

УДК 534.231.1+534—16

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ УПРУГОЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Ю. В. Завадский

Рассмотрена плоская задача о движении упругой слоисто-неоднородной среды, когда вектор смещения гармонически зависит от времени. Плотность среды предполагается постоянной, а параметры Ламе изменяются только в зависимости от одной координаты как непрерывные дифференцируемые функции. Для высоких частот получено асимптотическое представление скалярного и векторного потенциала. Изучены точки поворота и на основе функций Эйри найдены равномерные асимптотические представления потенциалов, справедливые как вдали от точек поворота, так и в их окрестности.

Многие задачи теории упругости не удается рассмотреть в точном виде из-за больших математических и вычислительных трудностей. Поэтому в динамике упругих сред, как и в теории волн вообще, важное значение играют приближенные асимптотические методы, позволяющие получить решение задачи с некоторой ошибкой, достаточно малой в определенной области частот. Для высоких частот эти методы соответствуют геометрическому приближению и в последнее время интенсивно разрабатываются [1, 2, 3, 4]. При этом их развитие не ограничивается чисто геометрическими представлениями о лучах, но идет в направлении оценки волновых свойств как следующего приближения к собственно-лучевой теории. Если при конкретном рассмотрении какой-либо задачи в среде образуются зоны тени, где поле в лучевом приближении отсутствует, то учет последующих приближений позволяет характеризовать поле как в освещенной, так и в теневой областях, а также на границе между ними.

В окрестности такой границы характер поля изменяется от быстроосциллирующего в освещенной области на быстро убывающий в теневой области и асимптотические методы отражают данное обстоятельство. В том случае, когда величины, характеризующие поле, удовлетворяют дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, что является типичным для волновых задач в неоднородных и слоисто-неоднородных средах, асимптотические оценки поля связаны с приближенными решениями дифференциальных уравнений, справедливыми в той или иной области.

Приведем некоторые, используемые в дальнейшем, сведения относительно асимптотических решений уравнения Штурма — Лиувилля нормального вида (без первой производной неизвестной функции [5])

$$\frac{d^2 p}{dz^2} + \omega^2 \chi(z) p = 0 \quad (1)$$

в окрестности точки $\omega = \infty$. Функцию $\chi(z)$ будем считать непрерывной вместе с производными, монотонно возрастающей на интервале $[a, b]$ (конечном или бесконечном) и имеющей однократный ноль в точке $z_0 \in [a, b]$, так что: $\chi(z_0) = 0$; $\chi'(z_0) = \gamma$ ($' = d/dz$; $\gamma > 0$). Если

область D , соответствующую интервалу $[a, b]$, представить в виде суммы трех односвязных областей: $D = D_- + D_\varepsilon + D_+$, расположенных в порядке возрастания z , причем $\chi(z) < -\varepsilon$ при $z \in D_-$, $\chi(z) > \varepsilon$, при $z \in D_+$, $|\chi(z)| < \varepsilon$ при $z \in D_\varepsilon$ (ε — малая положительная величина) и $z_0 \in D_\varepsilon$, то общие решения уравнения (1) в областях D_- , D_+ и D_ε имеют асимптотические представления [6, 7]:

$$p(z) = [-\chi(z)]^{-1/4} \left[A_- e^{-\omega \int_{z_0}^z \sqrt{-\chi(z)} dz} + B_- e^{\omega \int_{z_0}^z \sqrt{-\chi(z)} dz} \right]; \quad z \in D_-;$$

$$p(z) = [\chi(z)]^{-1/4} \left[A_+ e^{i\omega \int_{z_0}^z \sqrt{\chi(z)} dz} + B_+ e^{-i\omega \int_{z_0}^z \sqrt{\chi(z)} dz} \right]; \quad z \in D_+;$$

$$p(z) = A_\varepsilon w(-t) + B_\varepsilon \bar{w}(-t) = \\ = A_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i(2\pi/3)} t^{1/2} H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3} t^{2/3}\right) + B_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-i(2\pi/3)} t^{1/2} H_{1/3}^{(2)}\left(\frac{2}{3} t^{2/3}\right); \quad z \in D_\varepsilon,$$

