

УДК 534.286—16

К ТЕОРИИ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОГО ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ
КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕД*А. В. Харитонов*

На основе модели Келера развивается новая дислокационная теория амплитудно-зависимого внутреннего трения кристаллических сред. В отличие от теории Гранато и Люкке, полученные результаты указывают на квадратичную зависимость декремента затухания от амплитуды колебаний, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

При распространении ультразвуковых волн в кристаллических средах имеет место ряд неупругих явлений, обусловленных присутствием в решетке дислокаций, примесей, вакансий и других микродефектов [1]. Среди этих явлений заслуживают серьезного изучения и привлекают внимание многих исследователей нелинейные дислокационные эффекты, в результате которых внутреннее трение кристаллов оказывается зависящим от амплитуды колебаний. Как показывают многочисленные эксперименты, характеристики амплитудно-зависимого внутреннего трения тесным образом связаны с параметрами структуры реальных кристаллов и его изучение открывает новые возможности в исследовании микродефектов решетки и их взаимодействий.

В основе современных представлений о дислокационном механизме амплитудно-зависимого внутреннего трения кристаллов лежат идеи Келера [2]: 1) отрезок дислокационной линии, закрепленный на концах атомами примесей (или другими микродефектами решетки), колеблется под действием упругих напряжений аналогично натянутой струне; 2) увеличение внутреннего трения с ростом амплитуды колебаний обусловлено отрывом дислокаций от закрепляющих дефектов. Гранато и Люкке [3], используя идеи Келера, разработали количественную теорию амплитудно-зависимого внутреннего трения, которая имела большой успех и получила широкое признание. Однако эксперименты [4—6], поставленные с целью проверки этой теории, показали, что предсказанная ею экспоненциальная зависимость внутреннего трения от амплитуды колебаний не соответствует действительности. Видоизменение теории с учетом различия в ориентации дислокации [7] не устранило противоречия с экспериментом.

Причины затруднений теории Гранато и Люкке кроются, по-видимому, в необоснованности некоторых упрощений, использованных при математическом анализе процессов отрыва дислокаций от закрепляющих дефектов. В частности, авторы теории считали, что все точки закрепления на дислокациях имеют одинаковые значения силы связи и что распределение дислокационных отрезков по длинам следует экспоненциальному закону. В настоящей работе делается попытка построить теорию амплитудно-зависимого внутреннего трения кристаллических сред на основе более общих предположений.

Рассмотрим в рамках континуальной теории дефектов решетки поведение закрепленных отрезков дислокационной линии, принадлежащей

одной из систем скольжения колеблющегося кристалла. Упругие волны создают в плоскости скольжения в направлении сдвига касательное напряжение τ , под действием которого отрезки дислокации колеблются в плоскости скольжения, выгибаясь между точками закрепления и приобретая форму дуги окружности (см. фиг. 1). Радиус окружности R определяется напряжением τ , линейным натяжением $s \approx \mu a^2 / 2$ дислокации и не зависит от длины отрезка [8, 9]:

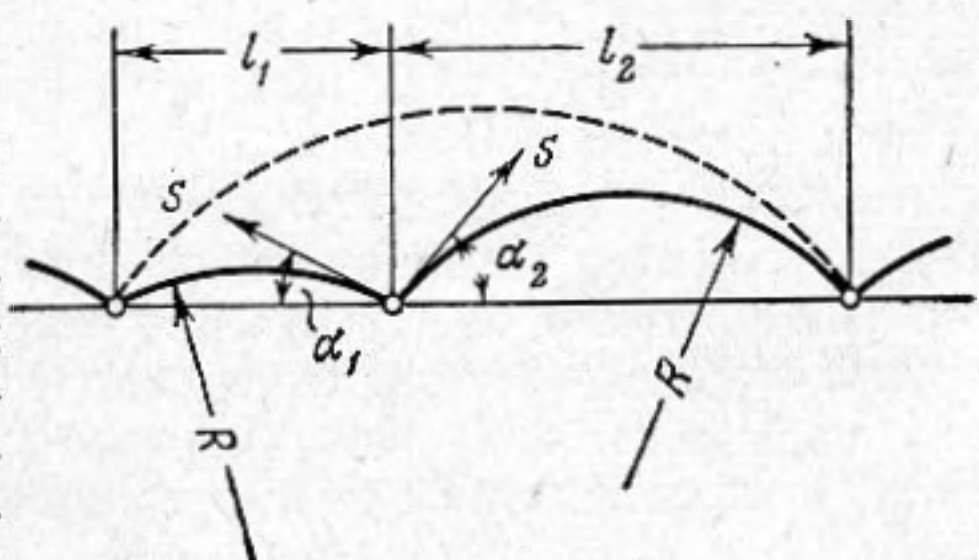
$$R = \frac{s}{a\tau} \approx \frac{\mu a}{2\tau},$$

