АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 1

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. Л. Полякова, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов

В статье получены упрощенные уравнения газодинамики релаксирующих сред, которые справедливы при условии малых чисел Маха и слабой диссипации энергии в среде. На основе приближенных уравнений исследована структура фронта установившегося течения. Последняя совпадает со структурой фронта ударной волны в среде с внутренними степенями свободы, полученной ранее другими методами.

1. Изучение вопроса о конечных возмущениях в среде с внутренними степенями свободы (в релаксирующей среде) проводилось до настоящего времени в ряде работ. С одной стороны, исходя из соотношений Гюгонио на фронте волны, была получена структура ударной волны в таких средах [1, 2], с другой стороны, на основе метода последовательных приближений [3] был рассмотрен процесс распространения звуковой волны конечной амплитуды. Первый метод применим в той области распространения конечных возмущений, где ударная волна уже сформировалась и не описывает процесса ее образования, тогда как второй метод применим только для звука и справедлив лишь вблизи излучателя или при таких малых числах Рейнольдса, когда нелинейные искажения появляются еще очень слабо.

Интересно, однако, рассмотреть процесс распространения конечных возмущений в релаксирующей среде во всей области для случая больших чисел Рейнольдса. Такое рассмотрение возможно на основе приближенного метода, развитого ранее в работах [4, 5] для обычных диссипативных процессов и использующего факт малости нелинейности среды и диссипации энергии в ней. Однако полученные упрощенные уравнения все же еще слишком сложны, поэтому в настоящей работе они исследованы лишь в частном случае установившегося течения.

2. Наличие релаксационных процессов в среде можно описать при помощи параметра ξ, характеризующего внутреннее состояние вещества. При этом давление p уже не является функцией только плотности ρ и энтропии S, но зависят также и от «внутренней» координаты ξ:

$$p = p(\rho, S, \xi). \tag{1}$$

Полная система уравнений, описывающая движения в релаксирующей среде, состоит из уравнения непрерывности, уравнения движения, уравнения состояния (1) и уравнения реакции

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi - \xi_0}{\tau}, \tag{2}$$

где ξ_0 — равновесное значение параметра ξ, а τ — время релаксации. Ограничиваясь рассмотрением малых отклонений от состояния равновесия, будем считать величины

$$\frac{v}{c}, \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \tag{3}$$

малыми, имеющими порядок малости μ. Здесь c_0 — скорость звука, а ρ_0 — равновесное значение плотности среды.

Ограничимся также рассмотрением таких сред, в которых мала дис-

персия скорости звука, т. е. величина

$$m = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2} \tag{4}$$

является малой величиной порядка μ. В (4) через c_0 обозначена скорость звука при медленных процессах, когда среда все время находится в состоянии равновесия, а c_∞ — скорость звука для процессов столь быстрых, что реакция не успевает произойти

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}, \quad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi. \tag{5}$$

Следует отметить, что малость коэффициента m означает также малость поглощения на длину волны.

Учитывая (3) и (4), соотношение (1) удобно представить в виде разложения по степеням $\rho' = \rho - \rho_0$, $\xi - \xi_0$ и $S - S_0$, где S_0 — энтропия в состоянии покоя. Пренебрегая при этом малыми членами порядка μ^3 и выше, в том числе и малыми членами, обусловленными приращением энтропии, которые принимаются $\sim \mu^3$, имеем

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} (\rho - \rho_0)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} (\xi - \xi_0) \tag{6}$$

или

$$p = p_0 + c_0^2 \rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} \rho'^2 - B\tau \frac{d\xi}{dt}. \tag{7}$$

Отсутствие квадратичного члена по отклонению внутренней координаты от равновесного значения $(\xi - \xi_0)^2$ в соотношениях (6) и (7) связано с тем, что коэффициент $B = (\partial p/\partial \xi)_{\rho_0}$ в соответствии с условием (4) является малой величиной порядка μ. Следует отметить, что в отличие от обычного линейного рассмотрения в (6) и (7) удерживаются малые члены порядка μ^2.

