

УДК 534.26+534.232

## ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ С ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОБЪЕМНОЙ СКОРОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОГО В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

*М. П. Сахарова*

Рассматривается задача о поле направленного излучателя, расположенного в клиновидной области с идеальными гранями. Найдено точное выражение для поля и выведено его асимптотическое представление в виде произведения сомножителя, отвечающего сферической волне и функции, определяющей характеристику направленности.

Показано, что для некоторых частных случаев пространственного распределения источников объемной скорости характеристика направленности может быть представлена в виде произведения характеристик направленности распределенного источника в свободном пространстве и сферического источника нулевого порядка в клиновидной области.

Ранее [1] было получено асимптотическое представление поля точечного источника нулевого порядка, помещенного в клиновидную область, и было показано, что на больших расстояниях от ребра клина оно имеет вид  $\frac{e^{ikR}}{R} \psi(\theta, \varphi)$ , где  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  — расстояние от начала координат до точки наблюдения,  $\varphi$  — полярная координата точки наблюдения и  $r = R \cos \theta$ ,  $z = R \sin \theta$  (см. фиг. 1).

Представляется интересным отыскать асимптотическое представление для звукового поля распределенного источника с заданным распределением объемной скорости, помещенного в клиновидную область с идеально жесткими или идеально мягкими гранями.

Найдем сперва точное решение задачи о поле распределенного источника в клиновидной области. Пусть в клиновидной области  $T$ , определяемой в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  неравенствами  $0 < \varphi < \Phi$ ,  $0 < r < \infty$ ,  $|z| < \infty$  (см. фиг. 1), требуется найти непрерывную в замкнутой области  $T^*$  функцию  $P(r, \varphi, z; k)$  (при фиксированном  $k$  для  $\text{Im } k \geq 0$ ), удовлетворяющую следующим условиям:

1) для точки  $(r, \varphi, z) \in T$  функция  $P(r, \varphi, z; k)$  удовлетворяет уравнению  $(\Delta + k^2)P = -4\pi f(r, \varphi, z)$ , где  $f(r, \varphi, z)$  некоторая интегрируемая функция, отличная от нуля лишь в некоторой подобласти  $D$  области  $T$ ;

2) на каждой грани функция  $P(r, \varphi, z; k)$  удовлетворяет условиям Дирихле или Неймана, а именно:

а)  $P = 0$  при  $\varphi = 0, \Phi$ ;

б)  $\partial P / \partial n = 0$  при  $\varphi = 0, \Phi$ ;

в)  $\partial P / \partial n = 0$  при  $\varphi = 0, P = 0$  при  $\varphi = \Phi$ ;

3)  $P(r, \varphi, z; k)$  удовлетворяет принципу погашаемости, т. е. является аналитической функцией параметра  $k$  в области  $\text{Im } k > 0$ , непрерывной

\* К границе области  $T$ , которую мы обозначаем через  $S$ , мы относим грани  $\Gamma$ , определяемые неравенствами  $0 < r < \infty$ ,  $|z| < \infty$ ,  $\varphi = 0, \Phi$ , а также точку  $r = 0$  (ребро клина) и бесконечно удаленную точку.

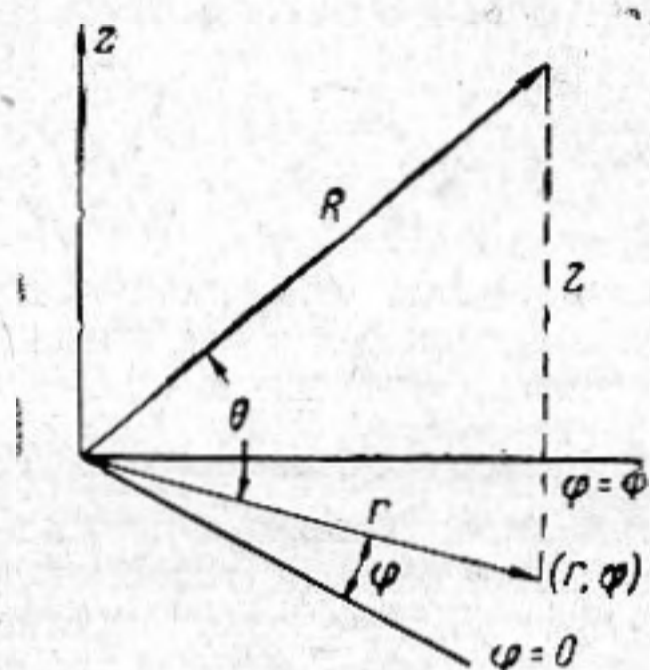
по  $k$  функцией при  $\text{Im } k \geq 0$  в области  $T - D$  и ограниченной для любого комплексного  $k$  в области  $\text{Im } k > 0$ .