где a — величина вектора Бюргерса, μ — модуль сдвига для данной системы скольжения. В результате выгибания дислокационных отрезков на точку закрепления действует сила

$$P \approx s(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \approx \frac{1}{2} a\tau(l_1 + l_2). \quad (1)$$

При увеличении напряжения τ эта сила может превысить силу связи F между дислокацией и закрепляющим дефектом. Тогда произойдет отрыв и образуется отрезок с длиной $l_1 + l_2$, который скачком переместится в новое положение, показанное на фиг. 1 пунктиром.

Если сила связи одинакова для всех точек закрепления, процесс отрыва должен последовательно распространиться на соседние отрезки и приобрести лавинообразный характер [3]. В действительности необходимо учесть, что в решетке кристалла всегда присутствуют примеси нескольких элементов и что точки закрепления на дислокациях создаются



Фиг. 1

не только примесными атомами, но и другими дефектами решетки. Поэтому при анализе процессов отрыва следует исходить из того факта, что сила связи имеет различные значения. Учитывая далее, что концентрация дефектов на дислокациях быстро увеличивается с ростом энергии (и силы) связи [8, 9], можно ожидать, что «сильных» точек закрепления окажется много больше, чем «слабых». При этих обстоятельствах целесообразно отказаться от идеи о лавинообразном отрыве дислокационной линии и считать, что в каждом элементарном акте отрыва участвует лишь одна пара соседних отрезков. Такой подход справедлив в том случае, когда отрывы точек закрепления взаимно независимы, или, другими словами, до тех пор, пока относительное количество оторвавшихся точек закрепления мало. Ниже будет показано, что это условие хорошо выполняется при не слишком больших амплитудах напряжения.

При уменьшении напряжения τ отрезки дислокационных линий упруго сжимаются, возвращаются в исходные положения и снова оказываются закрепленными точечными дефектами решетки. Отрыв и последующее закрепление дислокационных отрезков происходят дважды в течение каждого периода колебаний.

Чтобы определить количество точек закрепления, оторвавшихся при напряжении τ , обратимся к статистическому анализу процессов отрыва. Пусть точки закрепления некоторым образом распределены вдоль дислокационных линий. Введем в рассмотрение плотность вероятности $p(l)$; при этом величина $p(l)dl$ определяет вероятность того, что закрепленный

на концах дислокационный отрезок имеет длину в пределах от i до $i + dl$. Не делая каких-либо конкретных предположений относительно вида функции $p(l)$, учтем лишь тот факт, что дислокации образуют в кристалле трехмерную сетку. Поскольку расстояние L_N между узлами сетки (длина петли сетки) ограничивает максимальную величину дислокационного отрезка, $p(l)$ должна равняться нулю вне интервала $0 \leq l \leq L_N$.

