

УДК 534.232

РАСЧЕТ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

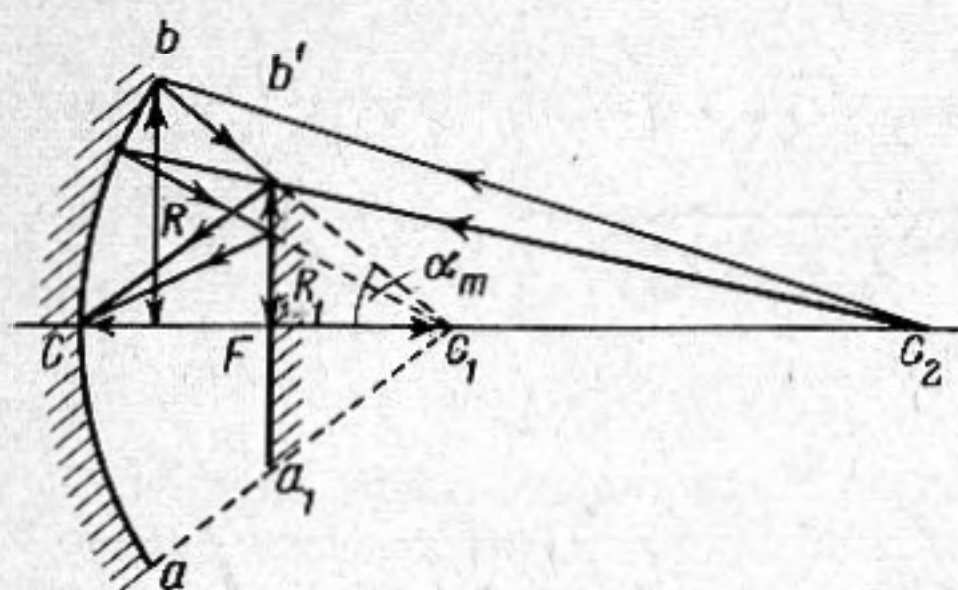
Т. С. Белле

Для решения ряда практических задач как при образовании звукового изображения, так и при концентрации звуковой энергии, приходится создавать фокусирующие системы, обеспечивающие синфазный приход волн в точку, находящуюся на конечном расстоянии от точечного источника. Как известно [1], простейшей системой, удовлетворяющей этому требованию, является зеркало, имеющее форму эллипсоида вращения. Однако такая однозеркальная система обладает существенным недостатком: фокальная область зеркала, а следовательно и находящаяся там аппаратура, например электронно-акустический преобразователь оказываются на пути падающей волны. Поэтому выгоднее применять двухзеркальные фокусирующие системы типа телескопической системы Ньютона. На фиг. 1 показана двухзеркальная система, обеспечивающая синфазный приход в точку C волн, исходящих из точки C_2 ; здесь C_1 и C_2 — фокусы эллипсоида вращения, частью которого является зеркало ab , F — фокусное расстояние эллипсоида, α_m — угол раскрытия эллиптического зеркала, $a'b'$ — плоское зеркало. В такой системе на пути сходящейся после отражения от эллиптического зеркала сферической волны, ставится плоское зеркало, которое, не нарушая синфазности, переносит фокус сходящейся волны из C_1 в C . Так как плоское зеркало не изменяет радиуса кривизны сходящейся волны, то, как видно из фиг. 1, для переноса фокуса из C_1 в C плоское зеркало необходимо располагать на расстоянии не более $F/2$ от эллиптического зеркала.