Поставленная задача имеет единственное решение [2], которое можно написать в виде [3, 4]

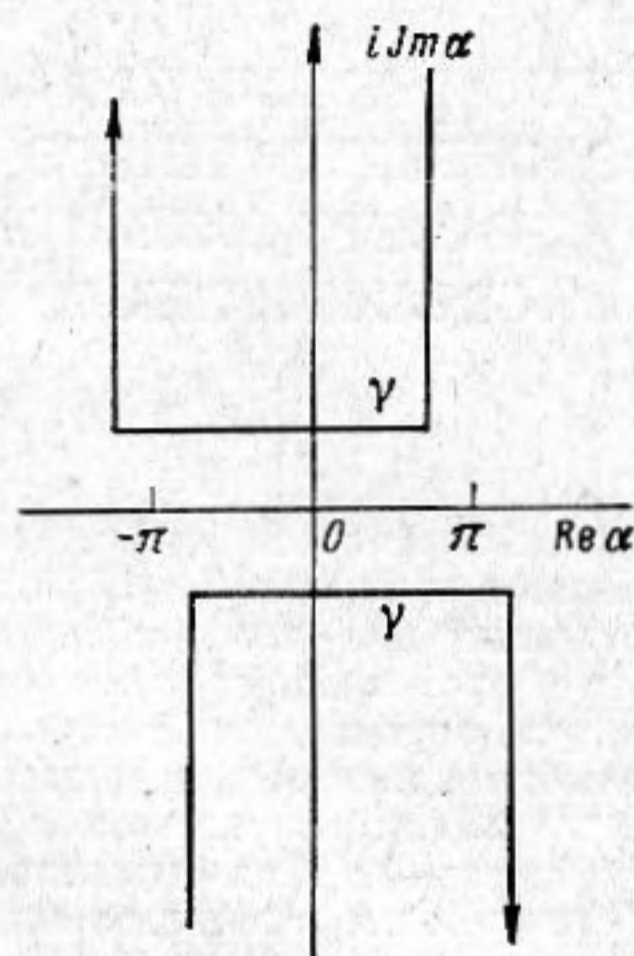
$$P(r, \varphi, z; k) = \int_D G(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta) f(\rho, \psi, \zeta) \rho d\rho d\psi d\zeta, \quad (1)$$

где  $G$  — функция Грина, представляющая поле точечного источника в заданной клиновидной области с идеальными гранями. Она может быть выражена интегралом Зоммерфельда [5, 6]:

$$G(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{\gamma} \frac{e^{ikR(\alpha)}}{L(\alpha)} S(\alpha + \varphi) d\alpha. \quad (2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Контур  $\gamma$  показан на фиг. 2.  $R(\alpha) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha + (z - \zeta)^2}$ ,  $\rho, \psi, \zeta$  — координаты точки области  $D$ . Функция  $S$  имеет вид  $S(\alpha + \varphi) = \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \psi) - \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi + \psi)$  при условии  $G = 0$  на гранях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \Phi$ . При условии  $\partial G / \partial r = 0$  на гранях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \Phi$  функция  $S$  принимает вид  $S(\alpha + \varphi) = \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \psi) + \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi + \psi)$ . Наконец, при условии  $\partial G / \partial r = 0$  на грани  $\varphi = 0$  и  $G = 0$  на грани  $\varphi = \Phi$  мы имеем  $S(\alpha + \varphi) = \frac{1}{2} \left[ \text{ctg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha - \psi + \varphi) - \text{ctg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha - 2\Phi + \psi + \varphi) + \text{ctg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \psi + \varphi) - \text{ctg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha - 2\Phi - \psi + \varphi) \right]$ .