Согласно выражению (1), сила, отрывающая дислокацию от закрепляющего дефекта, зависит от общей длины $L = l_1 + l_2$ соседних отрезков, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться также функция $f(L)$ — плотность вероятности для суммы длин, которая может быть найдена по формуле [10]

$$f(L) = \int_0^L p(l)p(L-l)dl. \quad (2)$$

В общем случае $f(L)$ определена в интервале $0 \leq L \leq 2L_N$, однако в процессах отрыва участвуют только те пары соседних отрезков, общая длина которых не превышает L_N (узлы сетки дислокаций считаются жестко закрепленными). Это обстоятельство будет учтено в последующих расчетах.

Пусть распределение точек закрепления по силам связи характеризуется плотностью вероятности $m(F)$. Эту функцию можно считать непрерывной, если принять во внимание, что тепловые флуктуации способствуют отрыву дислокаций от закрепляющих дефектов, и отличной от нуля в интервале $0 \leq F \leq F_0$. В соответствии с высказанными выше замечаниями относительно количества сильно и слабо связанных точек закрепления на дислокациях, функция $m(F)$ должна быть возрастающей, однако найти ее аналитическое выражение на основе каких-либо достаточно строгих рассуждений пока не представляется возможным. В настоящей работе в качестве первого приближения принято, что количество точек закрепления с силой связи F пропорционально величине этой силы, т. е.

$$m(F) = 2 \frac{F}{F_0^2}, \quad 0 \leq F \leq F_0. \quad (3)$$

Постоянный коэффициент в выражении (3) определен из условия: $\int m(F)dF = 1$, которому должна удовлетворять плотность вероятности.

Теперь нетрудно найти вероятность отрыва $N(\tau)$ или, другими словами, относительное количество точек закрепления, оторвавшихся при напряжении τ . Искомая величина равна интегралу от произведения $f(L)m(F)$ плотностей вероятности [10], причем область интегрирования (см. фиг. 2) определяется неравенством $a\tau L \geq 2F$, которое следует из выражения (1) и является условием отрыва дислокации от закрепляющего дефекта.

$$N(\tau) = \int \int f(L)m(F)dL dF. \quad (4)$$

Дальнейшее изложение ограничим случаем не слишком больших напряжений $\tau \leq 2F_0 / aL_N$. Тогда, подставляя выражения (2) и (3) в формулу (4) и выполняя интегрирование, получаем

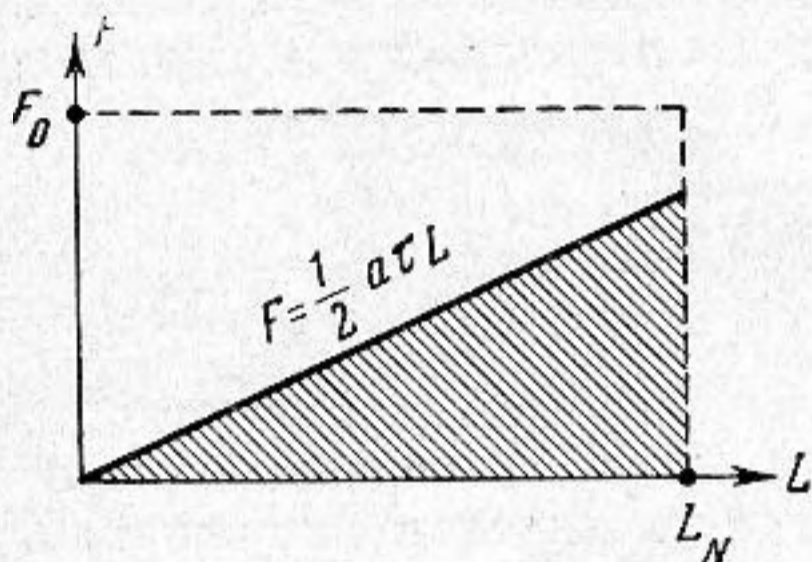
$$N(\tau) = \left(\frac{a\tau}{2F_0} \right)^2 L^2, \quad \tau \leq \frac{2F_0}{aL_N}, \quad (5)$$

