

УДК 534.138

**РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ
В ОСЕЕНОВСКОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИЯ**

Д. Б. Дианов, А. А. Подольский, В. И. Турубаров

Среди ряда факторов, определяющих процесс акустической коагуляции аэрозолей, существенную роль может играть асимметрия поля скоростей обтекания частиц, приводящая к возникновению гидродинамических сил Осена. Впервые на это было обращено внимание в работе [1], где был дан приближенный расчет величины изменения расстояния между одинаковыми частицами за период звуковой частоты.

В настоящей работе рассматривается задача о сближении двух неодинаковых сферических частиц в осееновском режиме обтекания с учетом изменения расстояния между частицами в течение периода вследствие различия в амплитудах и фазах их колебательного движения.

Движение частиц в звуковом поле в осееновском режиме обтекания описывается системой уравнений:

$$m_i \cdot \frac{du_i}{dt} = 6\pi\eta V_i R_i \left(1 + \frac{3R_i}{8\nu} |V_i| \right) \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь m_i — масса частицы радиуса R_i , $V_i = u_{gi} - u_i$ — разность скоростей среды и частицы (скорость обтекания), η , ν — соответственно динамическая и кинематическая вязкости среды. Система (1) может также быть представлена в виде

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{\tau_i} u_i = \frac{1}{\tau_i} u_{gi} + \frac{3R_i}{8\nu\tau_i} V_i |V_i|, \quad (2)$$

где $\tau_i = \frac{2\rho_p R_i^2}{9\eta}$ — время релаксации частицы; ρ_p — плотность частицы,

$$u_{gi} = U_0 \sin \omega t + v_{ik}. \quad (3)$$

Величина v_{ik} учитывает изменение колебательной скорости среды в месте расположения i частицы вследствие влияния поля обтекания k -ой частицы. Поле скоростей обтекания в осееновском режиме описывается уравнениями [2]

$$v_r = -\frac{A_0}{r^2} + \frac{A_0 e^{-\frac{|V|r(1+\cos\theta)}{2\nu}}}{r^2} \left[1 + \frac{|V|}{2\nu} r(1-\cos\theta) \right], \quad (4)$$

$$v_\theta = \frac{A_0 |V|}{2r\nu} \sin\theta e^{-\frac{|V|}{2\nu} r(1+\cos\theta)}$$

где $A_0 = \frac{3\nu R V}{2|V|} \left(1 + \frac{3R}{8\nu} |V| \right)$, r — расстояние между частицами, θ —

угол между радиусом-вектором r и положительным направлением оси x . В отличие от работы [2] выражения (4) написаны для того случая, когда частица движется вдоль оси x со скоростью $-V$.

Ограничиваясь рассмотрением осевого взаимодействия частиц и областью $r \gg v/|V|$, получим при $\theta = 0$

$$v_{ik} = v_r = -\frac{3V_k R_k v}{2|V_k| r^2} \left(1 + \frac{3R_k |V_k|}{8v} \right), \quad (5)$$

и при $\theta = \pi$

$$v_{ik} = -v_r = -\frac{3R_k V_k}{2r} \left(1 + \frac{3R_k |V_k|}{8v} \right). \quad (6)$$

Здесь и далее при $i = 1, k = 2$; при $i = 2, k = 1$.

В качестве решений уравнений (2) в первом приближении примем выражения для скоростей движения изолированных частиц в звуковом поле в осееновском режиме обтекания [3]:

$$u_i^{(4)} = q_i U_0 \sin(\omega t - \psi_i), \quad V_i^{(4)} = l_i U_0 \cos(\omega t - \psi_i), \quad (7)$$

где

$$q_i = \frac{\mu_i + h_i n_i^2}{\sqrt{1 + 2h_i n_i^2 + h_i^2 n_i^4}}; \quad l_i = \frac{n_i}{\sqrt{1 + 2h_i n_i^2 + h_i^2 n_i^4}}$$

— соответственно коэффициенты увлечения и обтекания частицы в осееновском режиме, $\psi_i = \text{arctg} \frac{n_i}{\mu_i + h_i n_i^2}$ — угол сдвига фазы между колеба-

тельными скоростями среды и частицы, $\mu_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau_i)^2}}$, $n_i = \frac{\omega \tau_i}{\sqrt{1 + (\omega \tau_i)^2}}$ —

соответственно коэффициенты увлечения и обтекания в стоксовском ре-

жиме [4], $h_i = \frac{9\rho_g U_0}{2\pi \rho_p \omega R_i}$, ρ_g — плотность среды.

Для вычисления v_{ik} положим, что изменение расстояния между частицами на протяжении периода значительно меньше самого расстояния. Тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + \Delta r} \approx \frac{1}{r_0} \left\{ 1 + \frac{U_0}{r_0 \omega} [q_2 \cos(\omega t - \psi_2) - q_1 \cos(\omega t - \psi_1)] \right\}, \quad (8)$$

где r_0 — расстояние между равновесными положениями частиц.

