

УДК 534.21

НОРМАЛЬНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

А. Е. Вовк, В. В. Гудков

Дисперсионное уравнение для продольных волн, распространяющихся вдоль упругого цилиндра, поверхность которого свободна от напряжений, было выведено Похгаммером [1], им же впервые было получено аналитическое решение этого уравнения для случая, когда длина распространяющейся волны велика по сравнению с радиусом цилиндра; это решение совпадает с результатами элементарной теории [2].

Численные решения, которые только и возможны при произвольном соотношении между длиной волны и радиусом цилиндра, были получены лишь в последние годы [3—5].

Было найдено, что дисперсионное уравнение имеет множество корней, являющихся собственными значениями рассматриваемой краевой задачи; каждому собственному значению соответствует собственная функция, определяющая распределение деформации поперечного сечения цилиндра. В работе [4] была рассчитана фазовая скорость нулевой нормальной волны для ряда значений коэффициента Пуассона ν ; в работе [3] для $\nu = 0,29$ (алюминий) рассчитаны фазовые и групповые скорости первых трех нормальных волн.

В настоящей работе рассчитываются фазовые скорости и затухание нормальных волн для цилиндрического волновода из резиноподобного материала $\nu \cong 0,5$ как с учетом сдвиговых потерь η^* , так и для $\eta = 0$. Заметим, что сдвиговые потери при расчете фазовых скоростей и затухания нормальных волн были впервые учтены в работе [6].

Дисперсионное уравнение продольных колебаний свободного упругого цилиндра можно записать в виде

$$(1 - \bar{\gamma}) [\bar{\gamma}\varphi(\bar{x}) - \bar{\alpha}] + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})^2\varphi(\bar{y}) = 0, \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\varphi(u) = uJ_0(u) / J_1(u), \quad \bar{x} = k_l b \sqrt{2\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}, \quad \bar{y} = k_l b \sqrt{1 - \bar{\gamma}},$$

k_l — волновое число продольных волн в материале волновода, b — радиус цилиндра; $J_0(u)$, $J_1(u)$ — функции Бесселя нулевого и 1-ого порядка

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda}{2\bar{\mu}} = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad (2)$$

λ — первый коэффициент Ламе, $\bar{\mu}$ — второй коэффициент Ламе (модуль сдвига) **, $\eta = \alpha_2 / \alpha_1$ — коэффициент сдвиговых потерь, $\bar{\gamma} = (\bar{k} / k_l)^2$, $\bar{k} = k_1 + ik_2$ — искомое волновое число продольных волн цилиндрического волновода.

* Величина коэффициента потерь входит в выражение для комплексного модуля сдвига $\bar{\mu} = \mu_0(1 - i\eta)$, где μ_0 — модуль сдвига без учета потерь. Все резиноподобные материалы характеризуются большими значениями η .

** Черта сверху показывает, что величина комплексная.

На ЭЦВМ рассчитывались корни уравнения (1) по методике, описанной в работе (7). Считались значения величины $\bar{\gamma}$, определяющей величину \bar{k} , в зависимости от $k_1 b$ при разных α .

Выбранные для расчетов численные значения параметров $\bar{\alpha}$ и η соответствуют резиноподобным материалам ($|\alpha| \approx 10^2$).

При $k_1 b = 0$ уравнение (1) имеет единственный конечный корень $\bar{\gamma}_0 = \bar{\alpha}(2\bar{\alpha} - 1) / 3\bar{\alpha} - 2^*$, значение этого корня определяет скорость распространения и затухание бесконечно длинных волн в цилиндре и совпадает с результатами элементарной теории стержней [2]. Для всех других $k_1 b \neq 0$ уравнение (1) имеет счетное число корней.

