

УДК 534—16

## ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ КОРОТКИЙ ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ СТЕРЖЕНЬ

*В. Т. Ляпунов*

Рассматривается задача о прохождении монохроматической изгибной волны из одного полубесконечного стержня в другой через короткий промежуточный стержень. Решение получено с учетом эффектов инерции вращения и сдвига. На примере показано, что учет инерции вращения и сдвига в промежуточном стержне весьма существен в том случае, когда длина промежуточного стержня сравнима с высотой поперечного сечения. Для низких частот, когда можно пренебречь волновыми явлениями в промежуточном стержне, получено более простое решение, рассматривающее промежуточный стержень как твердое тело конечных размеров. В заключение для конкретного варианта модели приводятся результаты расчета и сравнение их с экспериментом.

Изучению колебаний инженерных конструкций с целью изыскания средств снижения шумов и вибраций в последнее время уделяется большое внимание как в отечественной, так и в зарубежной периодической литературе. Одним из перспективных способов ослабления колебаний в конструкциях может быть использование эффектов отражения упругих волн от мест соединения конструктивных элементов. В работе Маслова и Тартаковского [1] рассматривается отражение и прохождение изгибных волн через промежуточный стержень, соединяющий два полубесконечных стержня. При этом для описания изгибных колебаний стержней используется дифференциальное уравнение Бернулли — Эйлера, которое применимо лишь в том случае, когда длина стержня, а также длина волны изгиба в нем велики по сравнению с высотой его поперечного сечения. Однако с целью достижения большой виброизоляции на практике иногда применяются виброизолирующие массы в виде коротких промежуточных стержней с большой высотой поперечного сечения. В этих случаях пренебрежение инерцией вращения поперечных сечений и деформацией сдвига может привести к значительным погрешностям.

Дифференциальное уравнение свободных изгибных колебаний стержня с учетом инерции вращения и сдвига [2] имеет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \left( \frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{E \kappa G} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

где  $E$  — модуль Юнга материала стержня,  $G$  — его модуль сдвига,  $\rho$  — плотность,  $S$  — площадь поперечного сечения стержня,  $EI$  — его изгибная жесткость,  $\kappa GS$  — жесткость на сдвиг. Рассматривая распространение монохроматических изгибных волн  $W = W(x) \exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — угловая частота, и опуская впоследствии временной множитель, получаем уравнение:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k^4 r^2 (1 + q) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k^4 (1 - q k^4 r^4) W = 0, \quad (1)$$

где  $k = \sqrt[4]{\omega^2 \rho S / EI}$  — волновое число изгиба без учета инерции вращения и сдвига,  $r$  — радиус инерции поперечного сечения стержня;  $q = 2(1 + \nu) / \kappa$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\kappa$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольных стержней  $\kappa = 2/3$ , для круглых  $\kappa = 3/4$ ).

Характеристическое уравнение последнего дифференциального уравнения имеет два мнимых корня, соответствующих распространяющимся волнам изгиба, и два вещественных, которым соответствуют экспоненциально затухающие волны так называемого «ближнего» поля.

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$W = C_1 e^{-i\xi x} + C_2 e^{i\xi x} + C_3 e^{-\xi' x} + C_4 e^{\xi' x},$$

где  $C_i$  — постоянные, определяемые из граничных условий,  $\xi = k\sqrt[4]{1 + k^4 r^4 (q - 1)^2 / 4 + k^2 r^2 (q + 1) / 2}$  — волновое число распространяющихся изгибных волн,  $\xi' = k\sqrt[4]{1 + k^4 r^4 (q - 1)^2 / 4 - k^2 r^2 (q + 1) / 2}$  — волновое число волн «ближнего» поля.