Поскольку в выражениях (3) v_{ik} представляют собой малые величины по сравнению с $U_0 \sin \omega t$, используем в формулах (5) и (6) для V решение (7) для скоростей обтекания изолированных частиц в осееновском режиме.

Ограничиваясь при вычислении v_{ik} членами, содержащими $1/r_0$ в степени, не выше второй, получим для $\theta = 0$

$$v_{ik} = -\frac{3vR_k}{2r_0^2} \frac{\cos(\omega t - \psi_k)}{|\cos(\omega t - \psi_k)|} - \frac{9R_k^2 l_k U_0}{16r_0^2} \cos(\omega t - \psi_k). \quad (9)$$

Разлагая v_{ik} в ряд Фурье по $\cos(\omega t - \psi_k)$ и ограничиваясь вследствие быстрого убывания коэффициентов при высших гармониках, первым членом разложения, приближенно получим

$$v_{ik} = A_i \cos(\omega t - \psi_k), \quad (10)$$

где

$$A_i = -\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{6vR_k}{\pi} + \frac{9R_k^2 l_k U_0}{16} \right).$$

Аналогично, для случая $\theta = \pi$

$$v_{ik} = a_i \cos(\omega t - \psi_k) + b_i' \cos(2\omega t - 2\psi_k) + b_i'' \cos(2\omega t - \psi_k - \psi_i) + c_i, \quad (11)$$

$$a_i = -\frac{3R_k l_k U_0}{2r_0} \left(1 + \frac{R_k l_k U_0}{\pi v} \right),$$

$$b_i' = (-1)^i \frac{3R_k l_k q_k U_0^2}{4r_0^2 \omega}, \quad b_i'' = (-1)^k \frac{3R_k l_k q_i U_0^2}{4r_0^2 \omega},$$

$$c_i = (-1)^k \frac{3R_k l_k U_0^2}{4r_0^2 \omega} [q_i \cos(\psi_i - \psi_k) - q_k].$$

В выражениях (11) опущены члены, содержащие U_0^3 , вследствие их малости по сравнению с остальными.

Используя формулы (3), (7), (10), (11) и пренебрегая учетом взаимодействия в нелинейном члене, систему уравнений (2) можно привести к следующему виду:

при $\theta = 0$

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt} + \frac{1}{\tau_i} u_i^{(2)} = \frac{1}{\tau_i} \left[U_0 \sin \omega t + \frac{3R_i}{8v} l_i^2 U_0^2 \cos(\omega t - \psi_i) \times \right. \\ \left. \times |\cos(\omega t - \psi_i)| + A_i \cos(\omega t - \psi_k) \right], \quad (12)$$

при $\theta = \pi$

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt} + \frac{1}{\tau_i} u_i^{(2)} = \frac{1}{\tau_i} \left[U_0 \sin \omega t + \frac{3R_i}{8v} l_i^2 U_0^2 \cos(\omega t - \psi_i) \times \right. \\ \left. \times |\cos(\omega t - \psi_i)| + a_i \cos(\omega t - \psi_k) + b_i' \cos(2\omega t - 2\psi_k) + \right. \\ \left. + b_i'' \cos(2\omega t - \psi_i - \psi_k) + c_i \right]. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) совпадают по форме с линейными уравнениями Брандта — Фройнда — Гидеманна; дополнительные члены в правых частях этих уравнений обусловлены приближенным учетом взаимного влияния полей обтекания частиц в осееновском режиме. Решение уравнений (12) и (13) имеет вид

при $\theta = 0$

$$u_1^{(2)} = q_i U_0 \sin(\omega t - \psi_i) + \mu_i A_i \cos(\omega t - \psi_k - \varphi_i) + F_i e^{-\frac{t-t_{01}}{\tau_i}}, \quad (14)$$

