

# АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII  
1967  
Вып. 3

АКАДЕМИЯ  
НАУК  
СССР

июль  
август  
сентябрь

---

ОСНОВАН В 1955 г.  
ВЫХОДИТ ЧЕТЫРЕ РАЗА В ГОД  
МОСКВА

---

УДК 534.0

## ИЗЛУЧЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

*В. А. Акуличев, Ю. Я. Богуславский, А. И. Иоффе,  
Б. А. Наугольных*

Целый ряд явлений (таких как кавитация, подводный взрыв и электрический разряд в жидкости, кипение и др.) сопровождаются распространением в жидкости сферических волн конечной амплитуды, что описывается системой уравнений гидродинамики и уравнением состояния

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0, \quad (2)$$

$$p = p(\rho, S), \quad (3)$$

где  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $S$  — соответственно скорость, давление, плотность и энтропия в точке пространства  $r$  в момент времени  $t$ . Однако точное решение системы (1) — (3) для волн конечной амплитуды не найдено, в отличие от плоского случая, для которого существует известное риманово решение [1]. Эффективным приближенным методом рассмотрения сферических волн конечной амплитуды является метод, предложенный Кирквудом и Бете [2].

Если ввести потенциал скорости  $\varphi$  так, что  $u = -\partial\varphi/\partial r$ , то уравнения (1) и (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{u}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} - \frac{du^2}{dt} \right), \quad (4)$$

где  $\Phi = r\varphi$ . При малых возмущениях, когда можно пренебречь членами порядка  $u^2$ , уравнение (4) сводится к волновому. Это означает, что значения  $r\varphi$  распространяются со скоростью  $c = c_0$ , где  $c_0$  — скорость распространения звука в невозмущенной жидкости. При произвольных возмущениях для уравнения (4) не удастся получить решение в виде бегущей волны.

Тем не менее, Кирквуд и Бете предположили, что величина  $r\varphi$  в этом случае распространяется со скоростью  $\tilde{c} = c + u$ , подобно тому, как распространяются фиксированные значения давления и скорости в плоской римановой волне ( $c$  — локальная скорость распространения звука в жидкости). Это означает, что величина  $r \frac{\partial\varphi}{\partial t}$  также распространяется со скоростью  $\tilde{c}$ . Из уравнений гидродинамики следует, что [2]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = h + \frac{u^2}{2}, \quad (5)$$

где  $h$  — удельная энтальпия; для изэнтропических течений, которые рассматриваются в дальнейшем,

$$h = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (6)$$

где  $p_\infty$  — давление в жидкости на бесконечности.

Согласно теории Кирквуда и Бете функция

$$G(r, t) = r \frac{\partial\varphi}{\partial t} = r \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \quad (7)$$

распространяется со скоростью  $\tilde{c}$ , т. е. справедливо уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial G}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Следовательно, если известно значение функции  $G(R, t_R)$  на поверхности излучающей сферы радиуса  $R$  в момент времени  $t_R$ , то ее значение в произвольной точке пространства  $r$  в момент времени  $t$  определяется равенством:

$$G(r, t) = G(R, t_R) = G_R(t_R), \quad (9)$$

где

$$t = t_R + \int_R^r \frac{dr}{\tilde{c}}. \quad (10)$$

В дальнейшем рассматривается распространение волн конечной амплитуды в средах, для которых справедливо уравнение состояния вида

$$p = A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - B, \quad (11)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $n$  — некоторые константы; для воды можно принять, что  $A = 3001$  атм,  $B = 3000$  атм,  $n = 7$ . В этом случае вблизи фронта волны имеют место соотношения:

$$G = rc_0u(1 + \beta u), \quad (12)$$

$$\tilde{c} = c_0(1 + 2\beta u), \quad (13)$$

где  $\beta = \frac{n+1}{4c_0}$ . Выражая  $dr$  из формулы (12) и принимая во внимание, что функция  $G$  остается постоянной при распространении, получаем

$$\int_R^r \frac{dr}{\tilde{c}} = -\frac{G}{c_0^2} \int_U^u \frac{du}{u^2(1+\beta u)^2}, \quad (14)$$

где  $U = u(R, t_R)$ . Произведя интегрирование в правой части равенства (14) и подставляя полученный результат в формулу (10), окончательно определяем  $t$  как функцию  $G$ ,  $R$  и  $r$ :

$$t = t_R(G) + \frac{G}{c_0^2} \beta \left[ \frac{1+2\beta u}{\beta u(1+\beta u)} - \frac{1+2\beta U}{\beta U(1+\beta U)} - 2 \ln \frac{(1+\beta u)\beta U}{\beta u(1+\beta U)} \right], \quad (15)$$

где, согласно формуле (12),

$$\beta u = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{n+1}{rc_0^2} G \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (16)$$

$$\beta U = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{n+1}{Rc_0^2} G \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (17)$$

а  $t_R$  выражено в функции  $G$  с помощью соотношения (9).