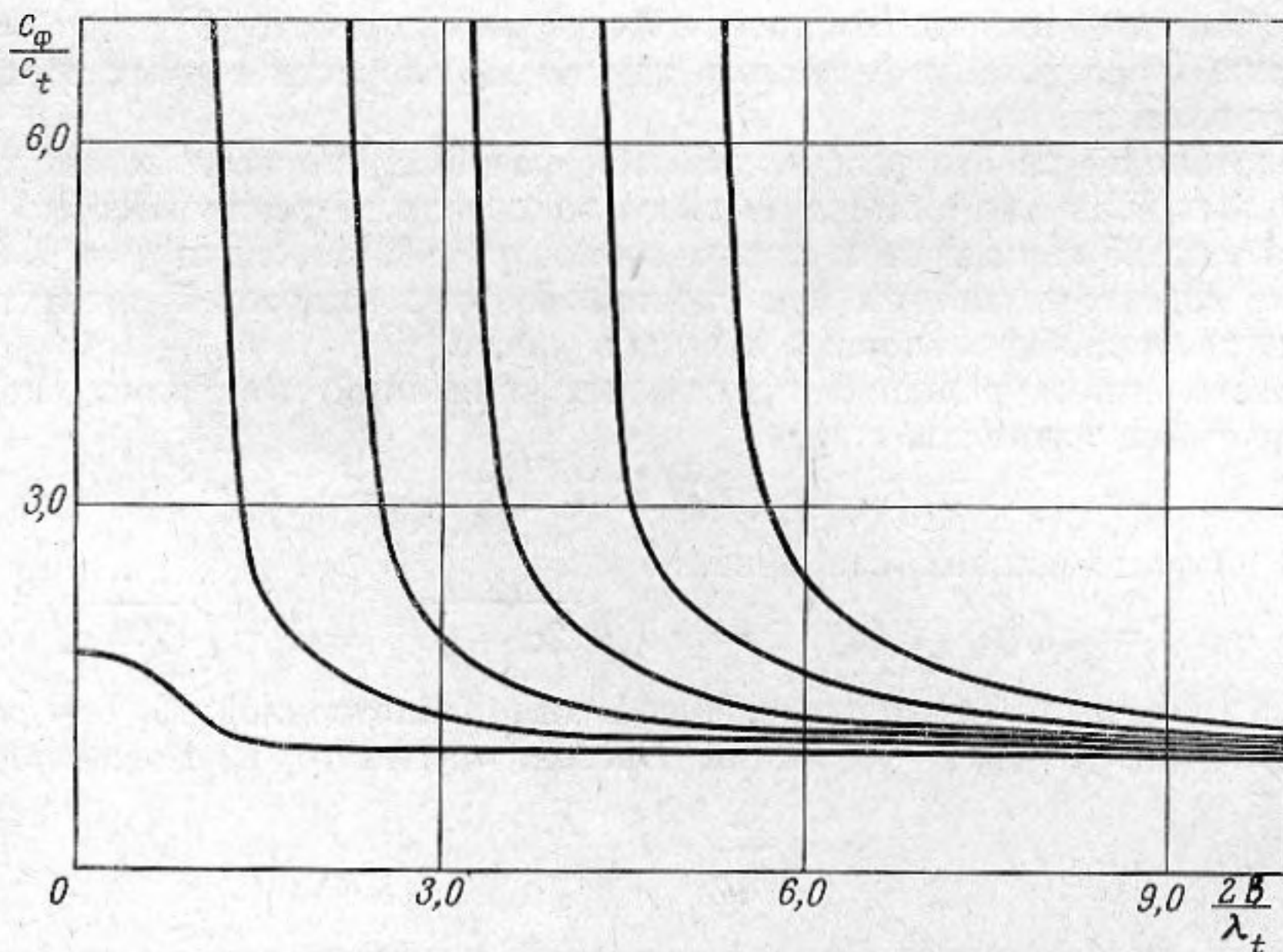
В нулевом приближении решение уравнения (1) было выбрано в форме

$$\bar{\gamma}_n = 2\bar{\alpha} - \frac{1}{(k_1 b)^2} \left(\pi n - 2\bar{\alpha} \frac{\ln 4\pi n}{\pi n |\bar{\alpha}|} \right)^2 + O(1) \quad (3)$$

пригодной в области больших значений параметра $k_1 b$ и $n \geq 1$.

Полученные по этой формуле нулевые приближения значения $\bar{\gamma}_n$ уточнялись при помощи итерационного процесса. Для вычисления $\bar{\gamma}_n$ при значениях $k_1 b < 1$ интервал $(1, k_1 b)$ разбивался на достаточно малые части длины h и значения $\bar{\gamma}_n(1 - jh)$ ** вычислялись итеративно, причем за нулевое приближение принималось значение $\bar{\gamma}_n^{(0)}(1 - jh) = \bar{\gamma}_n[1 - (j - 1)h]$. В качестве основного итерационного метода применялся метод, основанный на обратной интерполяции [8, 9].

Часть результатов выполненных расчетов приведены на нижеследующих фигурах. На фиг. 1 приведена зависимость $\frac{c_\phi}{c_t} = \sqrt{2\alpha/\bar{\gamma}}$ от параметра $2b/\lambda_t$, вычисленная для первых шести корней уравнения (1) при



Фиг. 1

$\alpha = 200$, $\eta = 0$. c_ϕ — фазовая скорость нормальных волн, c_t , λ_t — скорость и длина волны сдвиговых волн в материале волновода. Как видно из фигуры, при малых значениях $2b/\lambda_t$ (низкие частоты) имеется только одна нормальная волна, которую можно назвать нулевой; с увеличением пара-

* Это значение принималось в качестве исходного значения для нулевой ветви, вычислявшейся в выбранном диапазоне $k_1 b$, как и все последующие ветви, итеративно (см. ниже).