Пусть два полубесконечных стержня соединены через некоторый промежуточный стержень длиной  $2l$  так, что нейтральные линии всех трех стержней совпадают, и пусть в первом стержне распространяется монохроматическая волна изгиба с единичной амплитудой. При падении изгибной волны на препятствие (стык) происходит частичное отражение, часть энергии проходит во второй стержень, доходит до следующего стыка, также частично отражается, и часть энергии проходит в третий стержень. Вблизи стыков образуются экспоненциально убывающие волны ближнего поля. Выражения для колебательных смещений поперечных сечений стержней в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= e^{-i\xi_1 x} + R e^{i\xi_1 x} + R' e^{\xi_1' x}, \\ W_2 &= A e^{-i\xi_2 x} + A' e^{-\xi_2' x} + B e^{i\xi_2 (x-2l)} + B e^{\xi_2' (x-2l)}, \\ W_3 &= T e^{-i\xi_3 (x-2l)} + T' e^{-\xi_3' (x-2l)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R, A, B, T$  — коэффициенты отражения и прохождения изгибных волн на стыках,  $R', A', B', T'$  — коэффициенты ближнего поля,  $\xi_i$  и  $\xi_i'$  — волновые числа волн изгиба и волн ближнего поля в  $i$ -м стержне.

Для определения неизвестных коэффициентов составим с учетом инерции вращения и сдвига граничные условия, выражающие непрерывность смещений, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил в местах стыков стержней. При  $x = 0$ :  $W_1 = W_2$ ,  $\Psi_1 = \Psi_2$ ,  $M_1 = M_2$ ,  $Q_1 = Q_2$ . При  $x = 2l$ :  $W_2 = W_3$ ,  $\Psi_2 = \Psi_3$ ,  $M_2 = M_3$ ,  $Q_2 = Q_3$ . Здесь  $\Psi_i$ ,  $M_i$ ,  $Q_i$  — углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы соответственно.

Изгибающие моменты и перерезывающие силы выражаются через смещения и углы поворота поперечных сечений следующим образом:

$$M = -EI \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\kappa GS \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right).$$

Используя уравнения динамического равновесия элемента «балки Тимошенко» [3], колеблющейся с частотой  $\omega$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \omega^2 m W = 0, \quad Q + \frac{\partial M}{\partial x} - \omega^2 m r^2 \Psi = 0,$$

где  $m$  — масса единицы длины стержня, можно получить выражения

углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил через смещения поперечных сечений:

$$\Psi = \left[ \frac{\partial w}{\partial x} (1 + q^2 k^4 r^4) + q r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] (1 - q k^4 r^4)^{-1},$$

$$M = -EI \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + q k^4 r^2 W \right], \quad (3)$$

$$Q = EI \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (1 + q) k^4 r^2 \frac{\partial W}{\partial x} \right] (1 - q k^4 r^4)^{-1}.$$

Раскрывая граничные условия с помощью выражений (2) и (3), получаем систему восьми уравнений для восьми неизвестных коэффициентов  $R, R', A, A', B, B', T, T'$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -\varphi & -\varphi' & 0 & 0 \\ id_1 & d_1' & id_2 & d_2' & -id_2\varphi & -d_2'\varphi' & 0 & 0 \\ -f_1 & f_1' & f_2 & -f_2' & f_2\varphi & -f_2'\varphi' & 0 & 0 \\ -ih_1 & h_1' & -ih_2 & h_2' & ih_2\varphi & -h_1'\varphi' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi & \varphi' & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -id_2\varphi & -d_2'\varphi' & id_2 & d_2' & id_3 & d_3' \\ 0 & 0 & -f_2\varphi & f_2'\varphi' & -f_2 & f_2' & f_3 & -f_3' \\ 0 & 0 & ih_2\varphi & -h_2'\varphi' & -ih_2 & h_2' & -ih_3 & h_3' \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} R \\ R' \\ A \\ A' \\ B \\ B' \\ T \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ id_1 \\ f_1 \\ -ih_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varphi = \exp(-i\xi_2 2l)$ ,  $\varphi' = \exp(-i\xi_2' 2l)$ ,

$$d_i = \xi_i [b_i - q_i (\xi_i r_i)^2] a_i^{-1}, \quad d_i' = \xi_i' [b_i + q_i (\xi_i' r_i)^2] a_i^{-1},$$

$$f_i = E_i I_i [\xi_i^2 - q_i (k_i r_i)^2 k_i^2], \quad f_i' = E_i I_i [\xi_i'^2 + q_i (k_i r_i)^2 k_i^2],$$