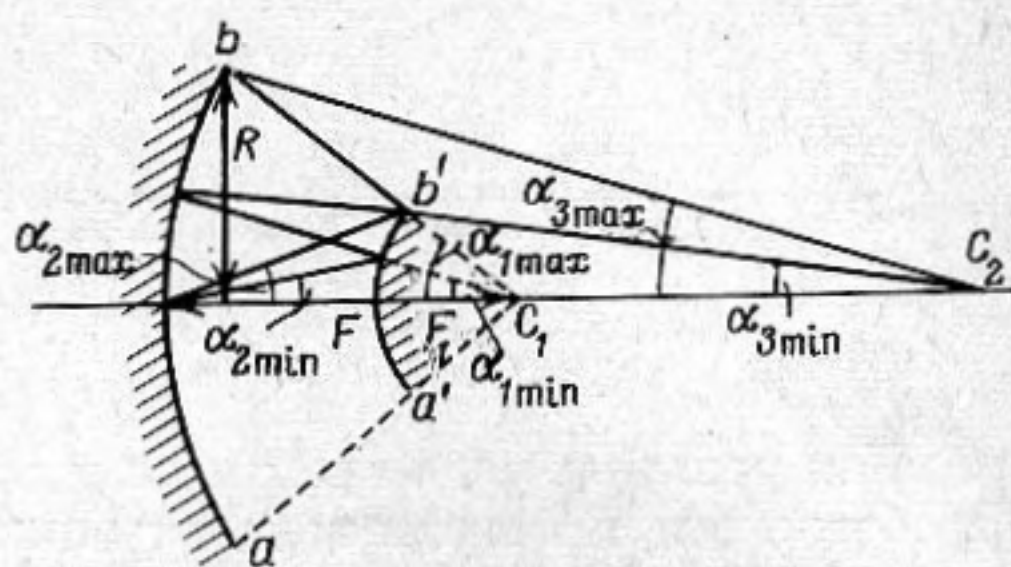
Для того чтобы плоское зеркалохватило и крайний луч, отраженный от зеркала ab (на фиг. 1 — луч bb'), его поперечные размеры должны быть не менее $F/2 \operatorname{tg} \alpha_m$. Это приводит к значительному затенению падающей волны, и, соответственно, к большим энергетическим потерям. Гораздо выгоднее использовать отражающее зеркало, имеющее форму гиперболоида вращения с таким фокусным расстоянием, чтобы один его фокус совместился с фокусом эллипсоида C_1 , а другой — с C [2]. Как видно из фиг. 2, гиперболическое зеркало $a'b'$, не нарушая синфазности сходящейся волны, изменяет радиус ее кривизны, преобразуя сферическую волну меньшего радиуса в сферическую волну большего радиуса. Это позволяет уменьшить геометрические размеры зеркала $a'b'$ (при сохранении требования: $R_1/\lambda \gg 1$, где λ — длина звуковой волны).

Как известно [1], основными параметрами, характеризующими любую фокусирующую систему, являются размеры фокального пятна r_0 , определяющие разрешающую способность, и величина коэффициента усиления K , т. е. отношение звукового давления или звуковой скорости в центре фокального пятна к звуковому давлению или звуковой скорости в падающей волне. В одноповерхностных системах (например, однозеркальных) величины K и r_0 выражаются через одни и те же геометрические параметры системы; поэтому, исследуя поведение одной из этих величин, мы одновременно можем судить и о поведении другой. В более сложных системах,

например, двухзеркальных, коэффициент усиления и размеры фокального пятна являются в некотором смысле независимыми величинами, каждая из которых связана с различными геометрическими параметрами системы. Так, величина коэффициента усиления K , определяемая энергией, падающей на фокусирующее устройство, зависит от размеров входного зрачка и от угла охвата источника эллиптическим зеркалом, в то время как радиус фокального пятна r_0 определяется только диаметром входного отверстия,



Фиг. 1



Фиг. 2

имеющего в нашем случае форму кольца. В зависимости от целей, для которых такая система должна служить, можно, уменьшая ширину кольца входного отверстия, получать малую величину r_0 , уменьшая при этом и коэффициент усиления вследствие уменьшения площади входного отверстия. Наоборот, увеличивая входное отверстие и подбирая оптимальный угол охвата источника, можно добиваться большого коэффициента усиления, но при больших размерах фокального пятна, т. е. при меньшей разрешающей способности.