Для функции  $G$  (2) можно написать следующее асимптотическое представление [1], справедливое при условиях

$$kR \left( \frac{\zeta}{R} \right)^2 \rightarrow 0, \quad kR \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$G \sim \frac{e^{ikR}}{R} \Psi, \quad (4)$$

где функция  $\Psi = F(\rho, \psi; \theta, \varphi) e^{-ik \sin \theta \zeta}$  является характеристикой направленности точечного источника в клине \* и

\* Подчеркнем, что здесь и в дальнейшем характеристикой направленности мы будем называть множитель, зависящий от угловых координат, стоящий при функции  $e^{ikR} / R$ , где  $R$  — расстояние от начала координат до точки наблюдения. При соблюдении условий (3) это определение совпадает с обычным определением характеристики направленности в соответствующей угловой области.

$$F(\rho, \psi; \theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} J_{\pi m/\Phi}(k\rho \cos \theta) \times \\ \times \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \psi) - \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \psi) \right] \text{ для } G = 0 \text{ при } \varphi = 0, \Phi. \quad (5a)$$

$$F(\rho, \psi; \theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\Phi} J_0(k\rho \cos \theta) + \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} J_{\pi m/\Phi}(k\rho \cos \theta) \times \\ \times \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \psi) + \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \psi) \right] \text{ для } \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \text{ при } \varphi = 0, \Phi. \quad (5б)$$

$$F(\rho, \psi; \theta, \varphi) = \frac{\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\pi^2 m/4\Phi)} J_{\pi m/2\Phi}(k\rho \cos \theta) \times \\ \times \left[ \cos \frac{\pi m}{2\Phi} (\varphi - \psi) - \cos \frac{\pi m}{2\Phi} (\varphi - 2\Phi + \psi) + \cos \frac{\pi m}{2\Phi} (\varphi + \psi) - \right. \\ \left. - \cos \frac{\pi m}{2\Phi} (\varphi - 2\Phi - \psi) \right] \text{ для } \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \text{ при } \varphi = 0 \\ G = 0 \text{ при } \varphi = \Phi. \quad (5в)$$

Покажем теперь, что для функции  $P(r, \varphi, z; k)$  (4), представляющей в клиновидной области поле излучателя с заданной функцией распределения источников  $f(r, \varphi, z)$  в области  $D$ , имеет место следующее асимптотическое представление:

$$P(r, \varphi, z; k) \sim \frac{e^{ikR}}{R} \Phi(\theta, \varphi), \quad (6a)$$

где множитель

$$\Phi(\theta, \varphi) = \int_D F(\rho, \psi; \theta, \varphi) e^{-ik \sin \theta \zeta} f(\rho, \psi, \zeta) \rho d\rho d\psi d\zeta \quad (6б)$$

определяет характеристику направленности источника. Действительно, заменим в формуле (1) функцию  $G$  ее асимптотическим представлением (4); тогда получится написанное выше асимптотическое представление (6a) с точностью до членов порядка (3).

Покажем также, что поле излучателя с той же функцией распределения  $f(r, \varphi, z)$  в свободном пространстве можно представить на больших расстояниях, с точностью до членов порядка (3), в виде

$$P_0(r, \varphi, z; k) \sim \frac{e^{ikR}}{R} \Phi_0(\theta, \varphi), \quad (7a)$$

где

$$\Phi_0(\theta, \varphi) = \int_D e^{-ik\rho \cos \theta \cos(\varphi - \psi) - ik\zeta \sin \theta} f(\rho, \psi, \zeta) \rho d\rho d\psi d\zeta. \quad (7б)$$

Функция Грина  $G_0$  источника в свободном пространстве равна  $e^{ikR(\varphi - \psi)} / R(\varphi - \psi)$ ,  $R(\varphi - \psi) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + (z - \zeta)^2}$ ; с точностью до членов порядка (3) ее можно представить в виде

$$G_0 \sim \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik\rho \cos \theta \cos(\varphi - \psi) - ik\zeta \sin \theta}.$$

Подставив это выражение в формулу

$$P_0(r, \varphi, z; k) = \int_D G_0(r, \varphi, z; \rho, \psi, \zeta) f(\rho, \psi, \zeta) \rho d\rho d\psi d\zeta,$$

аналогичную формуле (1), приходим к асимптотическому представлению поля распределенного источника в свободном пространстве (7а).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи распределения объемной скорости в заданной области  $D$ , определяемой неравенствами:

$$D \left\{ \begin{array}{l} \rho_\mu \leq \rho \leq \rho_M, \\ \psi_\mu \leq \psi \leq \psi_M, \\ \zeta_\mu \leq \zeta \leq \zeta_M. \end{array} \right\}$$

