,\ \theta)=\frac{4\left(\mu(k_0)-\frac{i}{\sigma}\lambda(k_0)\right)}{\pi\rho_0aH_1^{(2)}(k_0a)}\mathbf{l}_r. \tag{64}$$

Поэтому при дифракции плоских волн вокруг кругового цилиндра из формулы (54) мы получаем

$$\mathbf{F}_{\text{диф}}=\frac{2\left(\mu(k_0)-\frac{i}{\sigma}\lambda(k_0)\right)}{\frac{\pi k_0a}{2i}H_1^{(2)}(k_0a)}\frac{d\mathbf{V}_0}{dt},\quad \mathbf{V}_0=-i\mathbf{k}_0Be^{i(\sigma t-k_xx)} \tag{65}$$

$$(\mathbf{k}_0=k_0(\mathbf{i}_2\cos\theta_0+\mathbf{i}_3\sin\theta_0)).$$

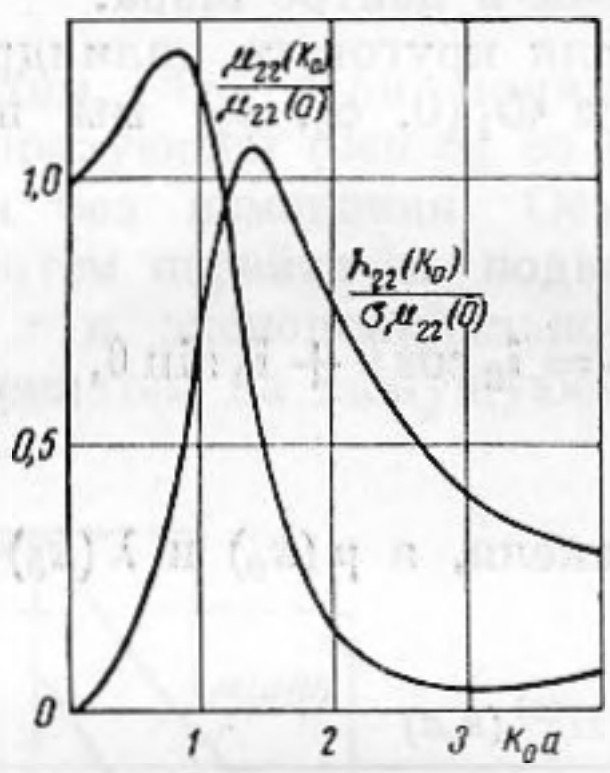
Здесь $\mathbf{V}_0$ — векторная составляющая скорости набегающих волн в точках оси кругового цилиндра, перпендикулярная к этой оси.

При помощи специальных функций можно определить точные решения для функций излучения и их асимптотических характеристик в других случаях. В частности, для плоской пластины ширины $2a$, расположенной вдоль оси y, применение функций Матье приводит к следующим выражениям для обобщенных коэффициентов присоединенных масс и демпфирования [1]:

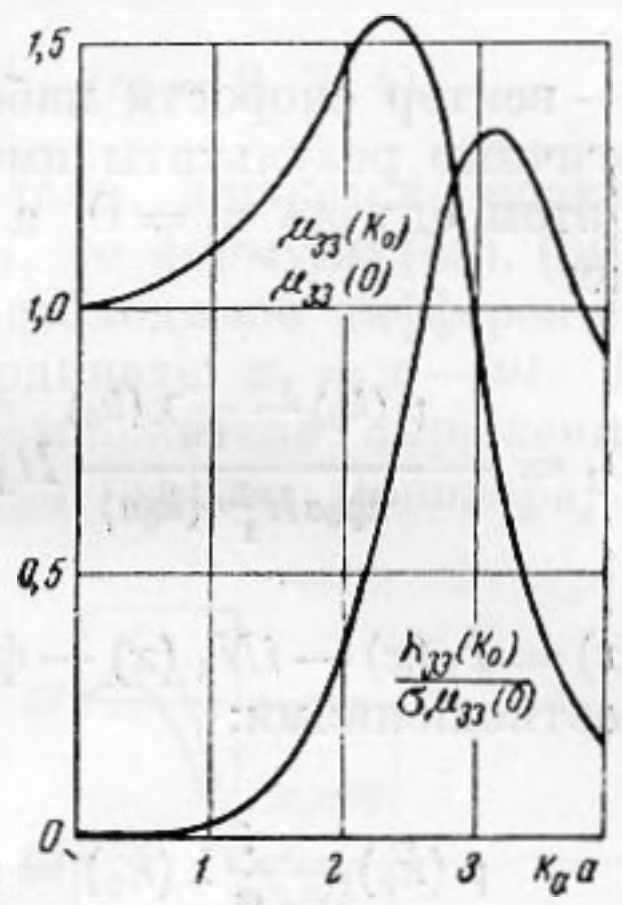
$$\mu_{33}(k_0) - \frac{i}{\sigma}\lambda_{33}(k_0) = -\rho_0\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Se_{2n+1}(0)}{Se'_{2n+1}(0)} B^2_{2n+1,\,1}, \tag{66}$$

$$\mu_{44}(k_0) - \frac{i}{\sigma}\lambda_{44}(k_0) = -\frac{\rho_0\pi a^4}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Se_{2n}(0)}{Se'_{2n}(0)} B^2_{2n,\,2}, \tag{67}$$

