

УДК 534.87+519.27

«НОРМИРОВАННЫЕ» СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. Ф. Курьянов

Вводится понятие «нормированного» спектра случайного процесса, при определении которого используются существенно нелинейные операции. Понятие нормированного спектра целесообразно применять при анализе некоторых нестационарных процессов, таких как нестационарный дробовой эффект или реверберация от множества случайно расположенных рассеивателей. Получена формула, являющаяся аналогом теоремы Винера — Хинчина, которая связывает нормированный спектр и коэффициент автокорреляции стационарного случайного процесса. Показано, что если спектр исследуемого сигнала не очень широкополосен, то нормированный спектр близок к спектру мощности по Фурье.

Часто наряду с анализом стационарных случайных процессов необходимо производить частотный анализ таких нестационарных процессов, которые можно назвать «стационаризуемыми». Процесс $z(t)$ будем называть стационаризуемым, если его можно представить в виде

$$z(t) = A(t)x(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — стационарный случайный процесс и $A(t)$ — некоторая неслучайная функция времени, $A(t) > 0$. Иначе говоря, стационаризуемый процесс есть такой нестационарный процесс, дисперсия которого зависит от времени по определенному закону. Типичным примером такого рода является нестационарный дробовой шум, при котором среднее значение тока, протекающего через шумящую лампу, зависит от времени. Если отдельный электрон, попадающий на анод, дает импульс тока $w(\tau)$, то общий ток $I(t)$ выразится в виде суммы $I(t) = \sum w(t - t_i)$, где t_i — момент попадания i -го электрона. Тогда, если n — среднее число электронов, попадающих на анод в единицу времени, и a — случайная амплитуда импульса тока, то дробовой шум распределен по нормальному закону и его функция корреляции равна

$$B(t, \tau) = n\bar{a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t + \tau) dt, \quad (2)$$

где среднее число электронов n может зависеть от времени [1—2]. К тому же классу процессов относится и рассеяние импульсного излучения на множестве рассеивателей (например, отражение от местных предметов в радиолокации и морская реверберация в гидроакустике [3—7]). Здесь роль $w(\tau)$ играет излученный импульс, t_i — момент прихода отражения от i -го рассеивателя, а нестационарность вызвана неравномерностью распределения средней плотности числа рассеивателей в пространстве, а также зависимостью амплитуды отражения от времени t , прошедшего после излучения импульса, вследствие сферического расхождения и аномалии распространения. Для проведения спектрального анализа таких процессов

используют предварительную стационаризацию путем подходящего подбора временной регулировки усиления, компенсирующей зависимость $A(t)$, а затем проводят обычный спектральный анализ полученного стационарного процесса [5]. Однако такой способ стационаризации требует довольно сложных средств и, кроме того, его не всегда возможно осуществить, так как закон $A(t)$ неизвестен, если не произведено предварительное усреднение процесса по ансамблю посылок. Мы будем рассматривать другой способ стационаризации — клипирование процесса — т. е. превращение его в последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой $+1$ или -1 в зависимости от знака процесса. Соответственно этому, будет дано определение нормированного спектра процесса, отличающееся от обычного определения спектра по Фурье. Прежде чем дать это определение, напомним основные положения гармонического анализа случайных процессов.

Если $x(t)$ — стационарный случайный процесс с функцией автокорреляции $B(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, ($R(0) = 1$), то его спектральная плотность мощности $G(\omega)$ определяется следующим образом:

$$G(\omega) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left[\left(\int_0^T x(t) \cos \omega t dt \right)^2 + \left(\int_0^T x(t) \sin \omega t dt \right)^2 \right] \right\} \quad (3)$$

(здесь знак E — математическое ожидание). Спектр $G(\omega)$ связан с $B(\tau)$ формулой Винера — Хинчина

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (4)$$

Для получения спектра мощности либо измеряют $B(\tau)$ и используют соотношение (4), либо измеряют величину

$$S_T(\omega, t) = \frac{1}{\pi T} \left[\left(\int_{t-T}^t x(t) \cos \omega t dt \right)^2 + \left(\int_{t-T}^t x(t) \sin \omega t dt \right)^2 \right], \quad (5)$$

которая называется текущей периодограммой процесса. Сглаженная периодограмма (среднее по времени за интервал $T_0 \gg T$ или по частотам на интервале $\Omega \gg 1/T$) дает состоятельную оценку спектра [8].