Положим, что функция  $f(\rho, \psi, \zeta)$  может быть представлена в виде произведения  $f(\rho, \psi, \zeta) = f_1(\rho) f_2(\psi) f_3(\zeta)$ . Тогда функцию  $\Phi(\theta, \varphi)$  (6) можно написать в виде

$$\Phi(\theta, \varphi) = \int_{\rho_\mu}^{\rho_M} \int_{\psi_\mu}^{\psi_M} F(\rho, \psi; \theta, \varphi) f_1(\rho) f_2(\psi) \rho d\rho d\psi \int_{\zeta_\mu}^{\zeta_M} e^{-ik\zeta \sin \theta} f_3(\zeta) d\zeta, \quad (8)$$

а функцию  $\Phi_0(\theta, \varphi)$  в виде

$$\Phi_0(\theta, \varphi) = \int_{\rho_\mu}^{\rho_M} \int_{\psi_\mu}^{\psi_M} e^{-ik\rho \cos \theta \cos(\varphi-\psi)} f_1(\rho) f_2(\psi) \rho d\rho d\psi \int_{\zeta_\mu}^{\zeta_M} e^{-ik\zeta \sin \theta} f_3(\zeta) d\zeta. \quad (9)$$

Если область  $D$  одномерна и представляет собой отрезок ( $\rho = \rho_0$ ,  $\psi = \psi_0$ ,  $\zeta_\mu \leq \zeta \leq \zeta_M$ ), расположенный вдоль оси  $z$  с заданным распределением  $f_3(z)$ , то

$$\Phi(\theta, \varphi) = F(\rho_0, \psi_0; \theta, \varphi) \int_{\zeta_\mu}^{\zeta_M} e^{-ik\zeta \sin \theta} f_3(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

и

$$\Phi_0(\theta, \varphi) = e^{-ik\rho_0 \cos(\varphi-\psi_0)} \int_{\zeta_\mu}^{\zeta_M} e^{-ik\zeta \sin \theta} f_3(\zeta) d\zeta. \quad (11)$$

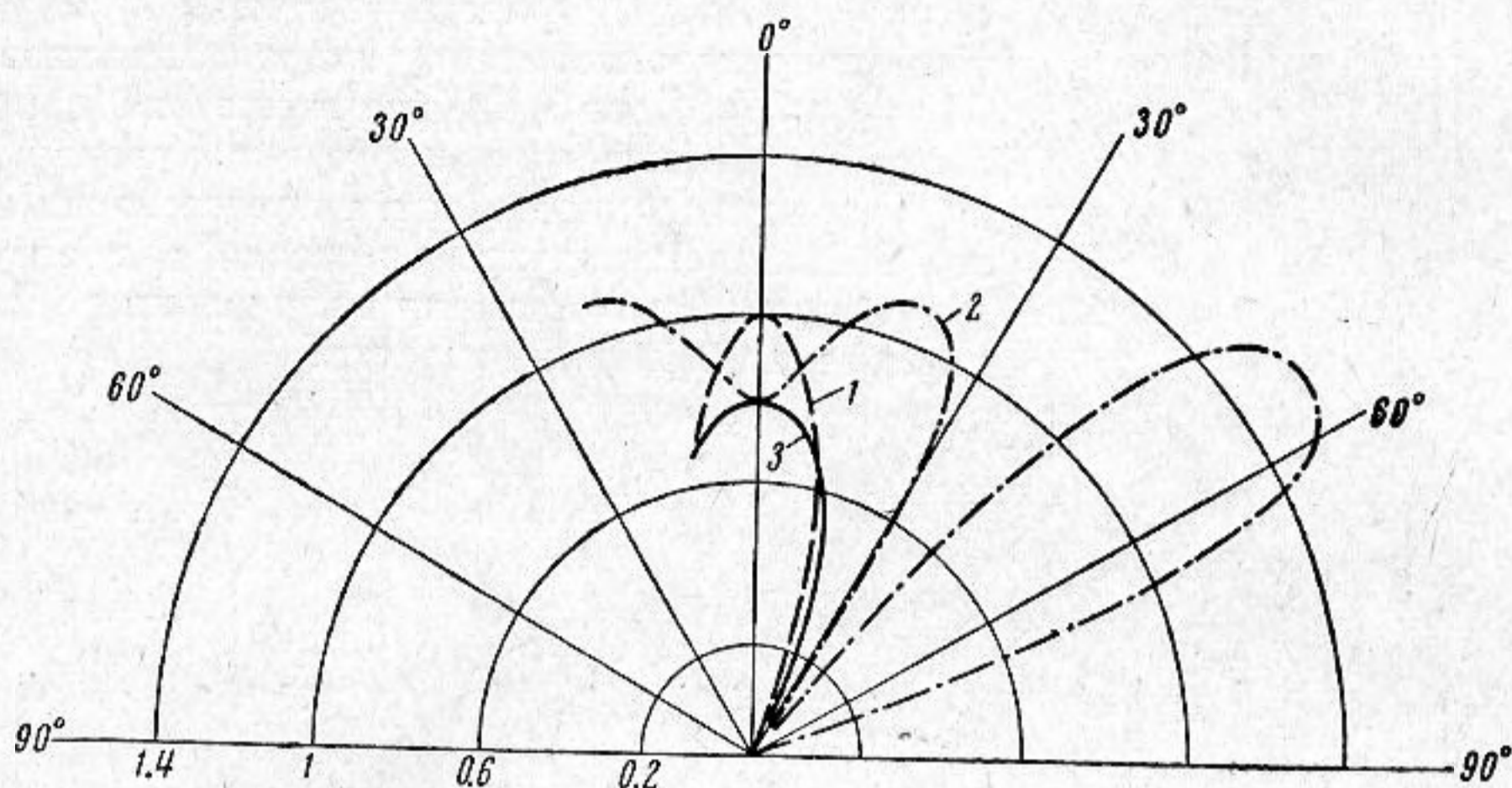
Из сопоставления формул (4а), (10) и (11) видно, что  $|\Phi| = |\psi| |\Phi_0|$ , т. е. модуль характеристики направленности такого распределенного излучателя в клине равен произведению модулей характеристик направленности сферического источника нулевого порядка в клине и распределенного излучателя в свободном пространстве.