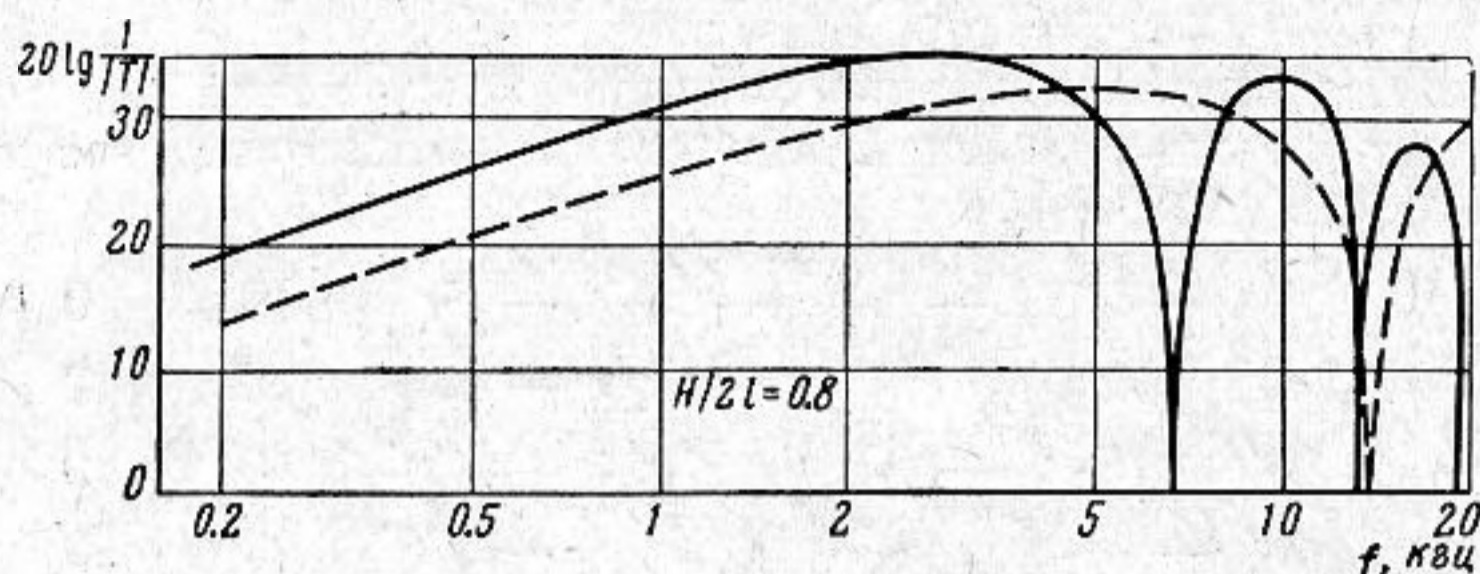
$$h_i = E_i I_i \xi_i [\xi_i^2 - (q_i + 1) k_i^4 r_i^2] a_i^{-1},$$

$$h_i' = E_i I_i \xi_i' [\xi_i'^2 + (q_i + 1) k_i^4 r_i^2] a_i^{-1}, \quad b_i = 1 + q_i^2 (k_i r_i)^4,$$