где $t = \omega^{2/3} \gamma^{1/3} (z - z_0)$, A_- , A_+ , B_+ , A_ε , B_ε — произвольные постоянные, $H_{1/3}^{(1)}(x)$, $H_{1/3}^{(2)}(x)$ — функции Ханкеля первого и второго рода, $w(t)$ — функция Эйри — Фока [8—10] ($\bar{w}(t)$ — комплексно-сопряженная ей), удовлетворяющая уравнению $w''(t) = tw(t)$ и связанная с $H_{1/3}^{(1)}(x)$ формулой

$$w(t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i(2\pi/3)} (-t)^{1/2} H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2}\right]. \quad (3)$$

Вещественная $u(t)$ и мнимая $v(t)$ части функции $w(t)$ ($w = u + iv$) имеют следующие асимптотические выражения [8]:

$$u(t) = t^{-1/4} e^{-2/3 t^{3/2}}; \quad u(-t) = (-t)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]; \\ v(t) = \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-2/3 t^{3/2}}; \quad v(-t) = (-t)^{-1/4} \sin\left[\frac{3}{2} (-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]; \quad (4)$$

справедливые при больших положительных и отрицательных t .

Так как общее решение уравнения (1) должно содержать только две произвольных постоянных, то между величинами A_- , A_+ , B_- , B_+ , A_ε и B_ε существуют зависимости [7], сводящиеся к равенствам:

$$A_+ = A_\varepsilon e^{i(\pi/4)} \omega^{-1/6} \gamma^{1/12}; \quad B_+ = B_\varepsilon e^{-i(\pi/4)} \omega^{-1/6} \gamma^{1/12}.$$

$$A_- = (A_\varepsilon + B_\varepsilon) \omega^{-1/6} \gamma^{1/12}; \quad B_- = \frac{i}{2} (A_\varepsilon - B_\varepsilon) \omega^{-1/6} \gamma^{1/12}.$$

Из этих равенств следует:

$$A_- = (A_+ e^{-i(\pi/4)} + B_+ e^{i(\pi/4)}); \quad B_- = \frac{i}{2} (A_+ e^{-i(\pi/4)} - B_+ e^{i(\pi/4)}). \quad (5)$$

Наконец, вводя функцию $\tau(z)$ [6],

$$\tau(z) = \left[\frac{3}{2} \int_{z_0}^z \sqrt{\chi(z)} dz \right]^{2/3}, \quad z \geq z_0, \quad \tau(z) = - \left[\frac{3}{2} \int_{z_0}^z \sqrt{-\chi(z)} dz \right]^{2/3}, \quad z \leq z_0 \quad (6)$$

можно написать равномерное асимптотическое решение уравнения (1), справедливое всюду в D :

$$P(z) = A [\tau'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau(z)] + B [\tau'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau(z)] \quad (7)$$

и переходящее (это следует из асимптотических формул (4)) в соответственные выражения (2) в областях D_- , D_ε и D_+ . Функция $P(z)$ удовлет-

воряет уравнению

$$\frac{d^2P}{dz^2} + \left[\omega^2 \chi(z) + \frac{1}{2} \{\tau, z\} \right] P = 0, \quad (8)$$

где $\{\tau, z\} = (\tau''' / \tau') - \frac{3}{2} (\tau'' / \tau')^2$ — производная Шварца от $\tau(z)$ по z .

Так как при больших ω уравнение (8) отличается от исходного уравнения (1) сравнительно малым членом, то решение $-P(z)$ незначительно отличается от решения $p(z)$, удовлетворяющего уравнению (1). Поэтому $P(z)$ можно рассматривать как главный член асимптотического разложения $p(z)$. Следуя Дородницину [10], уравнение (8) называют эталонным по отношению к исходному уравнению (1). Точка z_0 , в окрестности которой быстро осциллирующий характер решения в области D_+ изменяется на быстро убывающий (возрастающий) в области D_- , называется точкой поворота, области D_+ и D_- — волновой и неволновой областями.