где $Se_n(0)$ и $Se'_n(0)$ — значения функций Матье — Ганкеля и их производных, а $B_{2n+1,1}$ и $B_{2n,2}$ — первые коэффициенты в тригонометрических



Фиг. 3. Присоединенная масса и демпфирование при вертикальных вибрациях пластинки



Фиг. 4. Присоединенный момент инерции и демпфирование при вращательных вибрациях пластинки

разложениях функций Матье $se_{2n+1}(\eta)$ и $se_{2n}(\eta)$. Графики зависимостей от $k_0 a$ отношений $\mu_{33}/\mu_{33}(0)$, $\lambda_{33}/\sigma\mu_{33}(0)$, $\mu_{44}/\mu_{44}(0)$, $\lambda_{44}/\sigma\mu_{44}(0)$ ($\mu_{33}(0) = \rho_0\pi a^2$, $\mu_{44}(0) = \rho_0\pi a^4/8$) представлены на фиг. 3 и 4.

Для эллиптического цилиндра и, в частности, для пластины функции излучения φ_2, φ_3 и φ_4 легко определяются при помощи разложений по функциям Матье и тем самым по формулам (52), (54) и (57) можно найти дифракционные силы в различных случаях. При дифракции плоских волн вокруг пластины, в соответствии с формулой (54), будем иметь ($Y_2 = 0$)

$$Y_{3,4} = -\rho_0\sigma k_z \mathrm{B} e^{i(\sigma t - k_x x)} \int_{-a}^{+a} [\varphi^+_{3,4}(y,\ 0,\ k_0) - \varphi^-_{3,4}(y,\ 0,\ k_0)]\, e^{-ik_y y}\, dy$$
$$(k_y = k_0 \cos\theta_0, \quad k_z = k_0 \sin\theta_0), \tag{68}$$

где φ^+_m и φ^-_m — значения функций излучения на верхней и нижней сторонах пластины.

Если волновой вектор $\mathbf{k}$ дифрагирующих плоских волн перпендикулярен к отрезку ширины пластины ($k_y = 0$), тогда из (68) мы получаем простое выражение ($Y_4 = 0$):

$$Y_3 = \mu_{33}(k_0)\frac{dV_{0z}}{dt} + \lambda_{33}(k_0)V_{0z}, \quad V_{0z} = -ik_z Be^{i(\sigma t - k_x x)}. \tag{69}$$

Здесь V_{0z} — составляющая по оси z скорости набегающих волн в точках пластины.

При малых значениях kl и $k_0 l$ можно приближенно вычислить асимптотические характеристики и функции излучения для тел произвольной формы, где l — характерный линейный размер тела. В самом деле, пусть мы имеем симметричное тело относительно координатных плоскостей, тогда из формулы (13) с точностью до членов, содержащих k^2, получаем приближенное выражение для вектора $\mathbf{Q}_1(Q_1, Q_2, Q_3)$:

$$\mathbf{Q}_1(k, \theta, \psi) = ikD\mathbf{l}_r + \frac{ik\mu_{11}(0)}{\rho_0}\mathbf{l}_x + \frac{ik\mu_{22}(0)}{\rho_0}\mathbf{l}_y + \frac{ik\mu_{33}(0)}{\rho_0}\mathbf{l}_z, \tag{70}$$

где D — объем тела, а $\mathbf{l}_x$, $\mathbf{l}_y$ и $\mathbf{l}_z$ — векторные составляющие по осям координат единичного вектора l_r. Аналогичное выражение можно получить для вектора $\mathbf{Q}_2(Q_4, Q_5, Q_6)$.

Из (32) и (70) мы находим приближенное выражение для главного вектора дифракционных сил при дифракции плоских волн вокруг тела произвольной формы:

$$\mathbf{F}_{\text{диф}} = \mu_{11}(0)\frac{d\mathbf{V}_{0x}}{dt} + \mu_{22}(0)\frac{d\mathbf{V}_{0y}}{dt} + \mu_{33}(0)\frac{d\mathbf{V}_{0z}}{dt} + \rho_0 D\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}\,(\mathbf{V}_0 = -iB\mathbf{k}e^{i\sigma t}). \tag{71}$$

Здесь $\mathbf{V}_{0x}$, $\mathbf{V}_{0y}$, $\mathbf{V}_{0z}$ — векторные составляющие по осям координат вектора скорости $\mathbf{V}_0$ набегающих волн в начале координат.