Если область распределения  $D$  представляет собой дугу ( $\rho = \rho_0$ ,  $\zeta = \zeta_0$ ,  $\psi_\mu \leq \psi \leq \psi_M$ ) с заданным распределением источников, то рассматривая для определенности случай клина с мягкими гранями, мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \varphi) = e^{-ik\zeta_0 \sin \theta} \int_{\psi_\mu}^{\psi_M} \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} J_{\pi m/\Phi}(k\rho_0 \cos \theta) \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \psi) - \right. \\ \left. - \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \psi) \right] d\psi = 2e^{-ik\zeta_0 \sin \theta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} J_{\pi m/\Phi}(k\rho_0 \cos \theta) \times \\ \times \left[ \sin \frac{\pi m}{\Phi} (\psi_M - \varphi) - \sin \frac{\pi m}{\Phi} (\psi_\mu - \varphi) - \right. \\ \left. - \sin \frac{\pi m}{\Phi} (\psi_M + \varphi) + \sin \frac{\pi m}{\Phi} (\psi_\mu + \varphi) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Перестановка суммирования и интегрирования в формуле (12) законна, так как ряд (5а) сходится равномерно в области значений параметра  $\psi_{\mu} \leq \psi \leq \psi_M$ . Аналогично можно найти характеристику направленности для данного вида распределения и для случая клина с жесткими гранями и клина с мягкой и жесткой гранями.

Для одномерной области  $D$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной к ребру клина ( $\psi = \psi_0$ ,  $\zeta = \zeta_0$ ,  $\rho_{\mu} \leq \rho \leq \rho_M$ ), при  $f_1(\rho) = 1$  мы