Основной операцией, которую нужно выполнить для получения (5), является перемножение функции $x(t)$ на $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ и последующее интегрирование, т. е. нахождение корреляции. Рассмотрим другой способ перемножения величин: «произведение» будем считать равным $+1$, если сомножители имеют одинаковые знаки, и -1 , если знаки разные. Радиотехнически это достигается клипированием сигналов и подачей их на схему совпадений; выполнение такой операции легко также осуществляется на цифровых вычислительных машинах, так как определенное выше «умножение» чисел, представленных в двоичном коде, есть просто сложение по модулю 2. Коррелятор, использующий такой способ умножения, описан в работе [9].

Используем такую модификацию умножения при определении спектра. Тогда аналогом соотношения (3) будет

$$\hat{G}(\omega) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left[\left(\int_0^T \hat{x}(t) \hat{\cos} \omega t dt \right)^2 + \left(\int_0^T \hat{x}(t) \hat{\sin} \omega t dt \right)^2 \right] \right\}, \quad (6)$$

где знак $\hat{}$ над некоторой функцией времени будет означать операцию клипирования, т. е. $\hat{x}(t) = 1$ при $x(t) > 0$ и $\hat{x}(t) = -1$ при $x(t) < 0$. Из определения (6) следует, что для нестационарных процессов вида (1) при получении $\hat{G}(\omega)$ не требуется предварительной стационаризации, так

как $\hat{G}(\omega)$ полностью определяется моментами пересечения нулевой линии процессом $x(t)$ и не зависит от модулирующей функции $A(t)$. По этой причине спектр $\hat{G}(\omega)$ мы будем называть нормированным спектром процесса.

Покажем теперь, что для нормированного спектра, определенного по формуле (6), имеет место соотношение между $\hat{G}(\omega)$ и нормализованной функцией автокорреляции процесса $R(\tau)$, аналогичное формуле (4). Для этого перепишем выражение (6) в следующем виде:

$$\hat{G}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \int_0^T \int_0^T E \{ \hat{x}(t') \hat{x}(t'') \} (\hat{\cos} \omega t' \hat{\cos} \omega t'' + \hat{\sin} \omega t' \hat{\sin} \omega t'') dt' dt''$$

Перейдем к новым координатам $t', \tau = t'' - t'$ и воспользуемся тем, что для стационарного процесса $x(t)$, распределенного по нормальному закону, справедливо соотношение

$$E \{ \hat{x}(t') \hat{x}(t'') \} = \frac{2}{\pi} \arcsin R(\tau).$$

Введем также следующее сокращенное обозначение:

$$f(t', \tau) = \hat{\cos} \omega t' \hat{\cos} \omega t'' + \hat{\sin} \omega t' \hat{\sin} \omega t''.$$

Тогда, после изменения порядка интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \int_0^T \int_0^T \frac{2}{\pi} \arcsin R(\tau) f(t', \tau) dt' dt'' = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2 T} \left[\int_0^T \arcsin R(\tau) d\tau \left(\int_0^{T-\tau} f(t', \tau) dt' + \int_{\tau}^T f(t', -\tau) dt' \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Используем теперь разложение периодической функции $\hat{\cos} \omega t'$ в ряд Фурье

$$\hat{\cos} \omega t' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} e^{ik\omega t'}.$$

Тогда

$$f(t', \tau) = \sum_k \sum_l \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \frac{\sin l\pi/2}{l\pi/2} e^{i\omega l t + i\omega t'(k+l)} (1 + e^{-i\pi(k+l)/2})$$

и проводя интегрирование по t' в выражении (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left(\int_0^{T-\tau} f(t', \tau) dt' + \int_{\tau}^T f(t', -\tau) dt' \right) &= \sum_k \sum_l \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \frac{\sin l\pi/2}{l\pi/2} \times \\ &\times (1 + e^{-i(k+l)\pi/2}) (e^{i\omega k\tau} + e^{i\omega l\tau}) \frac{\sin \omega(k+l)(T-\tau)/2}{\omega(k+l)(T-\tau)/2} e^{i\omega(k+l)(T-\tau)/2}. \end{aligned}$$