Проанализируем полученное решение (15). Если возмущения невелики и можно пренебречь  $\beta u$  по сравнению с единицей в знаменателе формулы (14), то из выражения (15) следует известный результат линейной акустики:

$$t - t_R = \frac{r - R}{c_0}. \quad (18)$$

В этом случае запаздывание  $(t - t_R)$  возмущения при распространении от поверхности излучающей сферы радиуса  $R$  до точки  $r$  пространства является величиной, не зависящей от  $G$ .

Учет следующего члена в разложении знаменателя формулы (15) по  $\beta u$  приводит к решению

$$t - t_R = \frac{r - R_0}{c_0} - \frac{G}{c_0^2} 2\beta \ln \frac{r}{R}. \quad (19)$$

В этом случае запаздывание  $(t - t_R)$  оказывается линейной функцией  $G$ . Отсюда следует, что в отличие от формулы (18) это решение описывает волну, профиль которой изменяется при распространении. Интересно отметить, что формула (19) в точности совпадает с результатом непосредственного интегрирования уравнений гидродинамики во втором приближении по  $\beta u$  [3, 4].

В общем случае для произвольных возмущений соотношение (15) позволяет определить  $t$  как функцию  $G$ ,  $R$  и  $r$  и найти тем самым поле гидродинамических величин — скорости  $u$  из равенства (16) и давления  $p$  по формуле

$$p = A \left[ \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \left( 1 + \frac{n+1}{rc_0^2} G \right)^{1/2} \right]^{\frac{2n}{n-1}} - B, \quad (20)$$

которая следует из выражения (11) при учете того, что согласно формуле (13)  $c = c_0 \left( 1 + \frac{n-1}{2c_0} u \right)$ , а с другой стороны  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ .

Таким образом, нахождение поля гидродинамических величин, создаваемого сферой радиуса  $R$ , сводится к определению функций  $R(t_R)$  и

$$G_R(t_R) = R \left( H + \frac{u^2}{2} \right), \quad (21)$$

где  $H$  — удельная энтальпия на поверхности  $R$ ; согласно формулам (6) и (11)

$$H = \int_{p_\infty}^{p(R)} \frac{dp}{\rho} = \frac{n}{n-1} \frac{A^{1/n}}{\rho_0} \left\{ [p(R) + B]^{\frac{n-1}{n}} - [p_\infty + B]^{\frac{n-1}{n}} \right\}. \quad (22)$$

Из полученных соотношений (21) и (22) следует, что функция  $G_R(t_R)$  в свою очередь определяется изменением радиуса  $R(t_R)$  излучающей сферы. Подставим  $G$  из формулы (7) в уравнение (8) и исключим частные производные при помощи уравнений гидродинамики (1) и (2); тогда при  $r = R$  мы получим уравнение:

$$\begin{aligned} R \frac{d^2 R}{dt^2} \left( 1 - \frac{u}{c} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \left( 1 - \frac{u}{3c} \right) = \\ = \left( 1 + \frac{u}{c} \right) H + \frac{R}{c} \left( 1 - \frac{u}{c} \right) \frac{dH}{dt}, \end{aligned} \quad (23)$$

которое описывает изменение радиуса излучающей сферы с учетом сжимаемости жидкости. Здесь  $u = dR/dt$ , а скорость звука  $c$  на поверхности сферы, согласно соотношениям (6) и (11), выражается как функция  $H$  [5]:

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{n-1}{c_0^2} H \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Решением уравнения (23) является функция  $R(t_R)$ , подстановка которой в выражения (21) и (22) позволяет определить  $G_R(t_R)$  и найти поле гидродинамических величин по формулам (15), (16) и (20). Вид функции  $R(t_R)$  определяется, согласно уравнениям (22) и (23), значениями давления  $p(R)$  на поверхности излучающей сферы, давлением на бесконечности  $p_\infty$  и начальными условиями при решении уравнения (23), т. е. определяемые физическими параметрами рассчитываемой задачи.

Рассмотрим волны конечной амплитуды, излучаемые сферической газовой полостью, захлопывающейся в жидкости в поле ультразвуковой волны частоты  $\omega$ , т. е. при ультразвуковой кавитации. Из многочисленных экспериментов [6] известно, что кавитационные полости, вырастая до относительно больших размеров вследствие отрицательных давлений ультразвукового поля, захлопываются в фазе положительных давлений до микроскопических размеров. При этом кавитационные полости излучают сферические волны сжатия чрезвычайно больших амплитуд, которые при распространении в жидкости превращаются в интенсивные ударные волны, обуславливающие воздействие кавитации на различные вещества.