Указанное приближение (малые значения kl) соответствует отождествлению набегающего волнового потока в области расположения тела однородным поступательным потоком со скоростью $\mathbf{V}_0(t)$. Формула (71) представляет собой частный результат для гидродинамической реакции при обтекании тела ускоренным поступательным потоком [2, 3, 4].

В случае шара и цилиндра формула (71) приводит к соотношениям:

$$\mathbf{F}_{\text{ш}} = 3\mu_{\text{ш}}(0)\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}\left(\mu_{\text{ш}}(0) = \frac{1}{2}\rho_0 D_{\text{ш}}\right); \quad \mathbf{F}_{\text{ц}} = 2\mu_{\text{ц}}(0)\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}\,(\mu_{\text{ц}}(0) = \rho_0 D_{\text{ц}}). \tag{72}$$

Оба эти результата непосредственно также вытекают из точных решений (61) и (65). Сопоставление этих точных решений с приближенными выражениями (71) и (72) показывает, что изложенный выше приближенный прием основан на пренебрежении демпфирующими эффектами и на учете инерционных эффектов в первом приближении ($\mu(0)$).

Приближенное вычисление функций излучения и их асимптотических характеристик можно улучшить, исходя из следующих соображений: известно, что значения функций φ_m при $k = 0$ на поверхности трехосного эллипсоида, полуоси которого равны a, b и c, определяются соотношениями [5]:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = -c_1 x, \quad \varphi_2 = -c_2 y, \quad \varphi_3 = -c_3 z, \\ &\varphi_4 = -c_4 yz, \quad \varphi_5 = -c_5 xz, \quad \varphi_6 = -c_6 xy, \end{aligned} \tag{73}$$

где

$$c_i = \frac{\mu_{ii}(0)}{\rho_0 D} \quad (i = 1, 2, 3), \quad c_4 = \frac{\mu_{44}(0)}{\rho_0 I_{xx}}\frac{1 + s_1^2}{1 - s_1^2}, \quad c_5 = \frac{\mu_{55}(0)}{\rho_0 I_{yy}}\frac{s_2^2 + 1}{s_2^2 - 1}, \tag{74}$$

$$c_6 = \frac{\mu_{66}(0)}{\rho_0 I_{zz}}\frac{s_3^2 + 1}{s_3^2 - 1}, \quad s_1 = \frac{c}{b}, \quad s_2 = \frac{c}{a}, \quad s_3 = \frac{a}{b}$$

и I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} — моменты инерции объема эллипсоида относительно осей x, y, z.

Формулы (73) в точности выполняются в точках поверхности эллипсоида при $k = 0$. Для поверхностей, мало отличающихся от эллипсоида, эти формулы дают приближенные значения. Так как нас интересуют не сами значения функций φ_m в точках поверхности S, а интегральный результат, определяемый формулами (11)—(14) и (19), то очевидно, что при малых k местные отклонения значений функций φ_m от выражений (73) не могут заметным образом повлиять на результат интегрирования.

Таким образом, для определения функций излучения φ_m в различных точках и их асимптотических характеристик Q_m и L_m можно пользоваться формулами (73), в которых c_m — величины, относящиеся к заданной поверхности.

Пользуясь этим методом и применяя теорему Остроградского, мы получаем для $\mathbf{Q}_1(Q_1, Q_2, Q_3)$ выражение:

$$\mathbf{Q}_1(k, \theta, \psi) = ik\,[(1 + c_1)\,\mathbf{l}_x + (1 + c_2)\,\mathbf{l}_y + (1 + c_3)\,\mathbf{l}_z] \iiint\limits_D e^{ik\chi}\,d\tau - \\ - k^2 \iiint\limits_D (c_1 x \mathbf{i}_1 + c_2 y \mathbf{i}_2 + c_3 z \mathbf{i}_3)\, e^{ik\chi}\,d\tau. \tag{75}$$

Выражение (75) представляет собой более точную зависимость $\mathbf{Q}_1$ при малых k. Аналогичным путем вычисляются остальные величины, причем в случае плоской задачи значения функций φ_2, φ_3 и φ_4 в точках контура C определяются приближенными соотношениями:

$$\varphi_2 = -c_2' y, \quad \varphi_3 = -c_3' z, \quad \varphi_4 = -c_4' yz, \tag{76}$$