Используя модифицированный Розенбергом [1] метод Дебая [3], мы проведем расчет звукового поля вблизи фокуса двухзеркальной фокусирующей системы, изображенной на фиг. 2. Согласно работе [1], давление в фокальной области такой системы может быть записано с точностью до фазового множителя, в виде

$$p(f + \eta, r) = kF_1 p_0 \int_{\alpha_{2\min}}^{\alpha_{2\max}} \Phi(\alpha) e^{ikh\eta \cos \alpha} J_0(kr \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad (1)$$

где p_0 — звуковое давление на поверхности сходящейся сферической волны радиуса F_1 при $\alpha = 0$, F_1 — фокусное расстояние гиперболического зеркала, k — волновое число, η, r — цилиндрические координаты с началом в C , причем η отсчитывается по оси от фокальной плоскости, r — нормально к оси, $\Phi(\alpha)$ — функция распределения амплитуд по поверхности сферического фронта волны, сходящейся в точку C , $\alpha_{2\max}, \alpha_{2\min}$ — полярные углы, соответствующие крайним лучам, приходящим в C из C_2 , α — текущий полярный угол.

Для нахождения $\Phi(\alpha)$ используем те же энергетические соображения, что и в работе [1]. Если в C_2 находится точечный источник мощностью P , то на сферическом фронте расходящейся от него волны будет равномерное распределение интенсивности и давления, которые на расстоянии F от фокуса C_2 (F — фокусное расстояние эллипсоида) будут соответственно

$$J_1 = \frac{P}{4\pi F^2}; \quad p_1 = \sqrt{Jz} = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{P}{4\pi z}}$$

Опишем вокруг C сферу радиуса F_1 . Как видно из фиг. 1, эллиптическое зеркало перекрывает только часть излучаемой сферической волны, заключенную в сферическом поясе III с углами раскрытия $\alpha_{3\max}$ и $\alpha_{3\min}$.

Сходящаяся, после двухкратного отражения волна, вырезает на сферической поверхности радиуса F_1 и центром C так же сферический пояс Π , но с углами раскрытия $\alpha_{2\max}$ и $\alpha_{2\min}$. Вся энергия, прошедшая через поверхность сферического пояса Π , пройдет через сферический пояс Π , но распределение ее по Π будет зависеть от соотношения поверхностей элементарных поясов Π и Π' :

$$\sigma_2 = 2\pi F_1^2 \sin \alpha_2 d\alpha_2; \quad \sigma_3 = 2\pi F^2 \sin \alpha_3 d\alpha_3.$$

В этом случае функция распределения давления по поверхности сходящейся волны будет

$$\Phi(\alpha) = \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_2}} = \frac{F p_1}{F_1 p_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_3 d\alpha_3}{\sin \alpha_2 d\alpha_2}}.$$

Из геометрических соотношений находим связь между α_2 и α_3 :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{(e_1 - 1)(1 + e)}{(e_1 + 1)(1 - e)} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}, \quad \text{где } e \text{ — эксцентриситет эллипсоида, } e_1 \text{ — эксцентриситет гиперболоида.}$$

Выражая это соотношение через $\cos \alpha_2$ и $\cos \alpha_3$ и находя производную $\partial \cos \alpha_3 / \partial \cos \alpha_2$, мы получаем

$$\Phi(\alpha) = \frac{p_1 F [(e_1 - e)^2 - (1 - e e_1)^2]}{p_0 F_1 [(e_1 - e)^2 + (1 - e e_1)^2 - 2(e_1 - e)(1 - e_1 e) \cos \alpha_2]}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай, соответствующий условию $e_1 = 1/e$ и, следовательно, $\Phi(\alpha) = \text{const}$, что, как показано в работе [1], соответствует наилучшим условиям фокусировки по давлению. Из выражения (1) путем интегрирования при $r = 0$ мы получаем распределение давления вдоль оптической оси системы:

$$|p(F + \eta, 0)| = p_1 k F \left| \frac{\sin \left[\frac{k\eta}{2} (\cos \alpha_{2\max} - \cos \alpha_{2\min}) \right]}{k\eta/2} \right|, \quad (3)$$

где

$$\cos \alpha_{2\min} =$$

$$= \frac{(e_1^2 - 2e_1 - 1) \cos \alpha_{2\max} - 2e_1}{\sqrt{(e_1 - 1)^4 + 4e_1^2 - 4e_1(e_1^2 + 2e_1 - 1) \cos \alpha_{2\max} + 4e_1^2(2e_1 - 1) \cos^2 \alpha_{2\max}}}, \quad (4)$$