Изменение радиуса полости во времени определяется при ультразвуковой кавитации уравнением (23), где в этом случае энтальпия  $H$  равна

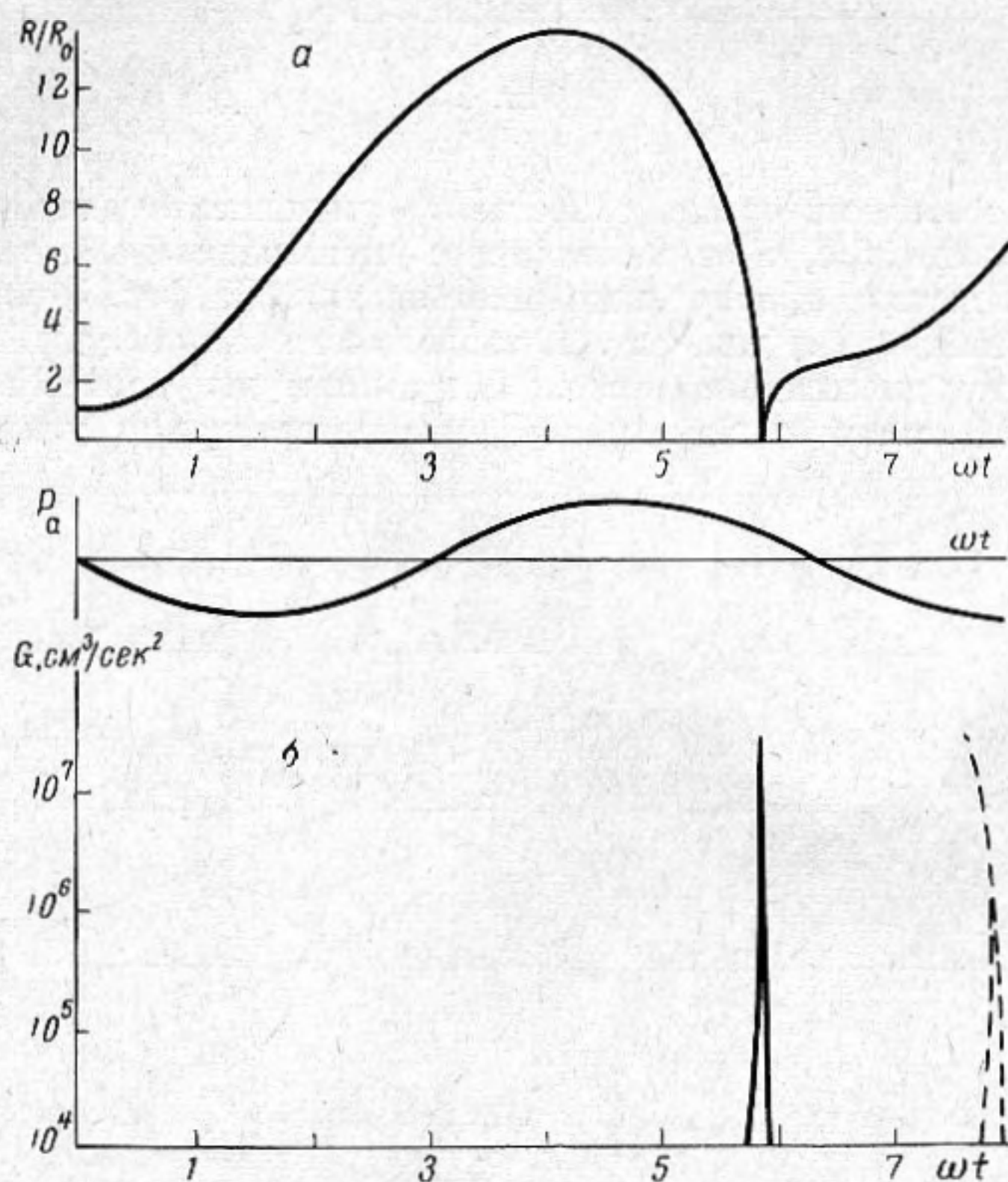
$$\begin{aligned} H = \frac{n}{n-1} \frac{A^{1/n}}{\rho_0} \left\{ \left[ \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} + B \right]^{\frac{n-1}{n}} - \right. \\ \left. - [P_0 - P_m \sin \omega t + B]^{\frac{n-1}{n}} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $P_0$  и  $\rho_0$  — равновесные давление и плотность жидкости,  $R_0$  — начальный радиус полости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения в

жидкости,  $P_m$  — амплитуда давления ультразвуковой волны. При выводе формулы (25) использовалось условие равенства давлений газа и жидкости на границе полости. Газ считался идеальным, изменение его состояния предполагалось адиабатическим, причем для удобства расчетов было принято  $\gamma = 4/3$ .