В пределе, при $T \rightarrow \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{i\omega(k+l)(T-\tau)/2} \frac{\sin \omega(k+l)(T-\tau)/2}{\omega(k+l)(T-\tau)/2}$ есть либо 1

($k = -l$), либо 0 ($k \neq -l$) для любого τ . При этом двойная сумма сводится к одинарной и мы получаем

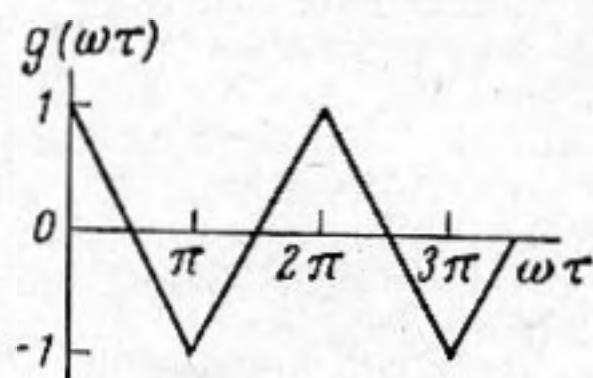
$$\hat{G}(\omega) = \left(\frac{8}{\pi^2} \right)^2 \int_0^{\infty} \arcsin R(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega\tau}{(2k-1)^2}.$$

Заметим, что ряд $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega\tau}{(2k-1)^2}$ является рядом Фурье для функции $g(\omega\tau)$, изображенной на фиг. 1. Таким образом, окончательно получаем

$$\hat{G}(\omega) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} \arcsin R(\tau) g(\omega\tau) d\tau. \quad (8)$$

Формула (8) является аналогом формулы Винера — Хинчина (4) и связывает «нормированный» спектр и коэффициент автокорреляции $R(\tau)$. Поскольку $R(\tau)$ целиком определяется спектром мощности $G(\omega)$, то формула (8) дает неявную связь $\hat{G}(\omega)$ и $G(\omega)$. Эта связь станет более ясной, если воспользоваться разложением функции $\arcsin R(\tau)$ в ряд по степеням $R(\tau)$ и $g(\omega\tau)$ в ряд Фурье:

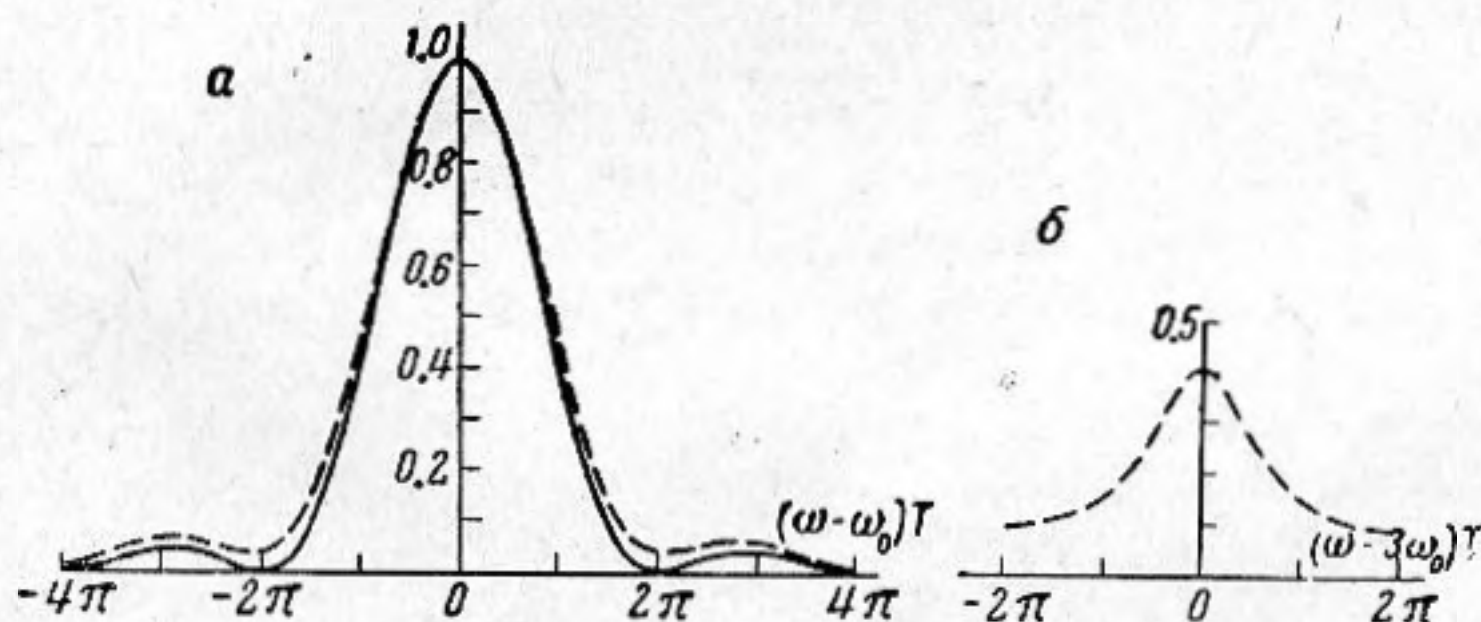
$$\hat{G}(\omega) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \left(\int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau + \frac{1}{6} \int_0^{\infty} R^3(\tau) \cos \omega\tau d\tau + \frac{1}{32} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 3\omega\tau d\tau + \dots \right)$$