** j — целое число: 1, 2, 3...

метра $2b / \lambda_t$ появляются следующие нормальные волны, причем каждая нормальная волна начинается с бесконечной фазовой скорости. При больших значениях $2b / \lambda_t$ (высокие частоты) скорость нулевой нормальной волны стремится к $c_\phi \approx 0,95 c_t$, что соответствует скорости волн Рэлея — c_p [2], а скорость всех последующих нормальных волн стремится к скорости сдвиговых волн.

Аналогичные результаты были получены в работе [5] при расчете симметричных нормальных волн бесконечного слоя из резиноподобного материала. Отрицательные (соответствующие экспоненциально затухающим ближним полям) и комплексные значения $\bar{\gamma}$, приведенные в работе [5], нами не рассчитывались, хотя отдельные точки, подтверждающие существование такого рода корней, при расчете были получены.

На фиг. 2, а, б приведены значения c_ϕ / c_t и $k_2 b$ — затухания на длину радиуса волновода первых пяти нормальных волн для $\bar{\alpha} = 100 + 10 i$ ($\eta = 0, 1$). Характер зависимости величины c_ϕ / c_t (фиг. 2, а) от параметра $2b / \lambda_t$ для нулевой волны (кривая 1) такой же, как и для действительного α ($\eta = 0$). Величина затухания $k_2 b$ (фиг. 2, б) нулевой волны в начале слабо осциллирует, а затем с ростом параметра $2b / \lambda_t$ стремится к величине затухания волны Рэлея [6] (величина k_2 — постоянна, соответственно, $k_2 b$ линейно растет с ростом параметра $2b / \lambda_t$).

Фазовые скорости c_ϕ / c_t всех следующих нормальных волн при $\frac{2b}{\lambda_t} \rightarrow 0$ — стремятся к нулю, с ростом параметра $2b / \lambda_t$ каждая из них имеет максимум, величина которого тем больше, чем выше номер волны, и при больших значениях параметра $2b / \lambda_t$ фазовые скорости всех волн асимптотически стремятся к значению фазовой скорости сдвиговой волны c_t^* . Затухание этих волн при $\frac{2b}{\lambda_t} \rightarrow 0$ имеет конечную величину, тем большую, чем больше номер нормальной волны, с ростом параметра $2b / \lambda_t$ величины $k_2 b$ сначала уменьшаются, а затем стремятся к величине затухания сдвиговой волны (поскольку $c_p \cong 0,955 c_t$, на графиках эти значения практически сливаются).