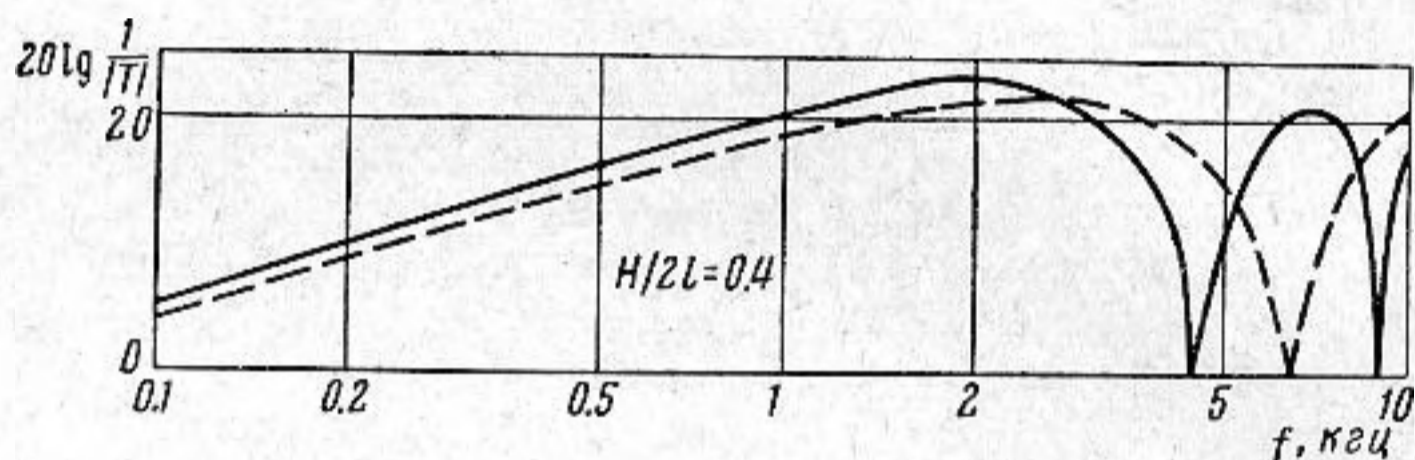
$$a_i = 1 - q_i (k_i r_i)^4.$$

Система уравнений (4) при  $k_i r_i \ll 1$  и  $\xi_2 l > 1$  несколько упрощается и переходит в систему уравнений, полученную Масловым и Тартаковским. Однако, как показывают расчеты, при несоблюдении какого-либо из этих условий упрощение может привести к значительным погрешностям, в связи с чем возникает необходимость решения системы уравнений (4) в неупрощенном виде. Решение этой системы может быть выполнено на цифровых вычислительных машинах. На фиг. 1 и 2 сплошными линиями показаны результаты расчета коэффициента прохождения изгибных волн с помощью системы (4) для двух частных случаев соотношения размеров промежуточного стержня. Крайние стержни в обоих случаях приняты стальными с толщиной 4 мм, промежуточный стержень — железобетонный, длиной 250 мм с высотой поперечного сечения соответственно 200

и 100 мм. Пунктирными линиями показаны результаты решения системы Маслова и Тартаковского для тех же случаев. Расчет показывает, что даже на низких частотах, когда  $k_2 r_2$  заведомо меньше единицы, решение Маслова и Тартаковского дает погрешность, которая становится тем больше, чем больше высота стержня по сравнению с его длиной. Это объясняется тем, что с увеличением соотношения  $H/2l$  инерция вращения поперечных сечений растет и становится сравнимой с инерцией вращения стержня в целом. Решение Маслова и Тартаковского в случае короткого промежуточного стержня дает погрешность также и на высоких частотах в силу



Фиг. 1



Фиг. 2

того, что длина волны изгиба в промежуточном стержне на этих частотах сравнима с высотой его поперечного сечения и, следовательно, необходим учет не только инерции вращения, но и сдвига.

Применение системы уравнений (4) не всегда может оказаться удобным, особенно при предварительном выборе необходимой конструкции промежуточной виброизолирующей вставки. Для низких частот, когда  $k_2 l < \pi/2$ , и волновыми явлениями в промежуточном стержне можно пренебречь, нетрудно получить простое решение, рассматривая промежуточный стержень как твердое тело конечных размеров, обладающее импедансами по отношению к силе и моменту соответственно  $Z_F = i\omega M$  и  $Z_M = i\omega M r^2$ , где  $M$  — масса промежуточного стержня,  $r$  — его радиус инерции.