Используя тождество $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi \frac{d\rho}{dt}$, можно исключить ξ из уравнений (2) и (6) и получить следующую взаимосвязь давления и плотности в релаксирующей среде во втором приближении:

$$\frac{dp}{dt} - \left[c_\infty^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} \rho'\right]\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\tau}\left[p - p_0 - c_0^2 \rho' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} \rho'^2\right] = 0. \tag{8}$$

Заметим, что в линейном случае, если предположить периодическую зависимость от времени для всех газодинамических переменных, т. е. считать p и $\rho \sim \exp\{j\omega t\}$, для p получается известная формула [6]:

$$p - p_{\text{равн}} = \frac{\tau \rho_0 (c_0^2 - c_\infty^2)}{1 - j\omega\tau} \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{9}$$

так что при процессах настолько медленных, что $\omega\tau \ll 1$, коэффициент, стоящий перед $\operatorname{div} \mathbf{v}$ дает известное выражение для объемной вязкости:

$$\zeta_0 = \tau \rho_0 (c_\infty^2 - c_0^2) = \tau \rho_0 m c_0^2.$$

Дальнейшее рассмотрение задачи может быть одинаково успешно проведено как в переменных Лангранжа, так и в переменных Эйлера. Рассматривается одномерный случай.

3. Как известно, Лангранжева координата a, являющаяся координатой фиксированной частицы среды в равновесии, связана с координатой фиксированной точки пространства x соотношением $x = a + u(a, t)$, где $u(a, t)$ — смещение этой фиксированной частицы от положения равновесия. Уравнения непрерывности и движения в этих переменных имеют следую-

щий вид:

$$\rho = \rho_0 \frac{\partial a}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial a} = 0. \tag{11}$$

Уравнения (8), (10) и (11) полностью описывают распространение возмущений конечной амплитуды в релаксирующей среде. Можно исключить p из уравнений (8) и (11), а оставшиеся переменные v и ρ выразить через смещение $u(a, t)$ при помощи формул:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial a} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2.$$

Первое из этих выражений является точным, а второе представляет собой разложение по малой величине $\partial u/\partial a \sim \mu$ с точностью до квадратичных членов включительно, взятое из уравнения непрерывности (10).

В результате этих преобразований система уравнений (8), (10) и (11) сводится к одному уравнению для смещения, которое имеет вид:

$$\tau \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \tau c_\infty^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + 2c_0^2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + 2c_0^2 \varepsilon \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right) = 0. \tag{12}$$

В уравнении (12) опущены члены порядка μ^3 и выше. Здесь

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial p^2}\right)_{\xi_0},$$

а в случае адиабатического уравнения состояния $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$.

Рассматривая слабо-нелинейную и слабо-дисперсионную среду, естественно ожидать, что при распространении в ней некоторого конечного возмущения определенной конфигурации будет происходить слабое искажение профиля волны, так что целесообразно перейти к следующей системе координат:

$$z = \mu a, \quad y = t - \frac{a}{c_0}. \tag{13}$$

Факт медленного изменения формы волны при распространении ее в системе отмечен явным введением малого параметра μ в первое из соотношений (13).

Уравнение (12) после преобразования к новым координатам z и y и замены $v = \partial u/\partial y$ с точностью до малых членов 2-го порядка малости включительно имеет вид:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{m\tau}{2c_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \tau \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{14}$$

Это уравнение имеет довольно сложный вид и в общем виде не интегрируется.