На фиг. 1, а представлена зависимость безразмерного радиуса  $R/R_0$  кавитационной полости от времени для  $R_0 = 10^{-4}$  см,  $f = \omega / 2\pi = 500$  кГц,  $P_m = 5,0$  атм, полученная путем численного интегрирования уравнения (23) на ЭВМ при начальных условиях  $R|_{t=0} = R_0$ ,  $dR/dt|_{t=0} = 0$ . Внизу на фиг. 1, а показано изменение во времени давления ультразвукового поля, действующего на полость. На фиг. 1, б сплошной кривой представлена соответственная зависимость  $G_R$  от времени, вычисленная по формуле (21).

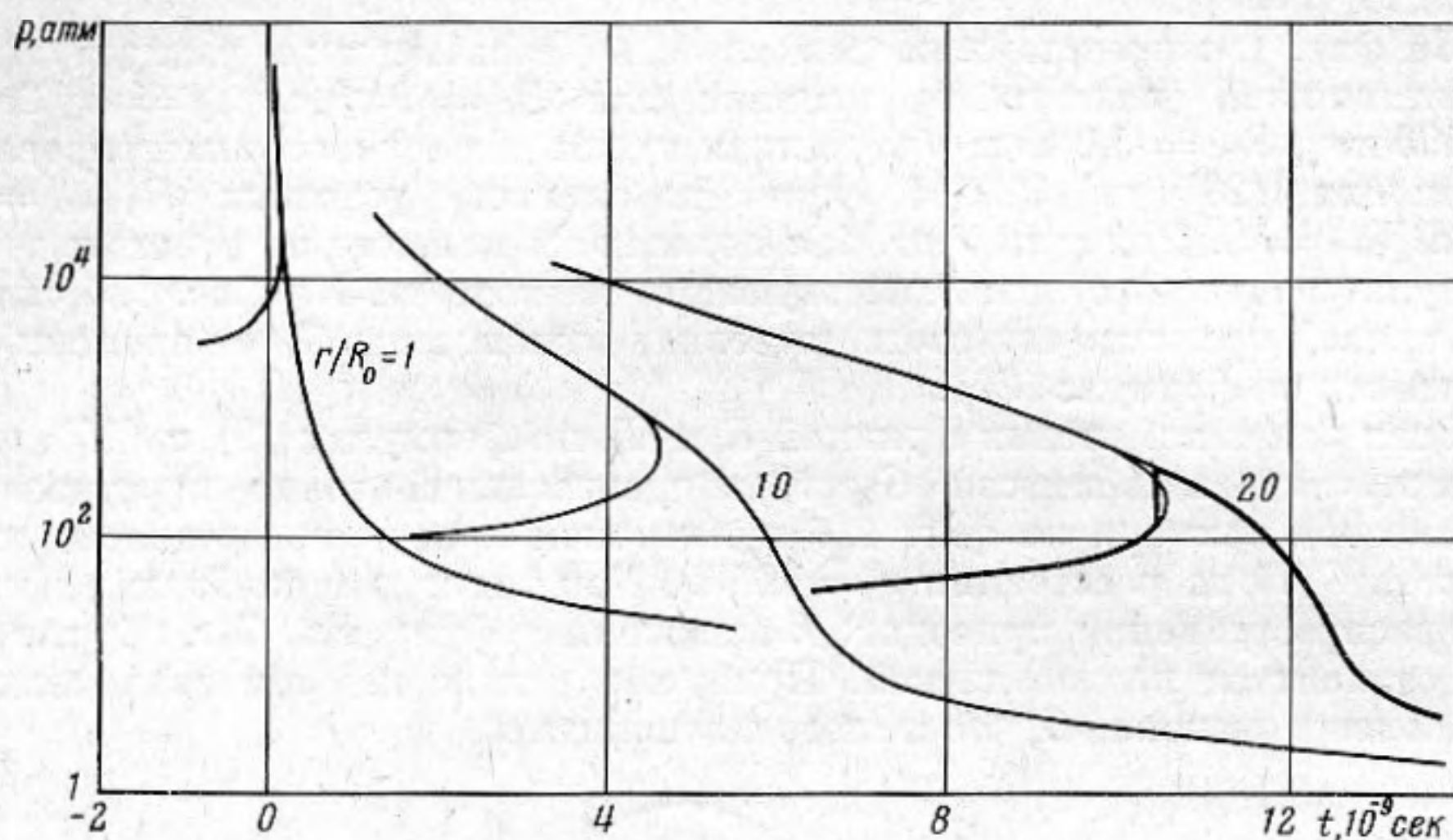
Зная закон изменения функций  $R$  и  $G_R$  по формулам (9) и (15), можно вычислить зависимости  $G(r, t)$  в произвольной точке пространства. В качестве примера на фиг. 1, б пунктирной кривой представлена зависимость  $G(t)$  на расстоянии  $r = 10^3 R_0$ . Как видно, нелинейные эффекты при распространении приводят к искажению функции  $G(r, t)$ , так что она становится неоднозначной. При этом, искажение тем значительнее, чем больше значение  $G$ , что и следовало ожидать.