Рассмотрим теперь в декартовой системе координат x, y, z упругую изотропную неоднородную среду, в которой вектор смещения $U(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению движения [11, 12]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = & (\lambda + \mu) \nabla(\nabla U) + \mu \nabla^2 U + \nabla \lambda (\nabla U) + \\ & + \nabla \mu \times (\nabla \times U) + 2(\nabla \mu \nabla) U \\ & \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Будем считать, что плотность среды ρ является постоянной величиной, а параметры Ламе λ, μ являются непрерывными дифференцируемыми функциями $\lambda(z), \mu(z)$ координаты z . Ограничимся рассмотрением такого движения, когда вектор U расположен в плоскости xz , не зависит от y и зависит от x, t как множитель $\exp[-i\omega(t - vx)]$. Согласно формуле $U = \nabla \varphi + \nabla \times (\psi e_y)$, введем скалярный φ и векторный ψ потенциалы, а также величины S, T , связанные с φ, ψ выражениями:

$$(\lambda + 2\mu) (\varphi'' - \omega^2 v^2 \varphi) = S, \quad \mu (\psi'' - \omega^2 v^2 \psi) = -T, \quad (10)$$

где, как всюду в дальнейшем, штрих обозначает производную по z . В работе [13] показано, что для рассматриваемого случая движения уравнение (9) будет удовлетворяться, если S, T удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$S'' + \omega^2 \chi_1(z) S - \omega q c_t^{-2} T + \frac{q'}{\omega + \omega^{-1} q^2} (T' - i\omega v S + \omega^{-1} q S' + i v q T) = 0, \quad (11)$$

$$T'' + \omega^2 \chi_2(z) T + \omega q c_t^{-2} S - \frac{q'}{\omega + \omega^{-1} q^2} (S' - i\omega v T + \omega^{-1} q T' + i v q S) = 0,$$

где введены обозначения: $\chi_1(z) = c_l^{-2}(z) - v^2$, $\chi_2(z) = c_t^2(z) - v^2$, $c_l = [(\lambda + 2\mu / \rho)]^{1/2}$ — скорость продольных волн, $c_t = (\mu / \rho)^{1/2}$ — скорость поперечных волн, $q = 4i v c_t c_l'$. Целесообразность перехода от потенциалов φ, ψ к величинам S, T обсуждалась в работе [13]. Поэтому не останавливаясь подробно на методической стороне использования величин S, T вместо потенциалов φ, ψ , обратимся непосредственно к интересующим нас свойствам уравнений (11).

Исследуем решения дифференциальных уравнений в асимптотическом приближении, когда ω велико. Следуя методу Лиувилля, сделаем замену:

$$\begin{aligned} S(z) = & C_1 e^{\omega \int \alpha(z) dz} + C_2 a(z) e^{\omega \int \beta(z) dz}, \\ T(z) = & C_2 e^{\omega \int \beta(z) dz} + C_1 b(z) e^{\omega \int \alpha(z) dz}, \end{aligned} \quad (12)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные $\alpha(z), \beta(z), a(z), b(z)$ — неизвестные функции, интеграл в показателе экспоненты — неопределенный. Тогда S и T будут удовлетворять уравнениям (11), если α, β, a, b удовлетворяют следующей системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\alpha^2 &= \chi_1 + \frac{\alpha' - qc_1^{-2}b}{\omega} + \frac{q^2\alpha_1^2 + q^2\chi_1 + q'ab + ivq'}{\omega^2} + \\
 &+ \frac{q^2\alpha' - q^3c_1^{-2}b + q'qivb - qq'a + q'b'}{\omega^3}, \\
 -\beta^2 &= \chi_2 + \frac{\beta' + qc_1^{-2}a}{\omega} + \frac{q^2\beta^2 + q^2\chi_2 - q'\beta a + ivq'}{\omega^2} + \\
 &+ \frac{q^2\beta' + q^3c_1^{-2}a - q'a' - q'q\beta - q'qiva}{\omega^3}, \\
 -a(\beta^2 + \chi_1) &= \frac{2a'\beta + a\beta' - qc_1^{-2}}{\omega} + \frac{a'' + q^2a\beta^2 + q^2a\chi_1 + q'\beta + q'iva}{\omega^2} + \\
 &+ \frac{2a'q^2\beta + q^2a\beta' - q^3c_1^{-2} - q'qa\beta + q'qiv}{\omega^3} + \frac{q^2a'' - qq'a'}{\omega^4}, \quad (13) \\
 -b(\alpha^2 + \chi_2) &= \frac{2b'\alpha + b\alpha' + c_1^{-2}q}{\omega} + \frac{b\alpha^2q^2 + q^2\chi_2b + b'' - q'a + ivq'b}{\omega^2} + \\
 &+ \frac{2b'q^2\alpha + q^2b\alpha' + q^3c_1^{-2} - q'qab - q'qiv}{\omega^3} + \frac{q^2b'' - qq'b'}{\omega^4}.
 \end{aligned}$$

Если ω велико, то, полагая $\alpha(z) = \alpha_0(z) + \alpha_1(z)\omega^{-1} + \dots$, $\beta(z) = \beta_0(z) + \beta_1(z)\omega^{-1} + \dots$, $a(z) = a_0(z) + a_1(z)\omega^{-1} + \dots$, $b(z) = b_0(z) + b_1(z)\omega^{-1} + \dots$, из уравнений (13) находим: $\alpha_0 = \pm i\chi_1^{1/2}$;

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4} \chi_1' / \chi_1; \quad \beta_0 = \pm i\chi_2^{1/2};$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{4} \frac{\chi_2'}{\chi_2}; \quad a_0 = b_0 = 0; \quad a_1 = \frac{\kappa^2 q}{k^2 - \kappa^2}; \quad b_1 = \frac{k^2 q}{k^2 - \kappa^2}, \quad \text{где } k = k(z) =$$

$$= \frac{\omega}{c_1(z)} \text{ — волновое число продольных волн, } \kappa = \kappa(z) = \frac{\omega}{c_1(z)} \text{ — волновое}$$

число поперечных волн. Тогда для S и T получим следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned}
 S &\cong C_1 \chi_1^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + \omega^{-1} \chi_2^{-1/4} C_2 \frac{\kappa^2 q}{k^2 - \kappa^2} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \\
 &+ C_3 \chi_1^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + \omega^{-1} C_4 \frac{\kappa^2 q}{k^2 - \kappa^2} \chi_2^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &\cong C_2 \chi_2^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \omega^{-1} C_1 \frac{k^2 q}{k^2 - \kappa^2} \chi_1^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + C_3 \chi_2^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \\
 &+ \omega^{-1} \chi_1^{-1/4} C_4 \frac{k^2 q}{k^2 - \kappa^2} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $C_1 \dots C_4$ — произвольные постоянные.

Чтобы перейти от величин S, T к потенциалам φ, ψ , необходимо рассматривать равенства (10) как неоднородные линейные уравнения для потенциалов φ, ψ , в правой части которых стоят функции S, T . При этом, как показано в работе [13], общее решение $Ae^{-v\omega z} + Be^{v\omega z}$ ($A, B = \text{const}$) однородного уравнения $d^2y/dz^2 - v^2\omega^2 y = 0$ не должно учитываться, так как оно не влияет на вектор смещения U . Было бы также излишним пользоваться точными формулами работы [13], позволяющими по известным