где

$$c_2' = \frac{\mu_{22}(0)}{\rho_0 S_0}, \quad c_3' = \frac{\mu_{33}(0)}{\rho_0 S_0}, \quad c_4' = \frac{\mu_{44}(0)}{\rho_0 i_x}\,\frac{(a/c)^2 + 1}{(a/c)^2 - 1}. \tag{77}$$

Здесь S_0 и i_x — соответственно площадь, ограничиваемая контуром C и момент инерции этой площади относительно оси x; $2a$ и $2c$ — линейные размеры площади S_0, в направлениях осей y и z. Если рассматривается случай дифракции и излучения беспорядочных акустических волн различной частоты, которые можно рассматривать как стационарный случайный процесс, то спектральный анализ стационарных случайных процессов позволяет определить статистические характеристики соответствующих величин [6].

Рассмотрим беспорядочные плоские волны, для которых известна корреляционная функция $R_0(\tau)$ или спектральная плотность $S_0(\sigma)$ скорости V_0 этих волн. Функции $S(\sigma)$ и $R(\tau)$ связаны соотношениям:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma)\cos(\tau\sigma)\,d\sigma, \qquad S(\sigma) = 2\int\limits_0^{\infty} R(\tau)\cos(\tau\sigma)\,d\tau. \tag{78}$$

Спектральная плотность $S_F(\sigma)$ какой-либо случайной функции F, зависящей линейно от V_0, определяется простым выражением

$$S_F(\sigma) = |\Phi_F(\sigma)|^2\, S_0(\sigma), \tag{79}$$

где $\Phi_F(\sigma)$ представляет собой передаточную функцию.

Для многих стационарных случайных процессов корреляционная функция определяется в виде

$$R_0(\tau) = D_0 e^{-\alpha_0|\tau|}\cos\beta_0\tau, \tag{80}$$

где в рассматриваемом случае двумерных волн $D_0 = R_0(0)$ — значение

дисперсии скорости V_0, а α_0 и β_0 — положительные постоянные, зависящие от интенсивности волн.

Из формул (78) и (80) находим выражение для спектральной плотности

$$S_0(\sigma) = D_0\alpha_0\left[\frac{1}{(\sigma+\beta_0)^2+\alpha_0^2} + \frac{1}{(\sigma-\beta_0)^2+\alpha_0^2}\right]. \tag{81}$$

В соответствии с формулами (78) и (79) значение дисперсии $D_F = R_F(0)$ величины F можно найти при помощи соотношения

$$D_F = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_F(\sigma)|^2 S_0(\sigma)\, d\sigma. \tag{82}$$

В частности, при дифракции плоских волн вокруг шара передаточная функция $\Phi_F(\sigma)$ равнодействующей дифракционных сил (импеданц) определяется формулами (59) и (61). Мы имеем:

$$\Phi_F(\sigma) = \frac{6\mu(0)\, i\sigma}{2 - k^2a^2 + 2ika}\, e^{ika} \tag{83}$$

и, пользуясь формулами (81) — (83), получаем

$$D_F = \frac{18}{\pi a^2} c^2\mu^2(0)\, D_0\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\left[\frac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2+\alpha^2}\right] dx$$
$$\left(\alpha = \frac{\alpha_0 a}{c}, \quad \beta = \frac{\beta_0 a}{c}, \quad c = \sqrt{(dp/d\rho_0)}\right). \tag{84}$$

Выполнив в (84) необходимые вычисления, мы приходим к выражениям:

$$D_F = 9\frac{c^2}{a^2}\mu^2(0)\, D_0\{\alpha[f_1(\alpha,\beta) + f_1(\alpha,-\beta)] + f_2(\alpha,\beta)\},$$
$$f_1(\alpha,\beta) = \frac{\beta^2+\alpha^2+2(1+2\beta)}{(\beta^2+\alpha^2+2\beta)^2+4(1+\beta)^2},$$
$$f_2(\alpha,\beta) = 4\frac{(\beta^2-\alpha^2)[4+(\beta^2+\alpha^2)^2]}{16+(\beta^2+\alpha^2)^4+8[(\beta^2-\alpha^2)^2+4\beta^2\alpha^2]}. \tag{85}$$

Аналогичным путем можно определить статистические характеристики в других случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Хаскинд. Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости. ЖЭТФ, 1946, 16, 7, 634—646.
2. G. J. Taylor. The sorces on a body placed in a curved or converging stream of fluid. Proc. Roy. Soc., 1923, 120, 260.
3. Г. Лэмб. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
4. М. Д. Хаскинд. Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости. Прикл. матем. и мех., 1956, 20, 1, 120—123.
5. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидродинамика. М., Гостехиздат, 1948.
6. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. математич. наук, 1952, 7, 5, 3—99.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступила в редакцию
29 декабря 1956 г.