где \bar{L}^2 — среднеквадратичное значение суммы длин соседних дислока-

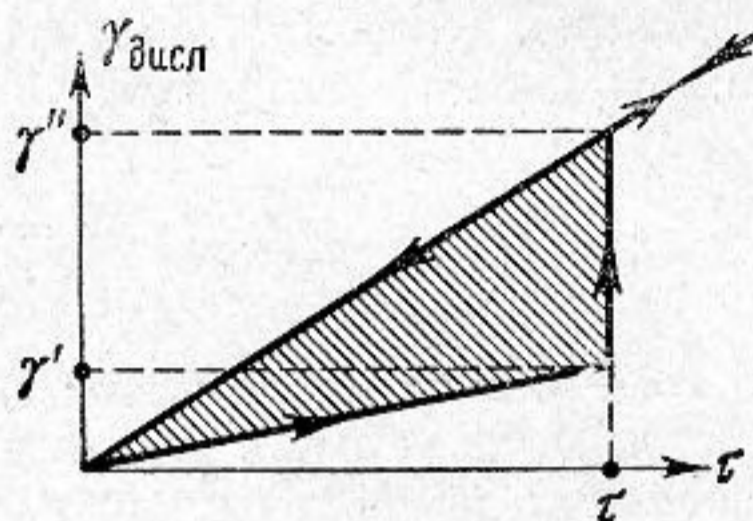
ционных отрезков, участвующих в процессах отрыва:

$$L^2 = \int_0^{L_N} L^2 f(L) dL = \int_0^{L_N} \int_0^{L_N - l_1} (l_1 + l_2)^2 p(l_1) p(l_2) dl_1 dl_2.$$

При $\tau = 2F_0 / aL_N$ из выражения (5) имеем $N(\tau) = \overline{L^2} / L_N^2$. Отсюда следует, что относительное количество оторвавшихся точек закрепления мало при всех рассматриваемых значениях напряжения, так как даже в самых чистых материалах среднее число закрепляющих дефектов внутри петли L_N много больше единицы и $L_N^2 \gg \overline{L^2}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Перейдем к расчету энергетических потерь, связанных с отрывом дислокаций от закрепляющих дефектов. Под действием напряжения τ в кристалле, кроме чисто упругой деформации $\gamma = \tau / \mu$, возникает дополнительная деформация $\gamma_{\text{дисл}}$, обусловленная движением дислокаций в плоскостях скольжения, причем для каждой дислокации

$$\gamma_{\text{дисл}} = \frac{aS}{V},$$

где S — площадь, пройденная дислокацией при ее перемещении, V — объем кристалла [8]. В случае закрепленного на концах дислокационного отрезка длиной l , из фиг. 1 следует:

$$S \approx \frac{l^3}{16R} \approx \frac{l^3 \tau}{8\mu a}, \quad \gamma_{\text{дисл}} \approx \frac{l^3 \tau}{8\mu V}. \quad (6)$$

Зависимость деформации, создаваемой движением пары испытывающих отрыв дислокационных отрезков, от напряжения имеет гистерезисный характер и показана на фиг. 3 для половины периода колебаний. Форма петли гистерезиса и энергетические потери, пропорциональные ее площади, практически не изменяются с частотой колебаний, если последняя меньше резонансной частоты f_0 дислокационных отрезков (f_0 лежит обычно в области десятков или сотен мегагерц [3]). Таким образом, для частот $f < f_0$ в результате отрыва точки закрепления, происходящего при напряжении τ , в единице объема кристалла теряется энергия

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \tau (\gamma'' - \gamma'),$$

где $\gamma'' - \gamma'$ — «мгновенное» приращение дислокационной деформации при отрыве. Используя выражение (6), находим

$$W(\tau) = \frac{\tau^2}{16\mu V} [(l_1 + l_2)^3 - (l_1^3 + l_2^3)] = \frac{\tau^2}{16\mu V} l_1 l_2 (l_1 + l_2).$$