S, T найти потенциалы φ, ψ , так как сами величины S, T определены с погрешностью $O(\omega^{-2})$. Поэтому, учитывая данные обстоятельства, на основе приближенных выражений (14) для функций S, T , можно получить приближенные выражения для потенциалов φ, ψ , удовлетворяющих равенствам (10) с ошибкой порядка ω^{-2} . Опуская несложные выкладки, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi \cong & C_1 \chi_1^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + \omega^{-1} C_2 \frac{k^2 q}{\kappa^2 - k^2} \chi_2^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \\ & + C_3 \chi_1^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + \omega^{-1} C_4 \frac{k^2 q}{\kappa^2 - k^2} \chi_2^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz}, \\ \psi \cong & C_2 \chi_2^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \omega^{-1} C_1 \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} \chi_1^{-1/4} e^{i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz} + \\ & + C_4 \chi_2^{-1/4} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_2(z)} dz} + \omega^{-1} C_3 \chi_1^{-1/4} \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} e^{-i\omega \int \sqrt{\chi_1(z)} dz}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_1 \dots C_4$ — произвольные постоянные (вообще говоря, отличные от $C_1 \dots C_4$ в формулах (14)).

Пока что не было сделано никаких предположений относительно знаков функций $\chi_1(z), \chi_2(z)$ в рассматриваемой области. Нетрудно показать, что асимптотические выражения (14) и (15) справедливы при любом знаке $\chi_1(z), \chi_2(z)$. Если, например, $\chi_1(z), \chi_2(z)$ больше нуля, то асимптотические решения имеют смысл продольных и поперечных волн, распространяющихся с некоторыми фазовыми скоростями в направлениях $\pm z$. В обратном случае, когда $\chi_1(z)$ или $\chi_2(z)$ меньше нуля, соответственные члены в (14), (15) убывают (или растут) экспоненциально с ростом z . Однако случай $\chi_1(z) \rightarrow 0, \chi_2(z) \rightarrow 0$ (в окрестности точек z_1, z_2), а также $c_l(z) \rightarrow c_l$ (при $z \rightarrow z_3$) не охватывается полученными асимптотическими решениями, так как при этом выражения (14), (15) содержат расходящиеся члены. Относительно равенства скоростей продольных и поперечных волн можно не беспокоиться, поскольку в реальных упругих средах параметры λ, μ всегда положительны и $c_t < c_l$; но точки поворота z_1, z_2 , в которых $\chi_1(z), \chi_2(z)$ обращаются в нуль,

$$\chi_1(z_1) = 0, \quad \chi_1'(z_1) = \gamma_1; \quad \chi_2(z_2) = 0, \quad \chi_2'(z_2) = \gamma_2 \quad (16)$$

и их окрестность нуждаются в более детальном рассмотрении.

Без ограничения общности будем считать, что в некоторой области $z \in D$ функции $\chi_1(z), \chi_2(z)$ монотонно растут от отрицательных значений вблизи левой границы области (считая по направлению оси z) до положительных — вблизи правой границы, обращаются в нуль в точках z_1 и z_2 соответственно равенствам (16), так что $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$. Всюду в D $c_l(z) > c_t(z)$, что дает неравенства $\chi_2(z) > \chi_1(z), z_1 > z_2$. Положим, что $D = D_- + D_{e_2} + D_{\pm} + D_{e_1} + D_+$, причем в D_- функции $\chi_1(z), \chi_2(z)$ одновременно отрицательны, в D_+ — положительны, в $D_{\pm} \chi_2(z) > 0$, но $\chi_1(z) < 0$; D_{e_2}, D_{e_1} есть окрестности точек z_2, z_1 . Асимптотические решения (14), (15) не годятся в этих окрестностях.