4. При рассмотрении задачи в переменных Эйлера можно исключить давление p из уравнений газодинамики, используя соотношение (7), а затем перейти к новой системе координат $z = \mu x$ и $y = t - x/c_0$. Это означает, по существу, что плотность и давление могут быть представлены в виде функции, медленно меняющихся с расстоянием, т. е.

$$v, \rho, p = F\left(\mu x, t - \frac{x}{c_0}\right)$$

С точностью до малых членов 2-го порядка малости включительно уравнения непрерывности и движения имеют вид:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{c_0}\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\left(1 - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

$$\mu \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \frac{\rho_0}{c_0^2}\left(1 - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{c_0}\left[1 - \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{2\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} \frac{\rho'}{\rho_0}\right] \frac{\partial \rho'}{\partial y} = \frac{B\tau}{c_0^3} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) содержат малые члены 1-го и 2-го порядка малости. Если пренебречь членами 2-го порядка малости, то получатся соотношения линейной акустики, связывающие плотность и скорость в волне:

$$\frac{v}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0}, \tag{17}$$

т. е. v и ρ могут быть выражены в виде функций друг от друга, не содержащих явно ни координаты, ни времени.

Естественно ожидать, что при решении задачи во втором приближении в простейшие соотношения (17) войдут дополнительные малые члены 2-го порядка малости. Таковыми могут быть, во-первых, квадратичные члены и, во-вторых, члены, обусловленные наличием внутренних степеней свободы и пропорциональные $\partial\xi/\partial y$ с коэффициентами $\sim\mu$.

Эти рассуждения подтверждаются рассмотрением структуры уравнений (15) и (16), выведенных без каких-либо определенных предположений относительно связей $v = f(\rho)$ и $\rho = \varphi(v)$. При этом v и ρ как характеристики единого волнового процесса должны меняться подобным образом при распространении волн в области $x > 0$, хотя они могут и не иметь геометрически подобного распределения по y. Это означает, что поведение v и ρ' с изменением координаты z должно описываться одинаковыми уравнениями. Вследствие этого простые соотношения (17) во втором приближении должны быть заменены следующими, согласованными между собой с точностью до произвольных, подлежащих еще определению, постоянных коэффициентов b и d, соотношениями:

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c_0} v + \frac{\rho_0}{c_0} bv^2 + \frac{\rho_0}{c_0} d \frac{\partial\xi}{\partial y}, \tag{18}$$

$$v = \frac{c_0}{\rho_0} \rho' - \frac{c_0^2}{\rho_0^2} b\rho'^2 - \frac{c_0}{\rho_0} d \frac{\partial\xi}{\partial y}. \tag{19}$$

При подстановке (18) в (15) и (19) в (16) уравнения (15) и (16) действительно приводятся к одинаковому виду:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{B\tau}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}, \tag{20}$$

причем коэффициенты b и d определяются автоматически и однозначно:

$$b = \frac{2-\varepsilon}{2c_0}, \quad d = -\frac{B\tau}{2c_0^2}.$$

Теперь достаточно ограничиться исследованием одного из преобразованных уравнеий, например, уравнения для скорости v (20) совместно с уравнением реакции (2), записанным в новых координатах $z = \mu x$, $y = t - x/c_0$, в котором сохранены только члены порядка μ и учтено соотношение (5)

$$\tau \frac{d\xi}{dy} + \xi = -\frac{m\rho_0 c_0}{B} v, \tag{21}$$

Таким образом, система уравнений (20), (21) полностью описывает распространение возмущений конечной амплитуды в релаксирующей среде*.

5. При установившемся течении решение не зависит от простиранственной координаты z. Уравнение (26) становится при этом обыкновенным дифференциальным уравнением и может быть проинтегрировано один раз по y. Тогда имеем

$$\varepsilon (v^2 - v_0^2) = \frac{B\tau}{\rho_0 c_0^2} \frac{d\xi}{dy}. \tag{22}$$

Здесь v_0 — константа интегрирования, имеющая смысл абсолютной величины скорости при $z = \pm\infty$ в движущейся системе координат.