причем

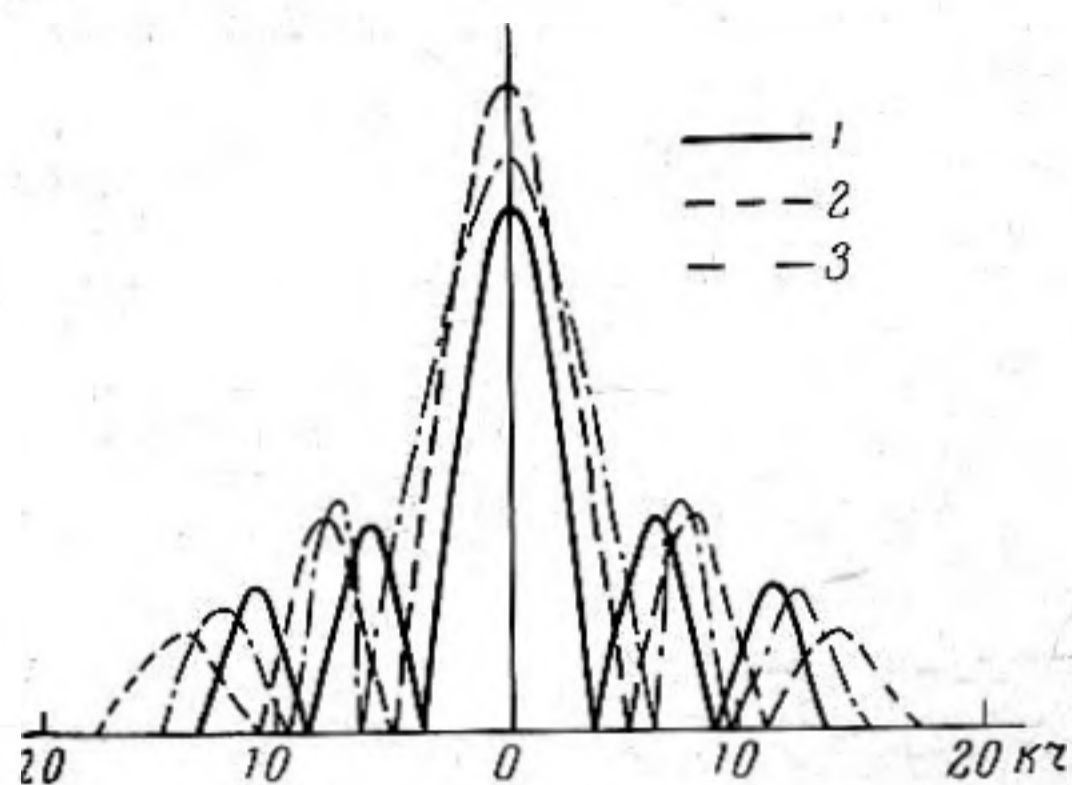
$$\cos \alpha_{2\max} = \frac{(e_1^2 + 1) \cos \alpha_{1\max} + 2e_1}{2e_1 \cos \alpha_{1\max} + e_1^2 + 1}, \quad (5)$$

где α_{\max} — угол раскрытия фокусирующей системы.

Для нахождения распределения в фокальной плоскости, т. е. при $\eta = 0$, для функции Бесселя в формуле (1) используем ее выражение в виде степенного ряда [4]. Проведя ряд преобразований, мы получаем выражение для давления в фокальной плоскости в виде, удобном для расчета на электронно-вычислительной машине:

$$p(r) = p_1 k F \cos \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{(kr)^2}{2} \right]^n}{n!(2n+1)!!} \sum_{h=0}^n \frac{(2k-1)!!}{2^h k!} (1 - \cos^2 \alpha)^h \Bigg|_{\alpha=\alpha_{2\max}}^{\alpha=\alpha_{1\min}} \quad (6)$$

Для формулы (6) была составлена программа на языке «Алгол-60». Результаты численного расчета на ЭВМ «Минск-2» для различных e_1 и $\alpha_{2\max}$, проведенные с точностью до 10^{-7} , приведены на фиг. 3, где $e_1 = 2,4; 2,0; 1,8$ соответственно.