Рассмотрим, например, D_{e_2} , где $|\chi_2(z)| < \varepsilon$. Сохраняя в уравнениях (11) члены порядка ω^2, ω и пренебрегая членами $O(1)$, а также ограничившись первым членом тейлоровского разложения функции $\chi_2(z)$ вблизи точки z_2 , имеем

$$T'' + \omega^2 \gamma_2 (z - z_2) T + \omega q c_l^{-2} S = 0; \quad S'' + \omega^2 \chi_1(z) S - \omega q c_t^{-2} T = 0. \quad (17)$$

Тогда выражения

$$S \cong A (-\chi_1)^{-1/4} e^{-\omega \int_{z_1}^z \sqrt{-\chi_1(z)} dz} + B (-\chi_1)^{-1/4} e^{\omega \int_{z_1}^z \sqrt{-\chi_1(z)} dz} + \omega^{-1} \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} P(z, \chi_2),$$

$$T \cong P(z, \chi_2) + \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\chi^2 - k^2} \left[A (-\chi_1)^{-1/4} e^{-\omega \int_{z_1}^z \sqrt{-\chi_1(z)} dz} + \right. \\ \left. + B (-\chi_1)^{-1/4} e^{\omega \int_{z_1}^z \sqrt{\chi_1(z)} dz} \right], \quad (18)$$

где A, B — произвольные постоянные, $P(z, \chi_2)$ — общее решение эталонного уравнения (8), удовлетворяют уравнениям (18) с относительной ошибкой в области D_{ε_2} порядка ω^{-2} . Поэтому выражения (18) можно рассматривать как асимптотическое представление величин S, T в окрестности точки поворота z_2 . Аналогично исследуется окрестность точки z_1 , но на этом не стоит останавливаться, так как из выражения (18) становится ясным, в каком виде необходимо искать равномерное асимптотическое представление для величин S, T и для потенциалов φ, ψ , справедливое всюду в D .

Действительно, рассмотрим выражения:

$$S_a(z) = P(z, \chi_1) + \omega^{-1} \frac{\chi^2 q}{\chi^2 - k^2} P(z, \chi_2); \\ T_a(z) = P(z, \chi_2) + \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\chi^2 - k^2} P(z, \chi_1), \quad (19)$$

где $P(z, \chi_1), P(z, \chi_2)$ — общие асимптотические решения уравнения Штурма — Лиувилля (1) с функцией $\chi(z)$, равной соответственно $\chi_1(z), \chi_2(z)$, либо точные общие решения эталонного уравнения (8). На основании асимптотических формул (4) для функций Эйри, через которые $P(z, \chi)$ выражается в виде равенства (7), нетрудно убедиться, что $S_a(z), T_a(z)$ в областях D_-, D_{\pm}, D_+ дают для S, T асимптотические представления, совпадающие с представлением (14). Отметим также, что если воспользоваться уравнением (8), которому удовлетворяют $P(z, \chi_1), P(z, \chi_2)$, то для $S_a(z), T_a(z)$ получим следующие уравнения:

$$S_a'' + S_a'(2\Omega^{-2}\Omega' - 2\Omega^{-1}\delta_1\delta_2' - 2\delta_1\delta_2\Omega^{-2}\Omega') + \\ + S_a(\Omega^{-2}\Omega'' + R_1\Omega^{-1} - \Omega^{-1}\delta_2''\delta_1 - 2\Omega^{-2}\Omega'\delta_2'\delta_1 - \Omega^{-2}\Omega''\delta_1\delta_2 - \\ - \Omega^{-1}R_1\delta_1\delta_2) + T_a'(-2\delta_1'\Omega^{-1}) + T_a(-\Omega^{-1}\delta_1'' - 2\Omega^{-2}\Omega'\delta_1' - \\ - \Omega^{-1}R_1\delta_1 + \Omega^{-1}\delta_1R_2) = 0, \\ T_a'' + T_a'(-2\Omega^{-2}\Omega' - 2\Omega^{-1}\delta_1\delta_2' - 2\delta_1\delta_2\Omega^{-2}\Omega') + \\ + T_a(\Omega^{-2}\Omega'' + R_2\Omega^{-1} - \Omega^{-1}\delta_2\delta_1'' - 2\Omega^{-2}\Omega'\delta_1'\delta_2 - \\ - \Omega^{-2}\Omega''\delta_1\delta_2 - \Omega^{-1}R_1\delta_1\delta_2) + S_a'(-2\delta_2'\Omega^{-1}) + \\ + S_a(-\Omega^{-1}\delta_2'' - 2\Omega^{-2}\Omega'\delta_2' + \Omega^{-1}\delta_2R_1 - \Omega^{-1}\delta_2R_2) = 0,$$