Граничные условия в этом случае имеют вид

$$W_3|_{x=2l} = W_1|_{x=0} + 2l\Psi_1|_{x=0},$$

$$\Psi_3|_{x=2l} = \Psi_1|_{x=0},$$

$$M_3|_{x=2l} = M_1|_{x=0} - l(Q_3|_{x=2l} + Q_1|_{x=0}) - Z_M \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \Big|_{x=0},$$

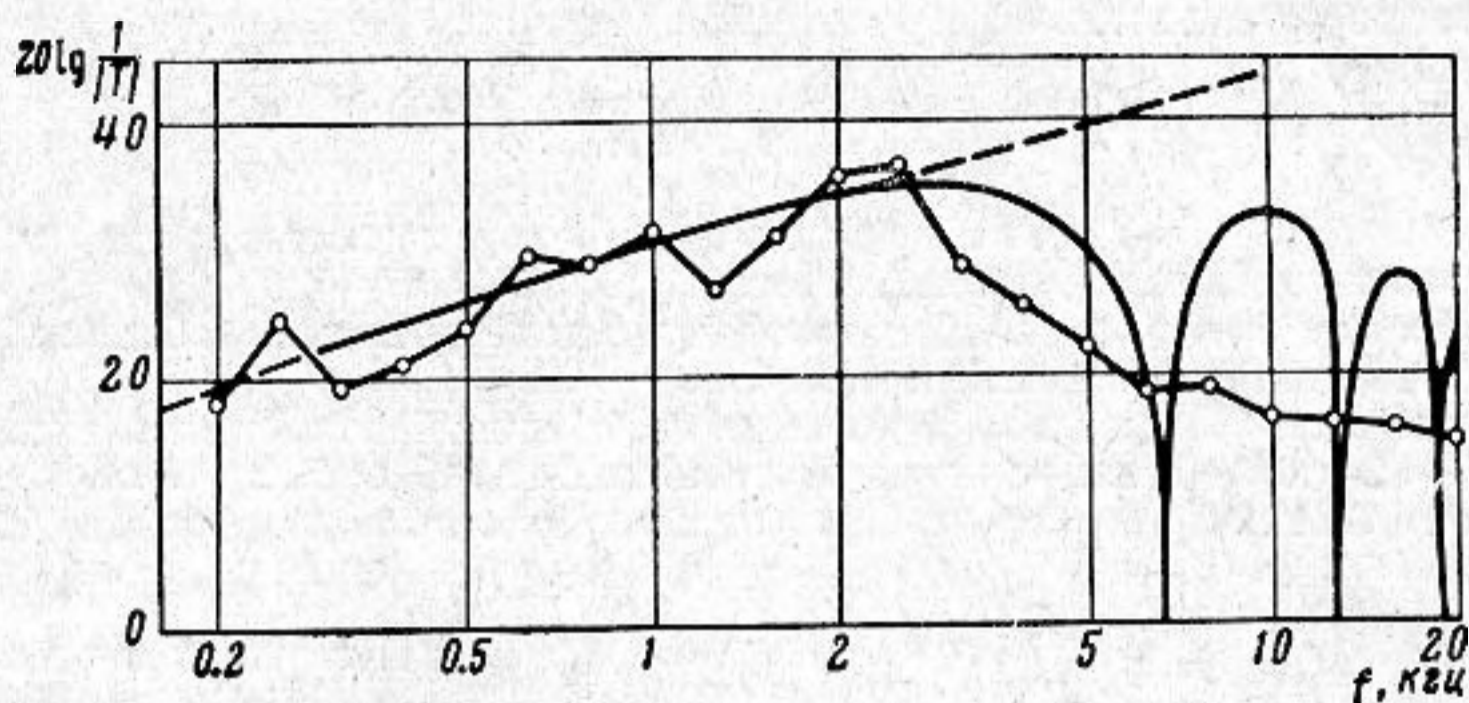
$$Q_3|_{x=2l} = Q_1|_{x=0} - \frac{1}{2} Z_F \frac{\partial (W_1 + W_3)}{\partial t}.$$

Ограничиваясь рассмотрением случая одинаковых крайних стержней, составляем систему четырех уравнений относительно четырех неизвест-