---

* Следует отметить, что уравнение (14) может быть сведено к системе (20)—(21) с точностью до произвольной функции от z, если в (14) обозначить

$$\frac{B\tau}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -\frac{m\tau}{2c_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \tau \frac{\partial}{\partial y}\left(z \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

Уравнение (22) вместе с уравнением (21) описывает структуру скачка уплотнения. Исключая из этих уравнений значение внутренней координаты ξ, мы имеем

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\tau} \frac{v_0^2 - v^2}{\frac{mc_0}{2\varepsilon} + v}. \tag{23}$$

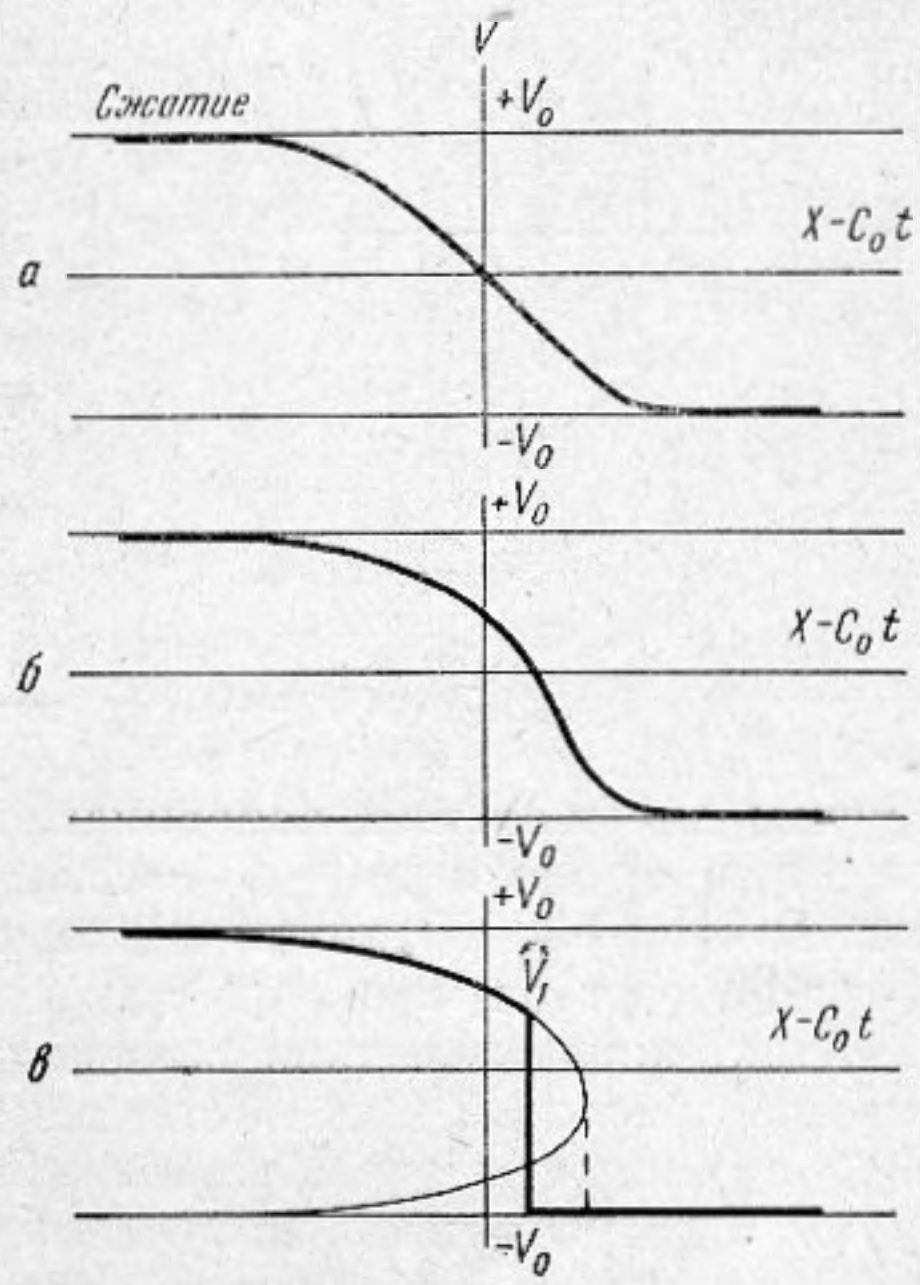
Решение уравнения (23) имеет вид:

$$\frac{y + y_0}{\tau} = \ln \frac{(v_0 + v)^{k-1} v_0^2}{(v_0 - v)^{k+1}}, \tag{24}$$

где y_0 — константа интегрирования, а $k = mc_0/2v_0\varepsilon$.