Фиг. 3

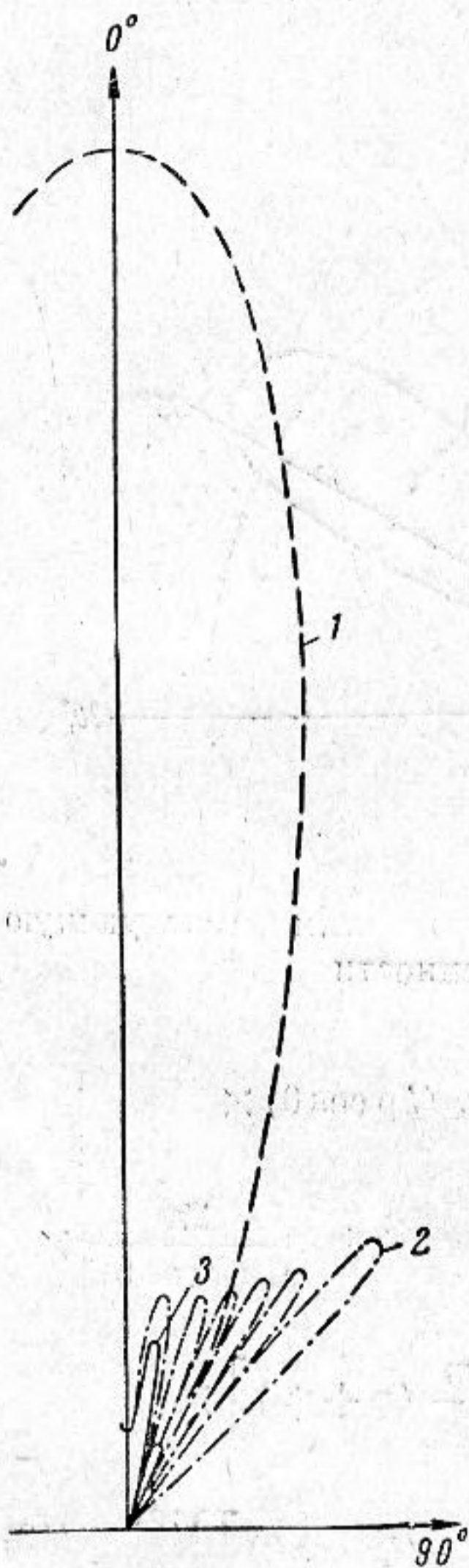
получаем, рассматривая случай клина с мягкими гранями, следующую формулу для вычисления характеристики направленности

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \varphi) &= e^{-ik\zeta_0 \sin \theta} \int_{\rho_{\mu}}^{\rho_M} \frac{\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} J_{\pi m/\Phi}(k\rho \cos \theta) \times \\ &\times \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \psi_0) - \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \psi_0) \right] \rho d\rho = e^{-ik\zeta_0 \sin \theta} \frac{2\pi}{\Phi (k \cos \theta)^2} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{i(\pi^2 m/2\Phi)} \left[ \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi - \psi_0) - \cos \frac{\pi m}{\Phi} (\varphi + \psi_0) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[ \rho \sum_{k=0}^{\infty} J_{(\pi m/\Phi)+2k+1}(k\rho \cos \theta) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} J_{(\pi m/\Phi)+2k+2r+2}(k\rho \cos \theta) \right] \right\} \Big|_{\rho_{\mu}}^{\rho_M}. \quad (13) \end{aligned}$$