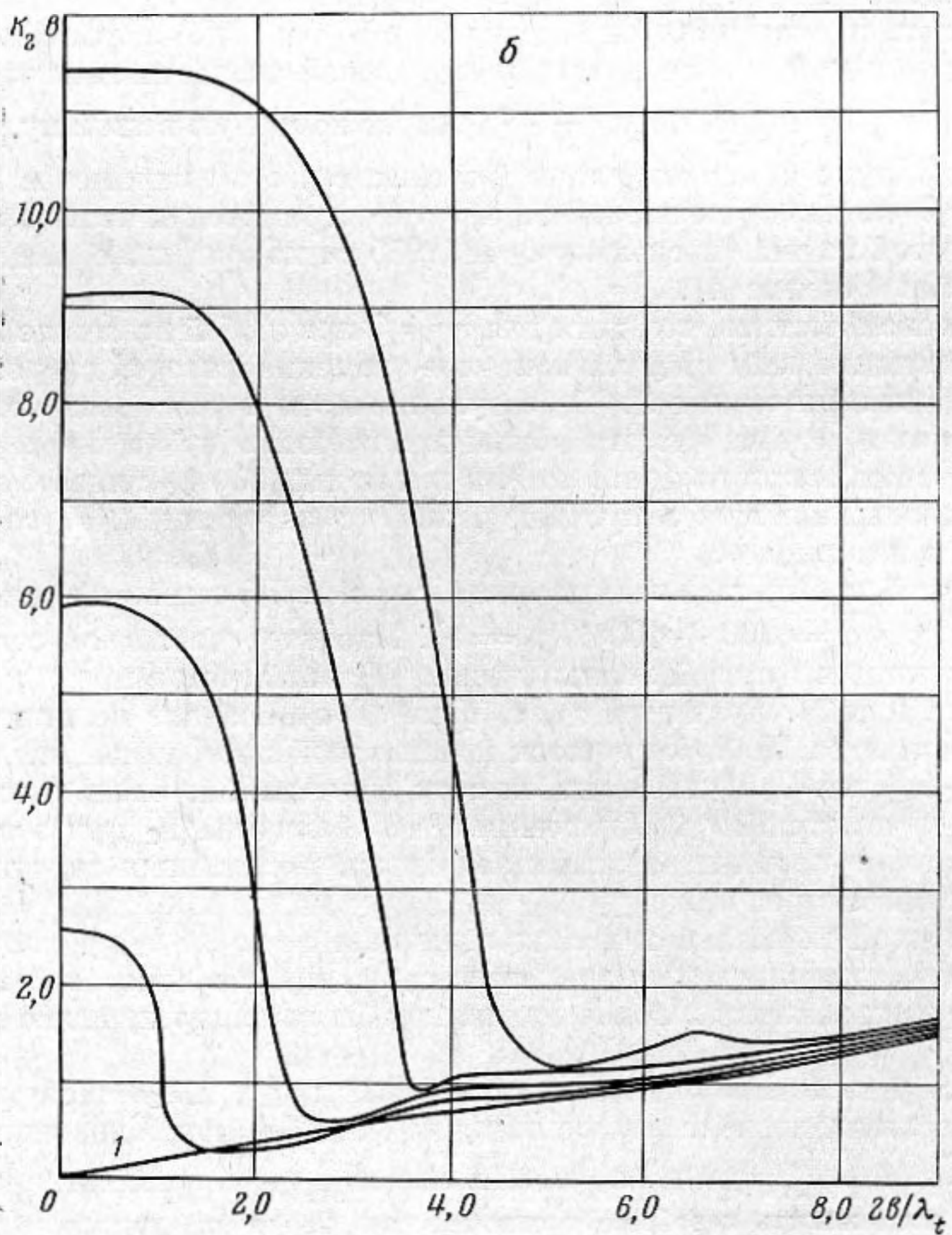
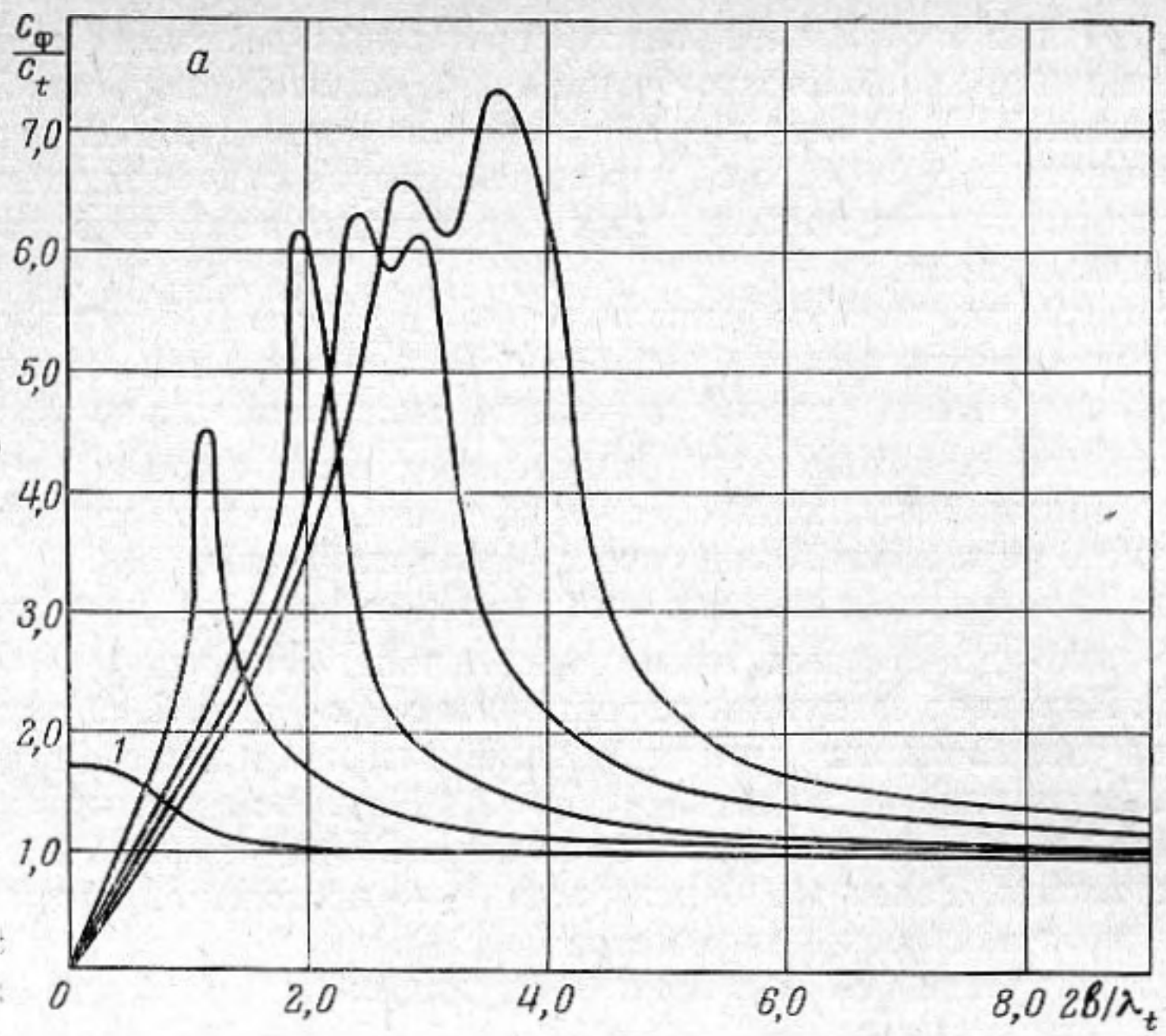
Интересно отметить, что, хотя для $\eta \neq 0$ при любой величине $2b / \lambda_t$ для всех нормальных волн имеется конечное значение фазовой скорости, однако, при малых значениях $2b / \lambda_t$ затухание всех нормальных волн, кроме нулевой, столь велико, что эти волны практически не распространяются. Таким образом, и при наличии потерь для малых $2b / \lambda_t$ существует только одна распространяющаяся нулевая волна (с затуханием, обусловленным потерями в материале).