при $\theta = \pi$

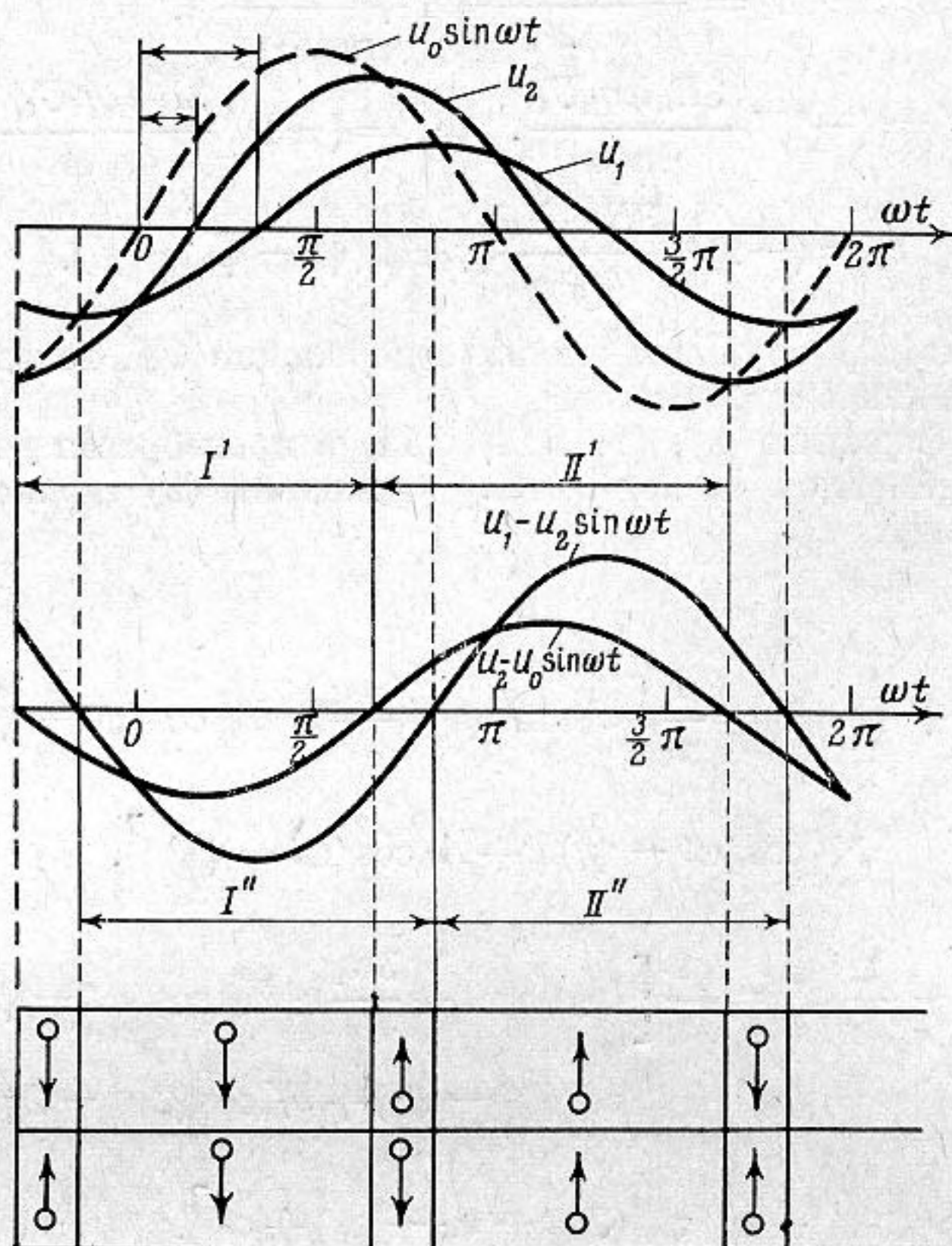
$$u_1^{(2)} = q_i U_0 \sin(\omega t - \psi_i) + a_i \mu_i \cos(\omega t - \varphi_i - \psi_k) + b_i' \mu_i^{(2\omega)} \cos(2\omega t - \varphi_i^{(2\omega)} - 2\psi_k) + b_i'' \mu_i^{(2\omega)} \cos(2\omega t - \psi_i - \psi_k - \varphi_i^{(2\omega)}) + c_i + G_i e^{-\frac{t-t_{02}}{\tau_i}} \quad (15)$$

Здесь

$$\mu_i^{(2\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega\tau_i)^2}}; \quad \varphi_i = \text{arctg } \omega\tau_i; \quad \varphi_i^{(2\omega)} = \text{arctg } 2\omega\tau_i.$$

Движение каждой частицы в течение одной половины периода описывается выражением (14), а в течение второй половины периода — выражением (15), t_{01} и t_{02} представляют собой начальные моменты времени в соответствующие полупериоды.

Положим для определенности, что индекс 1 относится к большей частице, а индекс 2 — к меньшей. Из рассмотрения фиг. 1 видно, что на участке I' скорость движения первой частицы и на участке II'' скорость движения второй частицы описываются выражениями (14), а на участке II' скорость движения первой частицы и на участке I'' скорость движения



Фиг. 1

второй частицы — выражениями (15). Приближенные границы участков приведены в таблице. В нижней части фигуры показаны направления скорости частицы 1 (внизу) и частицы 2 (вверху) относительно среды.