Форма функции $v(y)$ в соответствии с (24) имеет качественно различный вид для случаев $k > 1$ и $k < 1$. При $k \gg 1$, что соответствует относительно слабым проявлениям нелинейных эффектов, выражение (31) сводится к выражению: $v = v_0 \mathrm{th}\,(y/2k\tau)$, характерному для структуры скачка в обычной вязкой среде (фиг. 1, *а*). Ширина фронта ударной волны при этом равна $(c_\infty^2 - c_0^2)\tau/v_0\varepsilon$ и совпадает с шириной фронта ударной волны, определяемой обычным выражением, но с учетом одной объемной вязкости [6].

При уменьшении k (при $k > 1$) форма скачка уплотнения становится несимметричной относительно среднего уровня (нуль на фиг. 1, *б*), а при $k < 1$ функция $v(y)$ вообще становится неоднозначной (фиг. 1, *в*). Ввиду физической абсурдности такого положения нужно ожидать, что решение приобретает в этом случае разрывный характер.



Фиг. 1

6. Разрывные решения дифференциальных уравнений можно рассматривать как пределы непрерывных решений более точных уравнений высшего порядка при стремлении к нулю значений «паразитных» параметров, являющихся коэффициентами при высших производных. В случае релаксирующей среды, в качестве «паразитного» параметра естественно ввести сдвиговую вязкость. Тогда уравнение, описывающее распределение скоростей в скачке уплотнения примет вид

$$\delta \frac{d^2v}{dy^2} + \left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{\tau}\right) \frac{dv}{dy} + \frac{\varepsilon}{2\tau}(v^2 - v_0^2), \tag{25}$$

где δ — величина пропорциональная коэффициенту сдвиговой вязкости. Легко видеть, что при стремлении δ к нулю уравнение (25) переходит в (23). Наиболее просто проанализировать поведение решения уравнения (25) путем его качественного интегрирования на фазовой плоскости (v, dv/dy) с помощью метода изоклин.

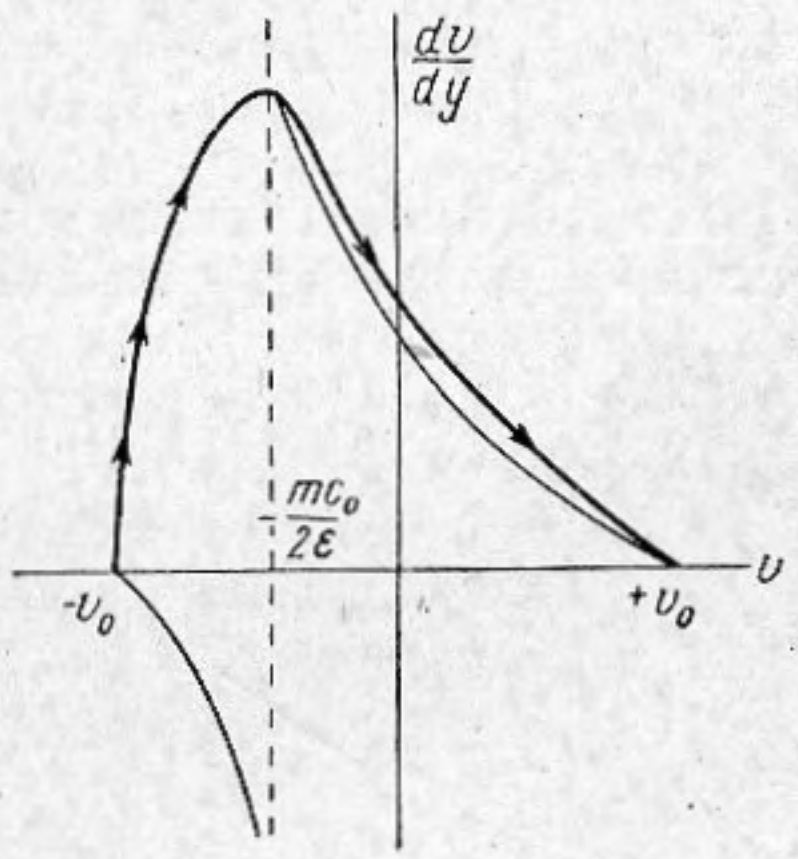
Обозначая через $w = dv/dy$, можно получить уравнение траекторий на фазовой плоскости