На фиг. 3, а, б приведены значения c_ϕ / c_t и $k_2 b$ первых пяти нормальных волн для $\bar{\alpha} = 100 + 100 i$ ($\eta = 1$). Характер частотной зависимости этих величин для нулевой волны (кривая 1) иной, чем в предыдущих случаях (фиг. 1 и 2). Величина c_ϕ / c_t фиг. (3, а) вначале осциллирует, а с ростом параметра $2b / \lambda_t$ стремится к некоторой постоянной величине; величина $k_2 b$ (фиг. 3, б) после небольших осцилляций, линейно возрастает с ростом параметра $2b / \lambda_t$; напомним, что величина k_2 при этом принимает некоторое постоянное значение. Смысл постоянных значений c_ϕ / c_t и $k_2 b$ будет рассмотрен ниже.

Для первой нормальной волны величины c_ϕ / c_t и $k_2 b$ с ростом параметра $2b / \lambda_t$ стремятся не к значению c_ϕ / c_t и $k_2 b$ в сдвиговой волне, а к значению этих величин в волне Рэлея, как бы замещая нулевую волну фигур 1 и 2.

Характер частотной зависимости величин c_ϕ / c_t и $k_2 b$ следующих нормальных волн аналогичен показанному на фиг. 2 — при больших значениях

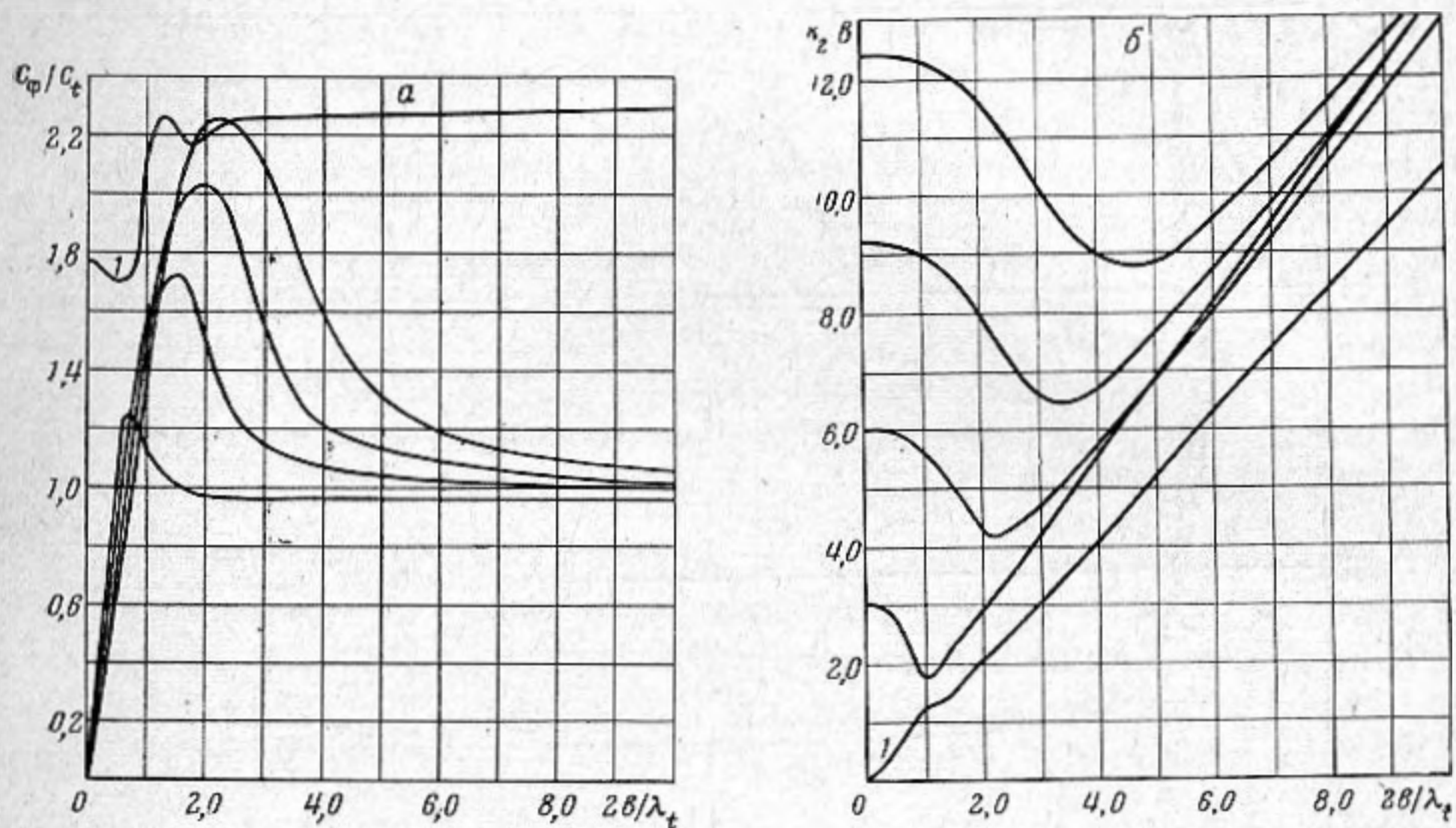
* Следует заметить, что точная проверка результатов при расчете уравнения (1) исключает возможность переброса с одной ветви корня на другую. В частности, приведенные на фиг. 2 осцилляции в максимумах величин c_ϕ / c_t , действительно, соответствуют рассчитываемым ветвям.