где

$$\delta_1 = \omega^{-1} \frac{\chi^2 q}{\chi^2 - k^2}, \quad \delta_2 = \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\chi^2 - k^2}, \quad \Omega = 1 - \delta_1\delta_2, \\ R_1 = \omega^2 \chi_1(z) + \frac{1}{2} \{\tau_1(z), z\}. \quad (20)$$

$R_2 = \omega^2 \chi_2(z) + \frac{1}{2} \{\tau_2(z), z\}$. Функции $\tau_1(z), \tau_2(z)$ определяются согласно равенству (6); $\{\tau(z), z\}$ — производная Шварца. Величины S_a, T_a удовлетворяют уравнениям (20), отличающимся от уравнений (11) только малыми членами $O(1)$, в то время как большие (при $\omega \rightarrow \infty$) члены порядка ω и ω^2 в уравнениях (11) и в (20) совпадают.

Поступая так же как при определении потенциалов φ , ψ в виде формул (15), получим для φ , ψ асимптотические выражения:

$$\varphi_a(z) = P(z, \chi_1) + \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\kappa^2 - k^2} P(z, \chi_2), \quad (21)$$

$$\psi_a(z) = P(z, \chi_2) + \omega^{-1} \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} P(z, \chi_1).$$

Система уравнений, которым удовлетворяют $\varphi_a(z)$, $\psi_a(z)$ совпадает с системой (20), но при этом надо положить $\delta_1 = \omega^{-1} [k^2 q / (\kappa^2 - k^2)]$, $\delta_2 = \omega^{-1} [\kappa^2 q / (\kappa^2 - k^2)]$. На основании всего сказанного, уравнения (20) можно назвать эталонными уравнениями при рассмотрении асимптотическими методами исследуемого частного случая волнового движения в упругой слоисто-неоднородной среде.

Рассмотрим подробнее выражения (21) для потенциалов $\varphi_a(z)$, $\psi_a(z)$. Запишем их в развернутом виде через функцию Эйри — Фока:

$$\begin{aligned} \varphi_a(z) = & C_1 [\tau_1'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_1(z)] + C_2 \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\kappa^2 - k^2} [\tau_2'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_2(z)] + \\ & + C_3 [\tau_1'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_1(z)] + C_4 \omega^{-1} \frac{k^2 q}{\kappa^2 - k^2} [\tau_2'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_2(z)], \\ \psi_a(z) = & C_2 [\tau_2'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_2(z)] + \omega^{-1} \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} C_1 [\tau_1'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_1(z)] + \\ & + C_4 [\tau_2'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_2(z)] + \omega^{-1} \frac{\kappa^2 q}{\kappa^2 - k^2} C_3 [\tau_1'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_1(z)], \quad (22) \end{aligned}$$

где $C_1 \dots C_4$ — произвольные постоянные, $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ определяются формулой (6) при замене функции $\chi(z)$ на $\chi_1(z)$ или на $\chi_2(z)$ и при нижнем пределе интегрирования, равным соответственно z_1 и z_2 . В асимптотических выражениях (22) учтены члены порядка ω^{-1} . В этом приближении существенной является связь между потенциалами φ и ψ . В отличие от однородной упругой среды, когда четыре произвольных постоянных (имеется ввиду аналогичный случай движения [14]) попарно входят в выражения для φ и для ψ , в данном случае потенциалы φ , ψ зависят каждый от всех постоянных $C_1 \dots C_4$. На аналогичную структуру выражений для φ и для ψ было указано в работах [15, 16], где исследовались частные случаи упругих слоисто-неоднородных сред. Поскольку волны обоих типов — продольные и поперечные ($U = U_e + U_t$; $U_e = \nabla \varphi$; $U_t = \nabla \times (\psi - e_y)$) — при распространении в упругой слоисто-неоднородной среде испытывают взаимное превращение во всем объеме среды, то оказывается невозможным распространение только продольных ($\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$) или только поперечных ($\varphi \equiv 0$; $\psi \neq 0$) волн. Однако последний вывод относится только к рассматриваемому классу упругих сред, для которых: $\rho = \text{const}$, $\mu \neq \text{const}$; $q \neq 0$.