Фиг. 3

Для некоторых частных случаев выражение для поля в фокальной плоскости может быть получено в виде простых аналитических выражений. Пусть $\sin \alpha_{2\max} \approx \alpha_{2\max}$; тогда путем прямого интегрирования получаем

$$p(F, r) = p_1 k F \left| \frac{\alpha_{2\max} J_1(kr \sin \alpha_{2\max}) - \alpha_{2\min} J_1(kr \sin \alpha_{2\min})}{kr} \right|. \quad (7)$$

Если $|kr \sin \alpha_{2\max}| \ll 1$, то разлагая функцию Бесселя в формуле (1) в ряд и ограничиваясь при интегрировании двумя первыми членами, мы получаем

$$|p(F, r)| = p_1 k F \left[1 - \left(\frac{kr}{4} \right)^2 (\cos \alpha_{2\min} - \cos \alpha_{2\max}) + \left(\frac{kr}{12} \right)^2 (\cos^3 \alpha_{2\min} - \cos^3 \alpha_{2\max}) \right]. \quad (8)$$

Найдем выражение для коэффициента усиления K в виде функции геометрических параметров системы. Как известно, коэффициент усиления по давлению характеризует отношение давления в центре фокального пятна к давлению в этой же точке при отсутствии зеркала, т. е. $K_p = p(f, 0) / p_2$, где p_2 — давление прямой волны. Из геометрических соображений ясно, что $p_2 = p_1 (e_1 - 1) / (e_1 + 1)$, а из формулы (1) при $r = 0$ и $\eta = 0$ мы получаем $p(f, 0) = p_1 k F (\cos \alpha_{2\min} - \cos \alpha_{2\max})$; следовательно,

$$K_p / k F = \left(\frac{e_1 + 1}{e_1 - 1} \right) (\cos \alpha_{2\min} - \cos \alpha_{2\max}). \quad (9)$$

Используя связь между F и радиусом входного зрачка системы R , находим

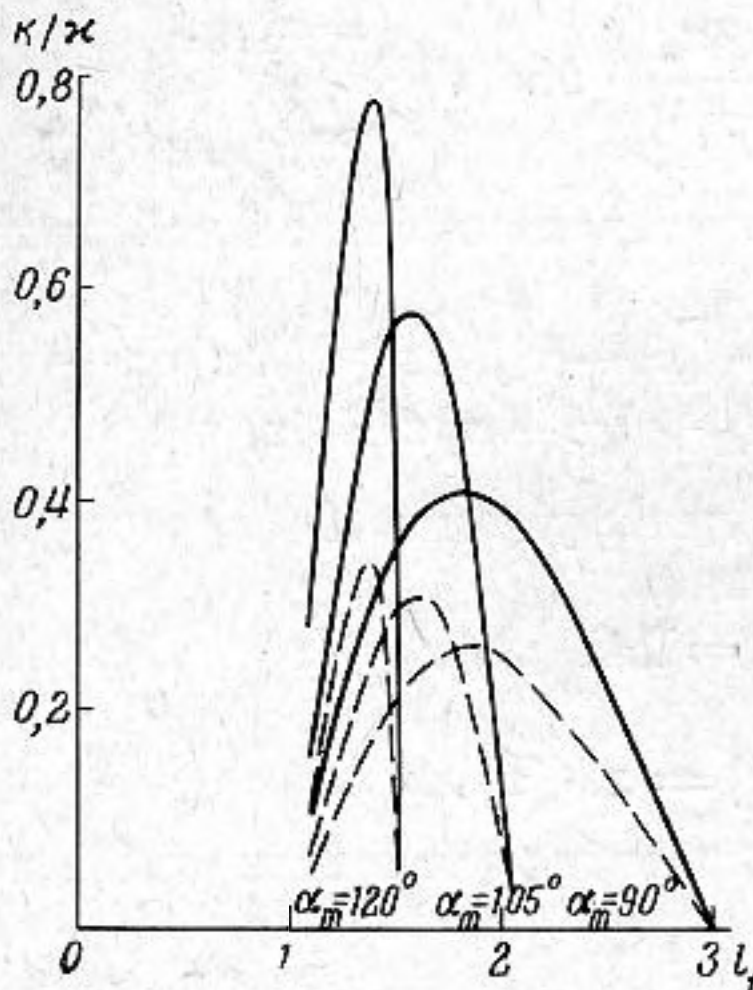
$$K_p / k R = \frac{e_1 - \cos \alpha_{2\max}}{(e_1 - 1) \sin \alpha_{2\min}} (\cos \alpha_{2\min} - \cos \alpha_{2\max}). \quad (10)$$