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{1}{\delta}\left[\left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{\tau}\right) w + \frac{\varepsilon}{2\tau}(v^2 - v_0^2)\right].$$

На фиг. 2 представлена интегральная кривая, описывающая структуру скачка уплотнения в случае малого значения ρ (жирная кривая), а тонкой линией изображена изоклина горизонтальных касательных.

При больших значениях производной dv/dy уравнение (25) переходит в уравнение: $\delta \frac{d^2v}{dy^2} + \left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon}\right)\frac{dv}{dy} = 0$.

Первый интеграл этого уравнения имеет вид $\frac{dv}{dy} = -\frac{\left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon}\right)^2 - A^2}{2\delta}$ где, $A = -v_0 + mc_0/2\varepsilon$—константа интегрирования. Из этого соотношения видно, что интегральная кривая, описывающая разрывное решение, при $\delta = 0$ должна возвращаться из бесконечности в точку v_1, расположенную симметрично v_0 относительно $v = -mc_0/2\varepsilon$. Это значение v_1 будет значением скорости сразу за точкой разрыва. Оно равно $v_1 = v_0 - mc_0/\varepsilon$.



Фиг. 2

7. Скачок уплотнения, изображенный для различных случаев на фиг. 1, движется без искажений со скоростью c_0. Скорость частиц среды в области разряжения направлена против движения фронта, а в области сжатия — в сторону его движения. Это означает, что скорость D передвижения фронта по отношению к частицам среды перед ним больше c_0. Чтобы ее определить, воспользуемся соотношением [6]:

$$D = c_0 + \varepsilon \frac{v(+0) + v(-0)}{2}, \tag{26}$$

и учтем, что в системе координат, неподвижной относительно частиц среды перед фронтом $v(+0) = 2v_0$, $v(-0) = 0$. Тогда соотношение (26) дает $D = c_0 + \varepsilon v_0$. Заметим также, что $c_\infty = c_0(1 + m/2)$, т. е. случай $k < 1$ соответствуют случаю $D > c_\infty$.

Итак, когда величина скачка уплотнения мала, так что $D < c_\infty$, он имеет сглаженный вид. Когда же величина скачка относительно велика ($D > c_\infty$), скачок приобретает разрывный характер. Это вполне согласуется с результатами, полученными другим путем в работах [1, 2].

Полученные упрощенные уравнения (14) и (20), (21) позволяют рассмотреть задачу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде. Выше была отмечена трудность интегрирования этих уравнений в общем виде. Здесь проведено рассмотрение лишь установившегося течения. Исследование «нестационарных» течений выходит за рамки настоящей работы.

В заключение авторы приносят благодарность А. В. Гапонову за указание на неточность первоначальных рассуждений, относящихся к пункту 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. О распространении ударных волн в газе с обратимыми химическими реакциями. Ж. эксп. и теор. физ., 1946, 16, 4, 365—368.
2. С. П. Дьяков. Ударные волны в релаксирующей среде. Ж. эксп. и теор. физ., 1954, 27, 6, 728—734.
3. А. Л. Полякова. О распространении волны конечной амплитуды в релаксирующей среде. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 356—359.
4. J. S. Mendousse. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitude, J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 1, 51—54.
5. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вест. МГУ, 1961, 3, 52—61.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954.

Акустический институт АН СССР
Москва
Московский государственный университет

Поступила в редакцию
17 мая 1961 г.