Введем в рассмотрение некоторую эффективную длину $L_{\text{эфф}}$, определяе-

мую соотношением *

$$L_{\text{эфф}}^3 = \frac{1}{2} \frac{L_N L_N^{-l_2}}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} = \frac{1}{2} \int_0^{L_N} \int_0^{L_N - l_2} l_1 l_2 (l_1 + l_2) p(l_1) p(l_2) dl_1 dl_2.$$

Тогда среднее значение величины $W(\tau)$ равно

$$\bar{W}(\tau) = \frac{3\tau^2 L_{\text{эфф}}^3}{8\mu V}. \quad (7)$$

Оценим теперь энергию δW , теряемую в единице объема за период колебаний. Учитывая, что в течение каждого периода отрыв происходит дважды, можно записать

$$\delta W = 2N_0 \int_0^{\tau_0} \bar{W}(\tau) dN(\tau), \quad (8)$$

где N_0 — общее число точек закрепления на дислокациях во всем объеме кристалла, τ_0 — амплитуда напряжения τ , $dN(\tau)$ — относительное количество точек закрепления, отрывающихся при увеличении напряжения от τ до $\tau + d\tau$. Из выражения (5) следует

$$dN(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{F_0} \right)^2 \bar{L}^2 \tau d\tau. \quad (9)$$

Подставляя выражения (7) и (9) в интеграл (8) и принимая во внимание, что $N_0/V = \Lambda/L_c$, где Λ — плотность дислокаций, а L_c — среднее расстояние между точками закрепления,

$$L_c = \int_0^{L_N} lp(l) dl,$$

получаем

$$\delta W = \frac{3K\Lambda L_c^4 a^2 \tau_0^4}{8\mu F_0^2}. \quad (10)$$

В эту формулу входит безразмерный коэффициент $K = \bar{L}^2 L_{\text{эфф}}^3 / 4L_c^5$, численное значение которого зависит от вида функции $p(l)$ и может изменяться в пределах от единицы до приблизительно трех. Если все дислокационные отрезки имеют одинаковую длину, $K = 1$, а в случае беспорядочного распределения точек закрепления на дислокациях $K \simeq 3$.

Выражение (10) найдено из рассмотрения процессов отрыва в одной системе скольжения кристалла. Для определения общих потерь энергии в единице объема этот результат нужно просуммировать по всем системам скольжения:

$$\sum_i \delta W_i = \frac{3KL_c^4 a^2}{8\mu F_0^2} \sum \Lambda_i \tau_i^4,$$

где τ_i и Λ_i — амплитуда напряжения сдвига и плотность дислокаций в i -й системе скольжения, причем $\sum \Lambda_i = \Lambda$.

Вычисление декремента затухания проведем для кристалла, имеющего форму тонкого стержня и совершающего продольные колебания вдоль

* Здесь, как и при вычислении \bar{L}^2 , учитываются только те пары отрезков, которые могут участвовать в процессах отрыва, поэтому область интегрирования ограничивается неравенством $l_1 + l_2 \leq L_N$.

его оси (при экспериментальном изучении амплитудно-зависимого внутреннего трения чаще всего реализуется именно этот случай). Для других видов колебаний результаты будут отличаться лишь значениями фактора ориентации и могут быть получены аналогичным образом.

При продольных колебаниях кристаллического стержня имеет место следующее соотношение [4]:

$$\tau_i = \sigma \sin \Theta_i \cos \Theta_i \cos \Phi_i.$$

Здесь σ — амплитуда нормального напряжения в поперечном сечении стержня, Θ — угол между осью стержня и нормалью к плоскости скольжения, Φ — угол между проекцией оси стержня на плоскость скольжения и направлением сдвига. Используя две последние формулы, нетрудно рассчитать декремент затухания:

$$\Delta(\sigma) = \frac{\sum \delta W_i}{2W} = \frac{3KL_c^4 \Lambda E \Omega a^2}{8\mu F_0^2} \sigma^2, \quad (11)$$