На фиг. 4, где $\kappa = kF$ — сплошная линия; $\kappa = kR$ — пунктирная, приведены результаты расчета, проведенного на ЭВМ «Минск-2» по формулам (9) и (10). Как видно из полученных результатов, K_p при определенных значениях e_1 достигает максимума, причем тем более остро, чем больше угол раскрытия системы. Существование максимума K_p по e_1 при выполнении условий $R = \text{const}$, $e_1 = 1/e$, $F = 2c_1$ объясняется тем, что телесный угол охвата источника фокусирующим зеркалом, пропорциональный количеству

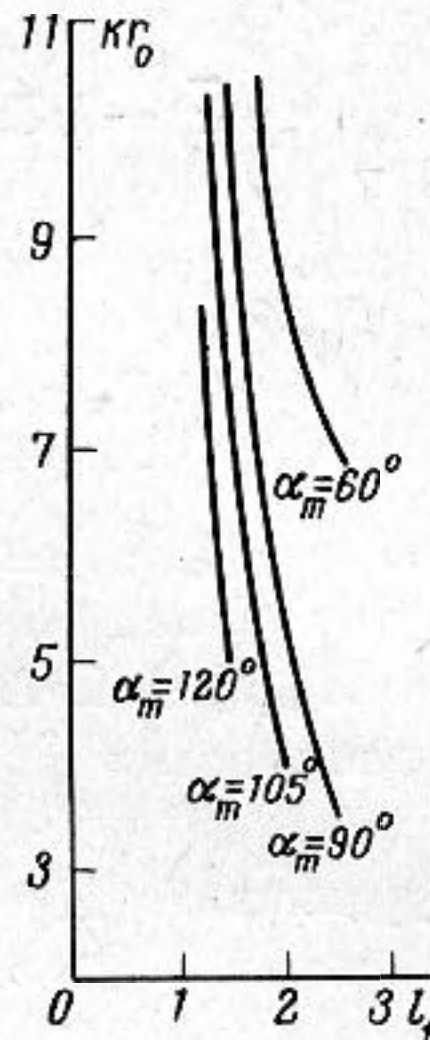
фокусируемой энергии и равный

$$\Omega = 2\pi(\cos \alpha_{3 \min} - \cos \alpha_{3 \max}) \quad (11)$$

при изменении e_1 приходит через максимум. Так как при $e_1 = 1/e$ $\alpha_{3 \min} = \alpha_{2 \min}$; $\alpha_{3 \max} = \alpha_{2 \max}$, то из выражений (9) и (10) видно, что максимальное значение K_p строго соответствует максимальному значению Ω .



Фиг. 4



Фиг. 5

Оценка размеров фокального пятна проводилась по результатам численного расчета по выражению (6). На фиг. 5 приведена зависимость kr_0 от e_1 при фиксированных углах раскрытия $\alpha_{1 \max}$. Видно, что с ростом как e_1 , так и $\alpha_{1 \max}$, что соответствует уменьшению ширины кольцевого входного зрачка, величина kr_0 уменьшается. Минимальное значение $kr_0 = 3,6$ получено для $e_1 = 2,4$ и $\alpha_{1 \max} = 90^\circ$.