В работах [12, 16] показано, что в некоторых упругих слоисто-неоднородных средах могут распространяться продольные волны, не возбуждающие поперечных. В других классах сред поперечные волны могут не возбуждать продольных.

Если пренебречь в выражениях (22) членами порядка ω^{-1} , то получим

$$\begin{aligned} \varphi_{aa}(z) = & C_1 [\tau_1'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_1(z)] + C_3 [\tau_1'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_1(z)], \\ \psi_{aa}(z) = & C_2 [\tau_2'(z)]^{-1/2} w[-\omega^{2/3} \tau_2(z)] + C_4 [\tau_2'(z)]^{-1/2} \bar{w}[-\omega^{2/3} \tau_2(z)]. \quad (23) \end{aligned}$$

В этом, более грубом приближении к собственно-лучевой теории, продольные и поперечные волны распространяются независимо.

Наконец, заметим, что если обозначить через C_1^- , C_3^- , C_1^+ , C_3^+ произвольные постоянные в асимптотическом решении (15) для тех областей, где $\chi_1(z)$ отрицательна (C^-) или положительна (C^+), то на основании решения (22) и асимптотических формул (4) для w , \bar{w} мы получим

$$C_1^- = C_1^+ e^{-i(\pi/4)} + C_3^+ e^{i(\pi/4)}; \quad C_3^- = (i/2) (C_1^+ e^{-i(\pi/4)} - C_3^+ e^{i(\pi/4)}). \quad (24)$$

Равенства (24) не отличаются от вышеприведенных формул (5). Аналогичные соотношения справедливы для постоянных C_2^- , C_4^- ($z < z_2$, $\chi_2(z) < 0$) и C_2^+ , C_4^+ ($z > z_2$, $\chi_2(z) > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлении дифракции. Усп. физ. наук, 1959, 69, 2.
2. В. М. Бабич. Геометро-оптические методы в теории нестационарных волн и фундаментальные решения гиперболических уравнений. Автореферат докт. диссертации, 1962.
3. В. М. Бабич, Н. Я. Русакова. О распространении волн Рэля по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, 4, 653—665.
4. А. Г. Аленницын. Волны Рэля в неоднородно упругом полупространстве. Прикл. мех. и мат., 1963, 27, 3, 547—550.
5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ, 1951.
6. А. Эрдейи. Асимптотические разложения, М., ИЛ, 1962.
7. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II, М., 1960.
8. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1946.
9. В. А. Фок. Таблицы функций Эйри, М., Изд-во АН СССР, 1946.
10. А. А. Дородницын. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Усп. мат. наук, 1952, 7, 6.
11. I. Keller, F. Karneil. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media, J. Acoust. Soc. America, 1959, 31, 6.
12. I. F. Hook. Separation of the vector wave-Equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic media, J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, 3.
13. В. Ю. Завадский. Потенциалы смещения упругой слоисто-неоднородной среды. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 289—292.
14. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1955.
15. В. Ю. Завадский. Дисперсия скорости и затухания рэлеевской волны. II. Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. Аннотации докладов АН СССР. Горький, 1962.
16. В. Ю. Завадский. О волновом движении в упругой слоисто-неоднородной среде со степенным законом изменения плотности и параметров Ламе. Акуст. ж., 1964, 10, 1, 119—122.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 мая 1964 г.