где $W = \sigma^2 / 2E$ — энергия колебания единицы объема кристалла, E — модуль Юнга, Ω — фактор ориентации, который в рассматриваемом случае определяется выражением

$$\Omega = \frac{1}{\Lambda} \sum \Lambda_i (\sin \Theta_i \cos \Theta_i \cos \Phi_i)^4. \quad (12)$$

Для поликристаллических сред легко оценить численное значение фактора ориентации, если предположить, что в поликристалле имеется бесчисленное множество систем скольжения, расположенных беспорядочным образом с равной вероятностью для любой ориентации, и что дислокации равномерно распределены между всеми системами скольжения. При выполнении этих условий в выражение (12) можно вместо Λ_i подставить величину $d\Lambda = (4/\pi^2) \Lambda d\Theta d\Phi$ и заменить суммирование интегрированием по углам Θ и Φ в пределах от 0 до $\pi/2$ [4]. После вычисления интеграла мы получаем $\Omega = 9/1024 = 0,00879$.

Как видно из выражения (11), декремент затухания должен увеличиваться пропорционально квадрату амплитуды напряжения. Этот вывод хорошо согласуется с экспериментальными данными по амплитудно-зависимому внутреннему трению кристаллических сред. В качестве примера можно указать на результаты для поликристаллического алюминия [4, 13], монокристаллов меди [5, 11], NaCl [12, 13] и других.

Следует отметить, что развитая здесь теория относится к однородно напряженному кристаллу или к достаточно малому элементу объема, на протяжении которого изменение амплитуды напряжения σ пренебрежимо мало. Связь между декрементами затухания кристаллического образца, продольно колеблющегося на одной из собственных частот, и его малого элемента объема изучалась в работе [4], результаты которой показывают, что расчет декремента затухания образца также может быть выполнен на основе формулы (11). Для этого нужно лишь разделить ее на $B_2 = 1,33$ и вместо σ использовать величину максимальной амплитуды напряжения в образце.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Меркулов, А. В. Харитонов. Взаимодействие упругих волн с дислокациями. Сб. «Ультразвук. методы исслед. дислокаций». М., ИЛ, 1963, 5—26.
2. J. S. Koehler. The influence of dislocations and impurities on the damping and the elastic constants of metal single crystals. Imperfections in nearly perfect crystals, New York, 1952, 197—216.
3. A. Granato, K. Lücke. Theory of mechanical damping due to dislocations. J. Appl. Phys., 1956, 27, 6, 583—593 (перевод в сб. «Ультразвук. методы исслед. дислокаций». М., ИЛ, 1963, 27—57).
4. А. В. Харитонов. О зависимости внутреннего трения в металлах от амплитуды колебания. Акуст. ж., 1963, 9, 1, 80—87.

5. H. L. Caswell. Investigation of low-temperature internal friction. *J. Appl. Phys.*, 1958, 29, 1210—1214.
6. D. H. Niblett, J. Wilks. The internal friction of annealed copper at low temperatures. *Proc. Phys. Soc.*, 1959, 73, 1, 95—99.
7. J. C. Swartz, J. Weertman. Modification of the Koehler — Granato — Lücke dislocation damping theory. *J. Appl. Phys.*, 1961, 32, 1860 (перевод в сб. «Ультразвук. методы исслед. дислокаций». М., ИЛ, 1963, 58—74).
8. А. Х. Коттрелл. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургиздат, 1958.
9. Ван Бюрен. Дефекты в кристаллах. М., ИЛ, 1962.
10. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
11. A. S. Nowick. Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature. *Phys. Rev.*, 1950, 80, 2, 249—257.
12. R. W. Whitworth. Some effects of vibration on the internal friction of sodium chloride. *Phil. Mag.*, 1960, 5, 53, 425—440.
13. Л. А. Яковлев. Исследование частотной и амплитудной зависимостей дислокационного поглощения ультразвука в алюминии. *Акуст. ж.*, 1965, 11, 2, 239—242.

Ленинградский электротехнический
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
30 апреля 1964 г.