Фиг. 2

$2b/\lambda_t$ эти величины стремятся к значениям соответствующих величин в сдвиговой волне.

Из приведенных результатов (фиг. 1—3) следует, что величина коэффициента потерь η существенно влияет на характер частотной зависимости фазовой скорости и затухания нулевой нормальной волны. Поскольку эта волна представляет наибольший интерес вследствие малого, по сравнению с другими волнами, затухания на низких частотах ($2b/\lambda_t$ — мало), а также вследствие сравнительно простого ее возбуждения при экспериментах [2], то нами были более подробно рассчитаны параметры этой волны для ряда значений η .



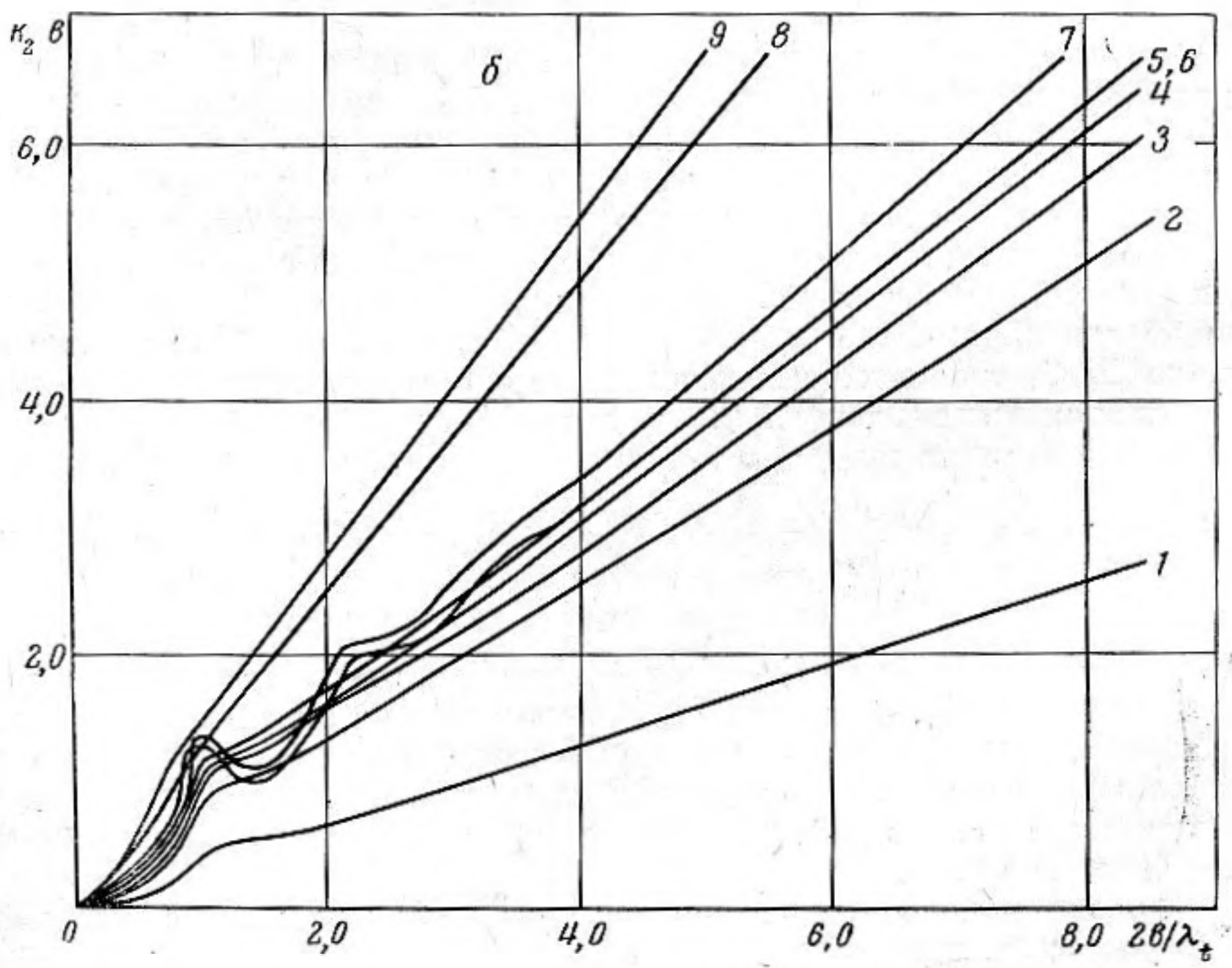
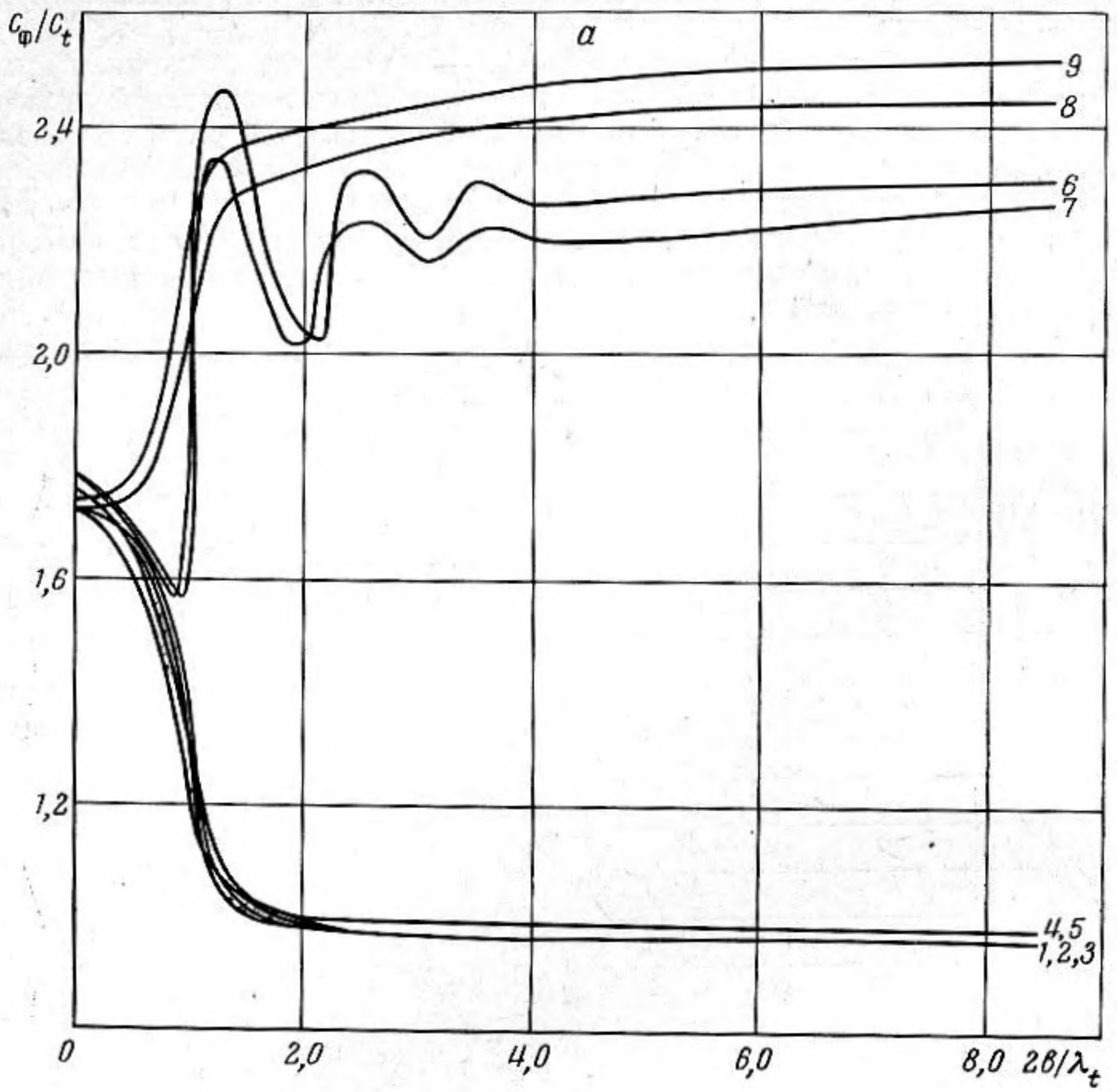
Фиг. 3