Фиг. 1

Первый член этой суммы пропорционален спектру $G(\omega)$, а вклад других членов мал, если процесс узкополосен.

В качестве иллюстрации сравним нормированный спектр реверберации, вызванной рассеянием импульсного сигнала длительностью T с ча-



Фиг. 2

стотой заполнения ω_0 со спектром стационаризованной реверберации. В этом случае, согласно формуле (2), коэффициент автокорреляции равен

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T) \cos \omega_0\tau, & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| > T, \end{cases}$$

а спектральная плотность мощности $G(\omega)$ пропорциональна квадрату спектра излученного импульса [3—6]. Подсчет нормированного спектра $\hat{G}(\omega)$ для случая, когда в посылке уменьшается 10 периодов несущей ($\omega_0 T / 2\pi = 10$), производился по формуле (8) на электронной вычислительной машине. Результаты подсчетов даны на фиг. 2 для нормированного спектра $\hat{G}(\omega)$ (пунктирная линия) и спектра мощности $G(\omega)$ (сплошная линия), приведенных к общему максимуму. Как видно из фиг. 2, а, различие между обеими кривыми весьма невелико.

Заметим, что если спектр процесса $x(t)$ находится вблизи некоторой частоты ω_0 , то около нечетных гармоник ω_0 также будут наблюдаться максимумы, по форме подобные спектру на частоте ω_0 , но постепенно убывающие по величине, что иллюстрирует фиг. 2, б для уже рассмотренного случая нормированного спектра реверберации. Наличие этих максимумов вызвано нелинейностью операций при определении нормированного спектра. Если процесс не очень широкополосен, эти максимумы не перекрываются и по виду нормированного спектра вблизи ω_0 можно непосредственно судить о форме спектра $G(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райс. Теория флюктуационных шумов. Сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех».
2. Лэнинг и Беттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., ИЛ, 1958.
3. Пороговые сигналы. М., Сов. радио, 1952, гл. VI, XI.
4. Griffiths, P. R. *Electronic and radio engineer*, 1958, 35, New series, 29—32.
5. В. В. Ольшевский. Распределение вероятностей уровней морской реверберации. *Акуст. ж.*, 1963, 9, 4, 466—472.
6. В. В. Ольшевский. Корреляционные характеристики морской реверберации. *Акуст. ж.*, 1964, 10, 1, 104—110.
7. Pierre Faure. Theoretical model of reverberation noise. *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 36, 2, 259—266.
8. Э. Хеннан. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1964. ∞
9. С. Г. Гершман, Е. Л. Фейнберг. Об измерении коэффициента корреляции. *Акуст. ж.*, 1955, 1, 4, 326—338.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 июля 1964 г.