Фиг. 1

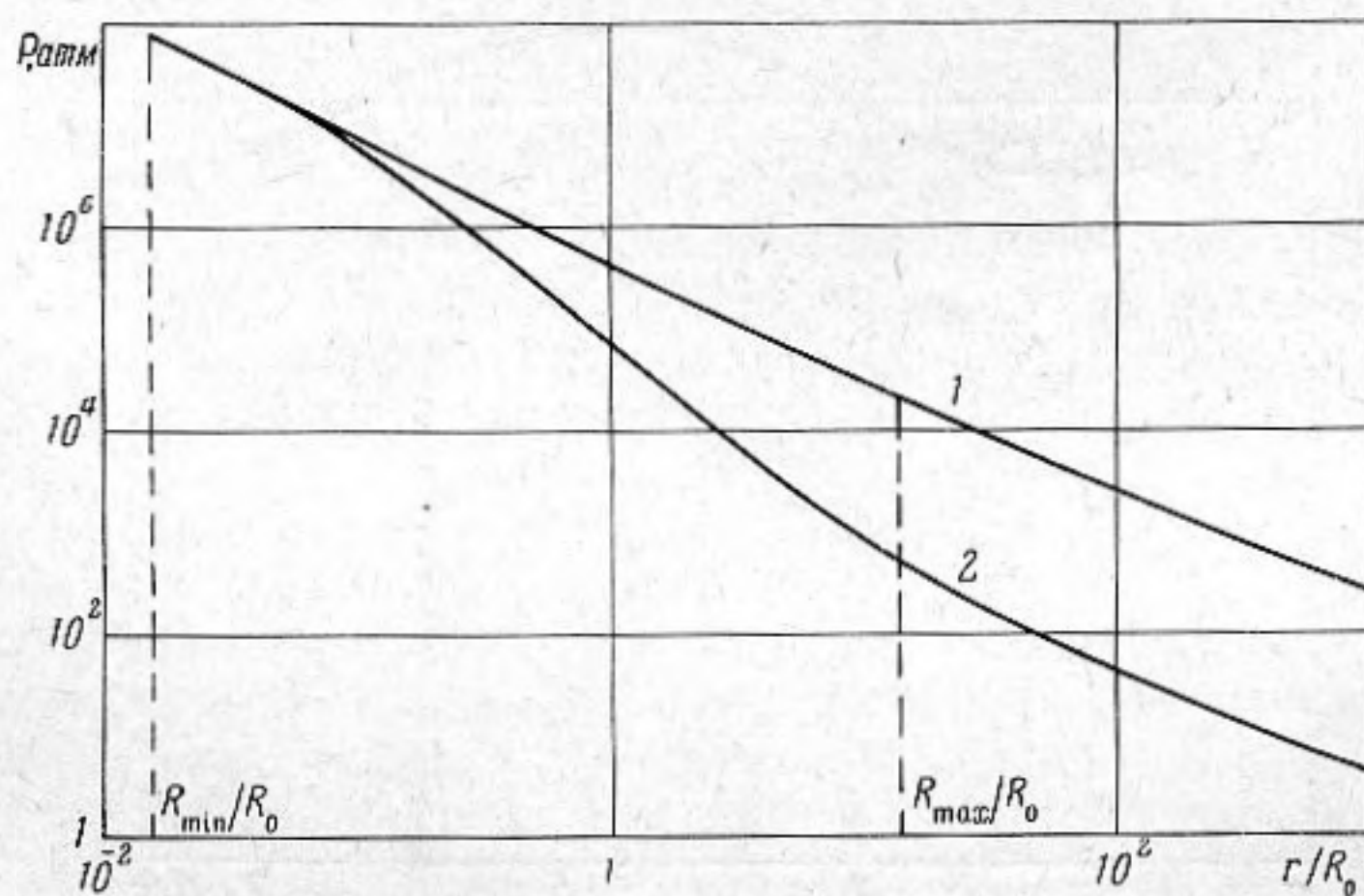
На фиг. 2 показаны зависимости давления в жидкости от времени на различных расстояниях от излучающей кавитационной полости, вычисленные по формуле (20) для тех же условий, что и выше; начальный момент времени  $t = 0$  соответствует моменту полного захлопывания полости. Нетрудно видеть, что профили давления также становятся неоднозначными, что физически означает образование ударных волн. Их положения и амплитуды могут быть найдены при помощи геометрического условия «равенства площадей» [1]. Полученный в результате такого построения профиль ударной волны изображен на фиг. 2 для случая