Анализ полученных результатов показывает, что в тех случаях, когда требуется достижение максимального k_p при минимальном kr_0 оптимальными геометрическими параметрами системы при $R = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ являются $\alpha_{1 \max} = 90^\circ$ и $e_1 = 2,0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Распределение давления в фокальной плоскости, определяемое выражением (1) при $\eta = 0$ может быть получено в виде следующего ряда:

$$p(r) = p_1 k F \left\{ J_0(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n 2^{2n} (n!)^2}{(kr)^{2n+2}} \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^{2k}}{2^{2k-1} k! (k-1)!} + u J_1(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n 2^{2n} (n!)^2}{(kr)^{2n+2}} \right. \\ \left. \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right\} \Bigg|_{\alpha=\alpha_{1 \max}}^{\alpha=\alpha_{2 \max}}, \quad (12)$$

если функция $\Phi(\alpha)$ представима в виде

$$\Phi(\alpha) = \cos \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin^{2n} \alpha. \quad (13)$$

В формуле (12) используется обозначение $u = kr \sin \alpha$.
 Действительно, если обозначить

$$A_n(x) = \int_0^x t^{2n+1} J_0(t) dt, \quad (14)$$

то из формул (1) и (14) следует

$$p(\bar{r}) = p_1 k F \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(kr)^{2n+2}} A_n(u) \Big|_{\alpha=\alpha_{1\max}}^{\alpha=\alpha_{2\max}} \quad (15)$$

Используя известное соотношение для произвольной цилиндрической функции $E_\nu(z)$ [4],

$$\int z^{\mu+1} E_\nu(z) dz = -(\mu^2 - \nu^2) \int z^{\mu-1} E_\nu(z) dz + z^{\mu+1} E_{\nu+1}(z) + (\mu - \nu) z^\mu E_\nu(z) \quad (16)$$

в случае $\nu = 0$ и $E_0(z) = J_0(z)$, для функции $A_n(x)$ получаем конечно-разностное уравнение первого порядка:

$$A_n(x) + 4n^2 A_{n-1}(x) = 2nx^{2n} J_0(x) + x^{2n+1} J_1(x) \quad (17)$$

при начальном условии

$$A_0(x) = x J_1(x). \quad (18)$$

Решая уравнение (17) с начальными условиями (18), получаем для $A_n(x)$:

$$A_n(x) = (-1)^n 2^{2n} (n!)^2 \left[J_0(x) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k-1} k! (k-1)!} + x J_1(x) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right] \quad (19)$$

Подстановка выражения (19) в формулу (15) дает выражение (12).

Идея получения распределения давления в фокальной плоскости $p(\bar{r})$ через функции Бесселя нулевого и первого порядков с использованием тождества (16) для $\Phi(\alpha)$, представимых в виде (13), была предложена в работе Тартаковского [5]. Однако, представив A_n в виде:

$$A_n(x) = x^{2n+1} J_1(x) - \frac{x^{2n+2} n}{2(n+1)} U_n(x),$$

он свел задачу к нахождению решения конечно-разностного уравнения для $U_n(x)$:

$$U_n(x) + \frac{4(n^2 - 1)}{x^2} U_{n-1}(x) = -J_0(x) \frac{4(n-1)}{x^2} - J_1(x) \frac{8(n+1)n}{x^3}$$

при начальном условии $U_0(x) = 2J_1(x)/x$. Решение полученного конечно-разностного уравнения им написано не было.

Сравнивая выражение (12) и (6), легко увидеть, что вычисление поля в фокальной области проще вести по формуле (6). Кроме того, при $kr \ll 1$ нельзя считать непосредственно по формуле (12) без дополнительных ее преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. М., Изд-во АН СССР, 1949.
2. E. Olofsson. An ultrasonic optical mirror system. Acustica, 1963, 13, 5, 361—367.
3. P. Debye. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nahe eines Brennpunktes oder einer Brennlinie. Ann. Phys., 1909, 30, 4, 775—776.
4. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, М., ИЛ., 1949.
5. Б. Д. Тартаковский. Звуковое поле в фокальной плоскости сходящихся сферических пучков. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 96—100.

Акустический институт АН СССР
 Москва

Поступила в редакцию
 6 апреля 1966 г.