На фиг. 4, а, б приведены результаты этих расчетов для $\lambda/\mu_0 = 200$ и $\eta = 0,2$ (кривые 1); 0,4 (кривые 2); 0,45 (кривые 3); 0,5 (кривые 4); 0,525 (кривые 5), 0,545 (кривые 6); 0,6 (кривые 7); 1,5 (кривые 8); 2 (кривые 9). Из фигур видно, что при малых значениях $\eta < 0,54$ частотная зависимость фазовой скорости c_p/c_t аналогична случаю $\eta = 0$; 0,1 (фиг. 1, 2); с ростом параметра $2b/\lambda_t$ как величина c_p/c_t , так и $k_2 b$ стремятся к значению этих величин в рэлеевской волне [2]. Для средних значений η величины c_p/c_t и $k_2 b$ сначала осциллируют, с ростом же параметра $2b/\lambda_t$ стремятся к некоторым новым постоянным значениям. При больших значениях коэффициента потерь $\eta > 1,5$ все осцилляции сглаживаются, а величины c_p/c_t и $k_2 b$ асимптотически стремятся к предельным значениям.

Для выяснения физического смысла этих предельных значений рассмотрим уравнение (1) при $k_1 b \rightarrow \infty$. В общем случае нетрудно показать [4], что при $k_1 b \rightarrow \infty$ уравнение (1) переходит в уравнение $\bar{\gamma}^3(1 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\gamma}^2 2\bar{\alpha}(3\bar{\alpha} - 1) - 4\bar{\alpha}^3 \bar{\gamma} + \bar{\alpha}^4 = 0$, которое совпадает с уравнением волн Рэля [2]. В работах [2, 4] показано, что для всех существующих материалов это уравнение имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Общепринято величину скорости волны Рэля определять по значению действительного корня, при этом комплексные корни не учитываются.

Для резиноподобных материалов ($|\alpha| \gg 1$) эти корни с большой точностью имеют следующие значения:

$$\gamma_1 = 2,19\alpha; \quad \gamma_2 = 0,4049\alpha + i0,2541\alpha; \quad \gamma_3 = 0,4049\alpha - i0,2541\alpha.$$



Фиг. 4

Для комплексных $\bar{\alpha}$ их можно написать в виде:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1 &= 2,19(\alpha_1 + i\alpha_2), \quad \bar{\gamma}_2 = (0,4049\alpha_1 - 0,254\alpha_2 + \\ &\quad + i(0,4049\alpha_2 + 0,254\alpha_1), \\ \bar{\gamma}_3 &= (0,4049\alpha_1 + 0,254\alpha_2) + i(0,4049\alpha_2 - 0,254\alpha_1).\end{aligned}$$

Сравнение величин этих корней для рассматриваемых нами значений α с приведенными выше значениями c_ϕ / c_t и $k_2 b$ показывает, что первый корень $\bar{\gamma}_1$, соответствует общепринятой волне Рэлея. Именно к параметрам этой волны стремятся при малых значениях η параметры нулевой, а при больших значениях η — первой нормальных волн. При больших значениях коэффициента потерь η параметры нулевой волны асимптотически стремятся к значению второго корня $\bar{\gamma}_2$.

Интересно отметить, что аналогичные описанным результатам — результаты были получены в работе [6] при расчете фазовых скоростей и затухания нормальных волн свободного безграничного слоя из резиноподобного материала, являющегося одним из вариантов упругого волновода. Там также отмечалось влияние величины коэффициента потерь при сдвиге на характер частотной зависимости и предельные значения фазовых скоростей и затухания нулевой и первой симметричных нормальных волн, но сопоставления полученных результатов с корнями уравнения волн Рэлея не было приведено.

Приведенные результаты расчета, особенно в части стремления значения фазовой скорости и затухания нулевой нормальной волны при $\eta > 0,54$ к значению — $\bar{\gamma}_2$, заслуживают экспериментальной проверки.

В заключение авторы выражают благодарность Л. А. Ладыженскому и В. В. Тюткину за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pochhammer. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner schwingungen in einen unbegrenzter isotroper Kreiszylinder. J. für die reine und angewandte Mathematik, 1876, 81, 324, 330.
2. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1955.
3. R. M. Davies, A critical study of the Hopkins bar. Philosoph. trans. 1948, A, 240, 375—381.
4. D. Bancroft. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars, Phys. Rev., 1941, 59, 588—593.
5. H. I. Naake, K. Tamm. Sound propagation in plates and rods of rubber elastic materials. Acustica, 1958, 8, 2, 65—76.
6. O. Weis. Über die Schallausbreitung in verlustbehafteten medien mit komplexen Schub und Kompressionsmodul. Acustica, 1959. 9, 5, 387—398.
7. Дж. Н. Ланс. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.
8. И. С. Березин и Н. П. Жуков. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1960.
9. А. М. Островский. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
30 мая 1966 г.