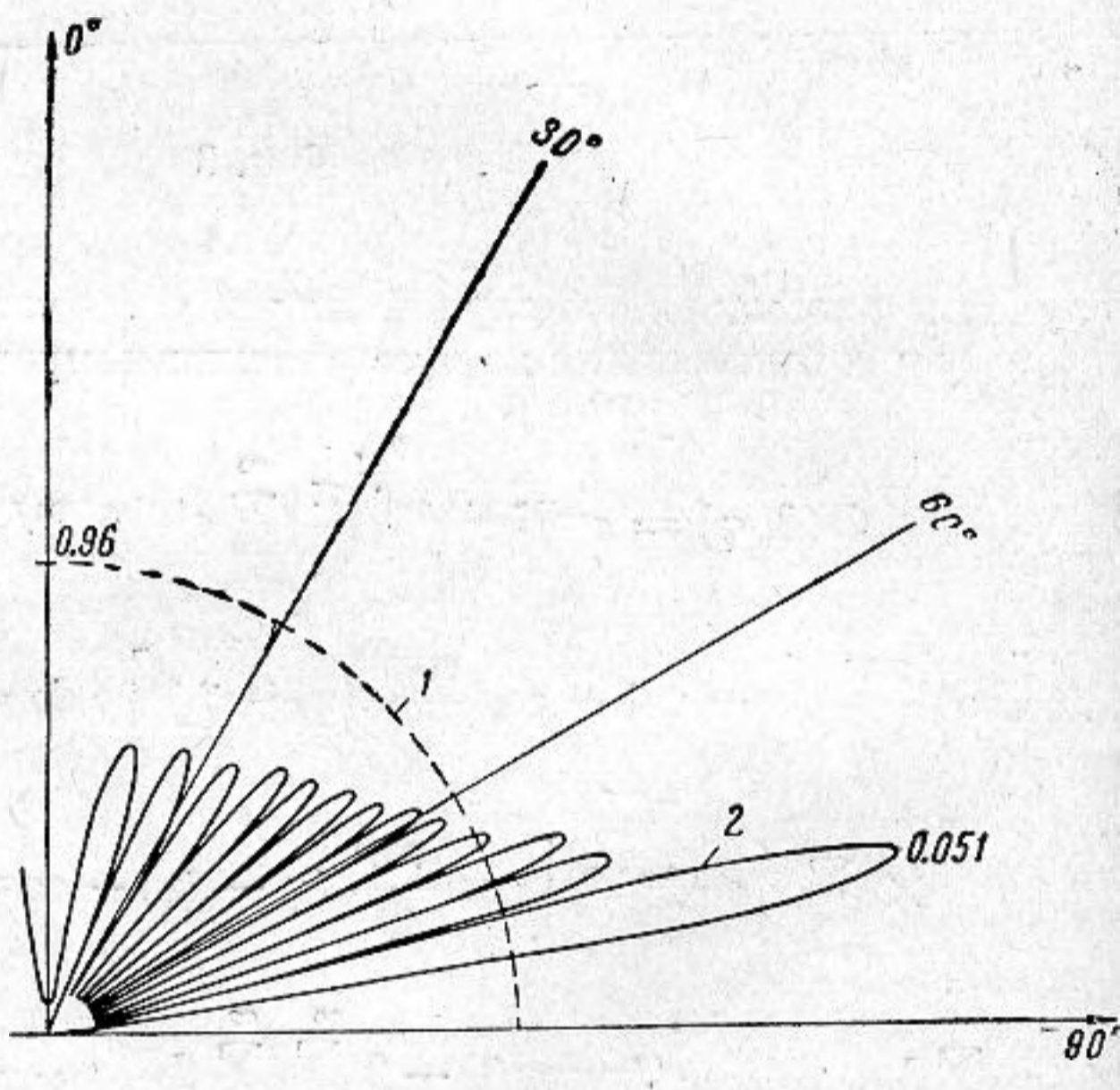
Сделаем несколько замечаний о вычислении характеристик направленности распределенных излучателей, расположенных в клиновидной области. Из формул (10), (12), (13) видно, что в выражения для характеристик направленности входит ряд по Бесселевым функциям. Суммирование производится по индексам этих функций, поэтому ряды являются абсолютно сходящимися. Количество членов, которое следует учитывать при расчетах, а также быстрота изменения функции  $\Phi(\theta, \varphi)$  зависят от соотношения параметров  $\Phi$ ,  $k\rho_0$ ,  $\psi_0$ , т. е. от угла раствора клина, частоты и расположения излучателя. Как показывают непосредственные расчеты, количество членов ряда  $m_0$ , которое нужно учитывать при расчетах, можно приближенно определить из правила: индекс Бесселевой функции должен быть примерно равен аргументу (для достаточно больших значений индекса, т. е. для малых углов раствора клина). Так, например, для ряда

(12) следует взять при расчетах  $m_0 \approx k\rho_0\Phi / \pi$ . Изрезанность диаграммы направленности получается тем больше, чем меньше раствор клина  $\Phi$  и чем больше величина  $k\rho_0$ .

Для примера на фиг. 3 представлены диаграммы направленности для некоторого конкретного линейного излучателя, расположенного вдоль оси  $z$  в клиновидной области. Клиновидная область имеет раствор  $\Phi = 20^\circ$ , ограничена мягкой и жесткой гранями;  $\varphi = \psi_0 = 0^\circ$ ,  $k\rho_0 = 10,4$ . В свободном пространстве (кривая 1) излучатель имеет характеристику направленности вида  $\Phi_0 = \cos(\pi/2 \cos \theta)^8$ . Характеристика направленности сферического источника нулевого порядка в клиновидной области представлена кривой 2. Наконец, сплошная кривая 3 дает результирующую характеристику направленного излучателя в клиновидной области.