$r = 20R_0$  жирной линией. Интересно отметить, что амплитуда ударной волны в этом случае оказывается на два порядка меньше максимального давления в волне сжатия, определяемого только с учетом сферического расхождения.



Фиг. 2

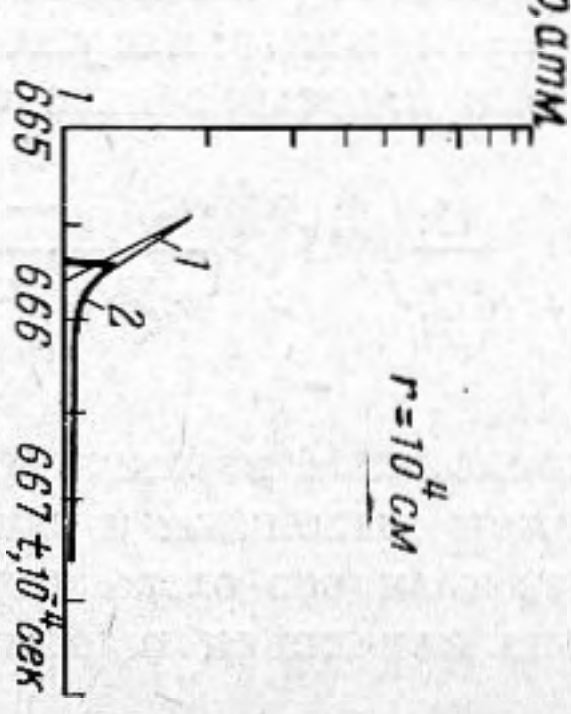
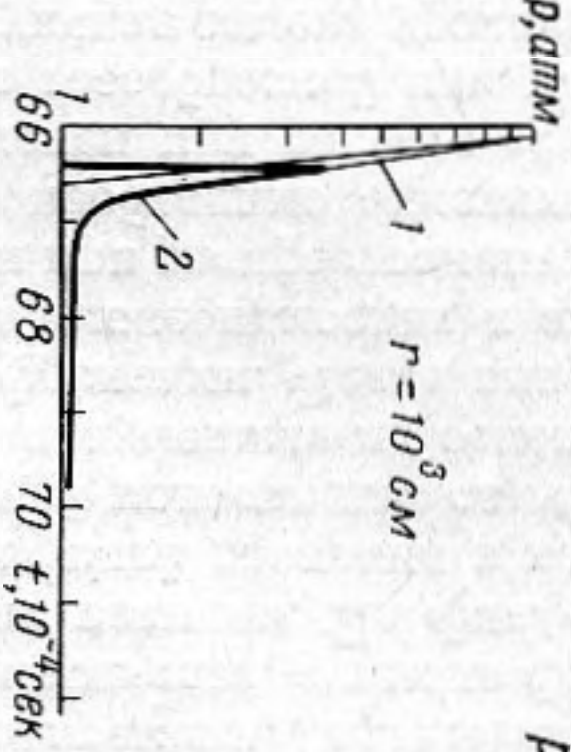
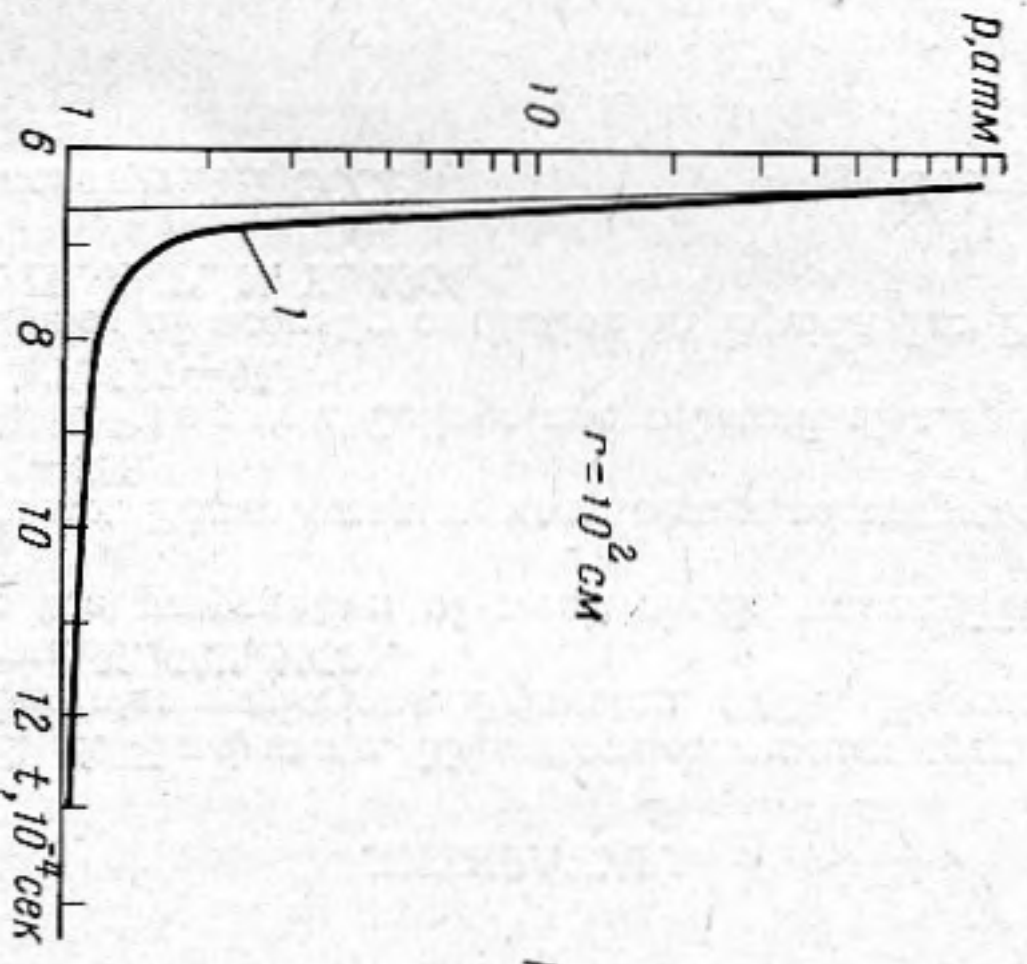
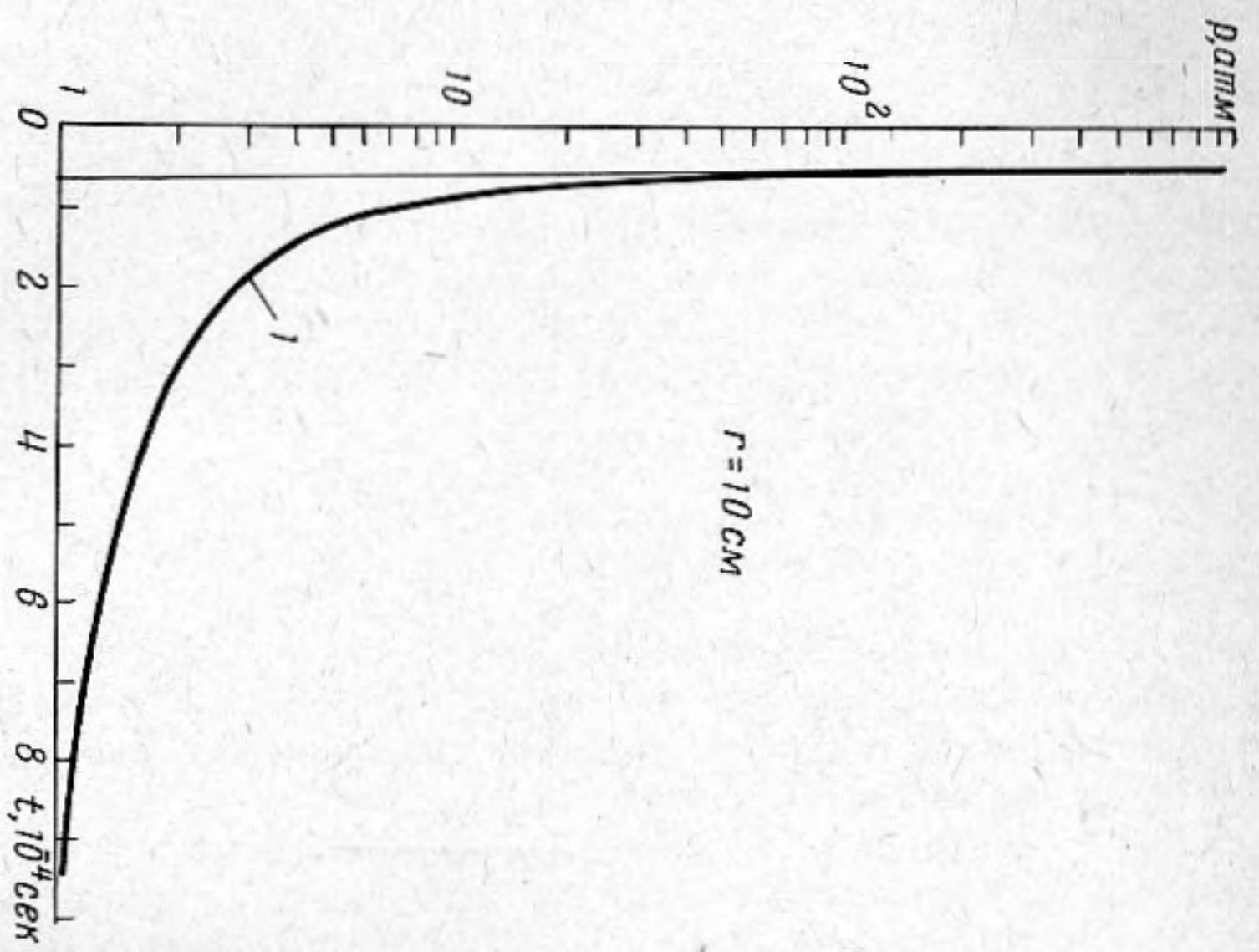
В связи с этим интересно сопоставить уменьшение амплитуды ударной волны в зависимости от расстояния с уменьшением амплитуды волны давления вследствие сферического расхождения. На фиг. 3 показаны для тех же условий, что и для фиг. 1, зависимости амплитуды волны давления без учета диссипации (кривая 1) и амплитуды ударной волны (кривая 2) от расстояния  $r$ . Как видно, заметное затухание ударной волны