ных коэффициентов  $R, R', T, T'$ :

$$\begin{aligned} iT + T' + iR + R' &= i, \\ T(1 + 2i\gamma) + T'(1 + 2\gamma) - R - R' &= 1, \\ T(1 + i\beta + i\gamma) + T'(\beta - \gamma - 1) - R(1 + i\gamma) + R'(1 + \gamma) &= 1 - i\gamma, \\ T(i - \alpha) - T'(1 + \alpha) + R(i - \alpha) - R'(1 + \alpha) &= i + \alpha, \end{aligned}$$

где  $\alpha = -i\omega Z_F / k^3 EI$ ;  $\beta = -i\omega Z_M / kEI$ ;  $\gamma = kl$ . Решение этой системы дает следующие выражения для коэффициентов прохождения и отраже-



Фиг. 3

ния изгибных волн твердым телом, крепление которого к вибропроводу распределено на длине  $2l$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{16(1 + \gamma) - 4\beta + 4\alpha(1 + \gamma)^2}{[4(1 + i\gamma)(1 + \gamma) - \beta(1 - i)][4 + \alpha(1 + i)]}, \\ R &= i \frac{16\gamma(1 + \gamma) + 4\beta - 4\alpha(1 - \gamma)^2 + 4\alpha\beta}{[4(1 + i\gamma)(1 + \gamma) - \beta(1 - i)][4 + \alpha(1 + i)]}. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае, когда  $\alpha, \beta \gg \gamma, 1$ , можно приближенно написать

$$T = \frac{2}{k\mu} \left[ 1 - \left( \frac{1 + kl}{kr} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где  $\mu = M / m$  — отношение общей массы препятствия к массе единицы длины вибропровода.

Формулы (5) и (6) позволяют проанализировать влияние размеров крепления препятствия на виброизолирующий эффект. В частности, из формулы (6) мы получаем условие полной изоляции  $kr = 1 + kl$ , или  $\lambda = 2\pi(r - l)$ , где  $\lambda$  — длина волны изгиба в вибропроводе. При  $l \rightarrow 0$  последнее выражение для длины задержанной волны изгиба совпадает с известной формулой  $\lambda = 2\pi r$ , приведенной в работе [4]. С увеличением длины  $2l$ , на которой препятствие крепится к вибропроводу, частота полной виброизоляции растет, и при  $l > r$  условие «полной виброизоляции» не может быть удовлетворено.

Для экспериментальной проверки полученных соотношений была изготовлена модель, представлявшая собой две стальных полосы толщиной 4 мм, соединенные через железобетонную вставку длиной 250 и высотой 200 мм; с целью приварки арматуры торцы вставки были выполнены из стальных пластинок; концы стальных стержней были задемпфированы. Вибрации до и после препятствия измерялись с помощью акселерометров и третьоктавного анализатора. Для возбуждения колебаний использовался молоточковый вибратор.

На фиг. 3 кружками показаны результаты измерений прохождения волн изгиба на модели, сплошной линией — результаты расчета с помощью системы (4), пунктирной — по формуле (6). На частотах ниже 2,5 кГц, как и предполагалось, результаты обоих расчетов совпадают и дают хорошее соответствие с экспериментом. На более высоких частотах, вследствие сравнительно широкой полосы пропускания анализатора при эксперименте, измеренные величины представляют собою усредненный результат, показывающий снижение виброизоляции, связанное с появлением частот полного прохождения изгибных волн через промежуточный стержень. В целом соответствие расчета с экспериментом следует признать удовлетворительным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский. Переход изгибных волн через произвольный промежуточный стержень. Акуст. ж., 1961, 7, 1, 67—72.
2. Я. С. Уфлянд. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. Прикл. мат. и мех., 1948, 12, 3, 287—300.
3. Крандолл, Асим Йилдиз. Случайные колебания балок. Прикл. мех., 1962, 29, «Е», 2, 55—65 (пер. с англ. из журн. Trans. ASME, 1962, 29, E, 2, 55—65).
4. L. Cremer. Calculations of sound propagation in structures. Acustica, 1953, 3, 5, 317—335.

Ленинград

Поступила в редакцию  
13 марта 1964 г.