Фиг. 4



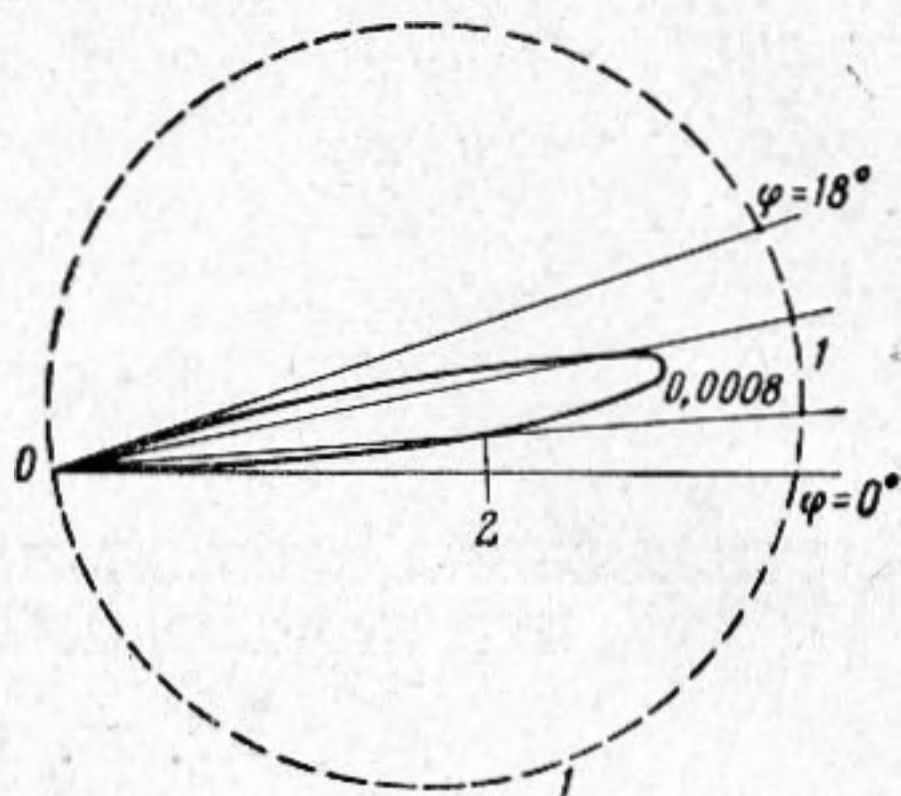
Фиг. 5

На фиг. 4 показаны диаграммы направленности того же излучателя, но для случая клиновидной области с раствором  $\Phi = 1^\circ$  и с мягкой и жесткой гранями;  $k\rho_0 = 125$ ,  $\psi_0 = \varphi = 0^\circ$ . Кривая 1 по-прежнему изображает диаграмму направленности излучателя в свободном пространстве, кривая 2 — диаграмму направленности сферического источника в клине, помещенного в точке  $\rho_0, \psi_0$  и кривая 3 — результирующую характеристику направленного излучателя в клине. Из сравнения фигур 3 и 4 видно, как резко увеличивается изрезанность диаграммы направленности при уменьшении угла раствора клина и увеличении  $k\rho_0$  и насколько уменьшается чувствительность излучателя.

На фиг. 5 представлена диаграмма направленности по  $\theta$  при фиксированном  $\varphi = 6^\circ$  распределенного источника, расположенного в клиновидной области раствора  $\Phi = 18^\circ$  с мягкими гранями. Источник расположен при  $6^\circ \leq \psi \leq 12^\circ$ ,  $\rho_0 = 140$  м,  $\zeta = 0$ ,  $k = 0,418$  1/м, частота равна 100 гц. Источники объемной скорости распределены равномерно вдоль дуги  $6^\circ \leq \psi \leq 12^\circ$ . Кривая 2 представляет диаграмму направленности данного источника в клиновидной области, кривая 1 — диаграмму направленности этого источника в свободном пространстве.

Кривая 2 на графике 6 представляет собой диаграмму направленности по  $\varphi$  того же источника при фиксированном  $\theta = 0^\circ$ ; окружность 1 — диаграмму направленности того же источника в свободном пространстве.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность А. А. Тужилину и И. А. Урусовскому за ряд ценных консультаций.



Фиг. 6

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Сахарова. Асимптотическое представление звукового поля точечного источника в клиновидной области. Акуст. ж., 1959, 5, 2, 215—220.
2. Г. Д. Малюжинец. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. Докл. АН СССР, 1951, 78, 3, 439.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4, гл. 4, М., Физматгиз, 1958.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, гл. 7. ГТТИ, 1953.
5. А. Зоммерфельд (в книге Ф. Франк и Р. Мизес). Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. 20. Л., ОНТИ, 1937.
6. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн (докт. диссертация). Физический ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1951.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступила в редакцию  
20 июля 1964 г.