Фиг. 3

происходит вблизи полости на расстояниях порядка  $R_{\max}$ , где  $R_{\max}$  — максимальный радиус кавитационной полости (см. фиг. 1). Необходимо отметить, что в рассмотренном случае при захлопывании полости до  $R_{\min}$  максимальное давление в жидкости достигает весьма значительных величин  $\sim 10^7$  атм, когда, вообще говоря, уравнение состояния (11) становится весьма приближенным.

Подобным же образом можно рассмотреть излучение волны конечной амплитуды сферой, первоначальное давление газа в которой  $p_{г0}$  намного



Фиг. 4

больше равновесного, а начальная скорость равна нулю. К такой упрощенной схеме очень часто сводится задача подводного взрыва или электроразрядного разряда в жидкости. Изменение радиуса полости во времени в этом случае определяется уравнением (23), где энтальпия  $H$  равна

$$H = \frac{n}{n-1} \frac{A^{1/n}}{\rho_0} \left\{ \left[ p_{r0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + B \right]^{\frac{n-1}{n}} - [P_0 + B]^{\frac{n-1}{n}} \right\}. \quad (26)$$

Газ внутри полости считается идеальным, а изменение его состояния предполагается адиабатическим ( $\gamma = 4/3$ ). Радиус полости очень быстро увеличивается во времени, вследствие чего соответствующим образом уменьшается давление газа, а также функция  $G_R(t_R)$ , определяющая поле гидродинамических величин. На фиг. 4 кривыми 1 представлены результаты расчетов профилей давления в волне сжатия на различных расстояниях от излучающей полости для случая  $p_{r0} = 10^5$  атм,  $R_0 = 0,1$  см. Кривыми 2 показаны полученные на основе этого расчета профили волн сжатия с ударными фронтами. Легко видеть, что в этом случае образование ударных фронтов также приводит к значительному затуханию волн конечной амплитуды при распространении в жидкости.

В заключение необходимо отметить, что рассмотренный выше метод может быть применен при расчете сферических волн конечной амплитуды, излучаемых в газообразной или упругой среде. При этом необходима только соответствующая замена уравнения состояния (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ТТИ, 1954.
2. R. N. Cole. Underwater explosions. Princeton, 1948. (Имеется перевод: Р. Коул. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950).
3. R. Whitam. On the propagation of weak shock waves. Fluid Mech., 1956, 2, 1, 303—315.
4. К. А. Наугольных. Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой. Акуст ж., 1965, 11, 3, 351—358.
5. R. Hickling, M. S. Plesset. Collaps and rebound of a sperical bubble in water. Phys. Fluids, 1964, 7, 1, 7—14.
6. H. G. Flynn. Physics of acoustic cavitation in liquids. In: Physical Acoustics (ed. by W. Mason), v. IB, A. P., N. Y., 1964.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступила в редакцию  
17 октября 1966 г.