Номер участка	I'	II'	I''	II''
(Начало) $\omega t_{01}; \omega t_{02}$	$\psi_2 - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_2 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_1 - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$
Конец	$\psi_2 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_2 + \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\psi_1 + \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Для определения постоянных F_i и G_i будем исходить из условия равенства выражений (14) и (15) в моменты времени, когда k частица меняет направление скорости. С учетом данных таблицы получим

$$G_i = \frac{(-1)^k (a_i - A_i) n_i \mu_i (1 + e^{\pi/\omega\tau_i}) - [b_i' (n_i^{(2\omega)})^2 + b_i'' n_i^{(2\omega)} \sin(\psi_i - \psi_k + \varphi_i^{(2\omega)})] (1 - e^{\pi/\omega\tau_i})}{e^{-\pi/\omega\tau_i} - e^{\pi/\omega\tau_i}} \times$$

$$F_i = \frac{(-1)^k (a_i - A_i) n_i \mu_i (1 + e^{\pi/\omega\tau_i}) + [b_i' (n_i^{(2\omega)})^2 + b_i'' n_i^{(2\omega)} \sin(\psi_i - \psi_k + \varphi_i^{(2\omega)})] (1 - e^{\pi/\omega\tau_i})}{e^{-\pi/\omega\tau_i} - e^{\pi/\omega\tau_i}} \times$$

$$\times \frac{+ b_i'' n_i^{(2\omega)} \sin(\psi_i - \psi_k + \varphi_i^{(2\omega)}) (1 - e^{\pi/\omega\tau_i})}{e^{-\pi/\omega\tau_i} - e^{\pi/\omega\tau_i}} \quad (16)$$

где

$$n_i^{(2\omega)} = \frac{2\omega\tau_i}{\sqrt{1 + (2\omega\tau_i)^2}}$$

Выражения (14), (15) с учетом выражений (16) дают приближенные решения задачи о колебательном движении двух частиц в осееновском режиме обтекания. Интегрируя эти выражения в соответствующих пределах (см. табл.), можно получить формулы для постоянных (независимых от времени) составляющих скорости движения частиц.

$$\bar{u}_1 = \frac{-a_1 + A_1}{\pi} + \frac{c_1}{2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3R_2 l_2 U_0}{2r_0} \left(1 + \frac{R_2 l_2 U_0}{\pi v} \right) - \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{6R_2 v}{\pi} + \frac{9R_2^2 l_2 U_0}{16} \right) \right] - \frac{3R_2 U_0^2}{8r_0^2 \omega} l_1 l_2 (l_1 q_2 - q_1 l_2),$$

$$\bar{u}_2 = \frac{a_2 - A_2}{\pi} + \frac{c_2}{2} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{3R_1 l_1 U_0}{2r_0} \left(1 + \frac{R_1 l_1 U_0}{\pi v} \right) + \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{6R_1 v}{\pi} + \frac{9R_1^2 l_1 U_0}{16} \right) \right] - \frac{3R_1 U_0^2}{8r_0^2 \omega} l_1 l_2 (l_1 q_2 - q_1 l_2). \quad (17)$$

Формулы (17) получены путем интегрирования выражений для скоростей движения частиц за полный период. Более справедливым было бы исключить из области интегрирования участки, где не выполняется неравенство $r \gg v/|V|$, т. е. участки, где скорость обтекания возмущающей частицы близка к нулю. Однако погрешность, допущенная при включении этих участков в область интегрирования, незначительна по следующим причинам: во-первых, неточность допускается только в членах, содержащих $1/r_0^2$; во-вторых, в случае $r \gg v/V_{\max}$ продолжительность этих участков мала по сравнению с полным периодом, и, наконец, как видно из сравнения формул (5) и (10), при выбранном методе решения влияние соседней частицы на этих участках мало ($v_{ik} \cong 0$). Разность выражений (17) определяет постоянную скорость сближения частиц

$$\bar{u}_{12} = \frac{-(a_1 + a_2) + (A_1 + A_2)}{\pi} + \frac{c_1 - c_2}{2}. \quad (18)$$

Первый член в выражении (18) обусловлен асимметрией полей обтекания частиц в осееновском режиме, второй —

$$\frac{3(R_1 - R_2) l_1 l_2 U_0^2}{8r_0^2 \omega} (l_1 q_2 - q_1 l_2) -$$

обусловлен различием параметров колебательного движения частиц. Величина последнего члена совпадает с точностью до численного коэффициента $1/2$ со скоростью сближения частиц в стоксовском режиме обтекания [5]. Различие в численном коэффициенте объясняется тем, что в осееновском режиме каждая частица лишь половину периода подвергается воздействию поля второй частицы, убывающего пропорционально $1/r$ (во второй половине периода — $1/r^2$).

В случае одинаковых частиц выражение (18) существенно упрощается:

$$\bar{u}_{12} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{3RlU_0}{2r_0} \left(1 + \frac{RlU_0}{\pi v} \right) - \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{6Rv}{\pi} + \frac{9R^2lU_0}{16} \right) \right]. \quad (19)$$

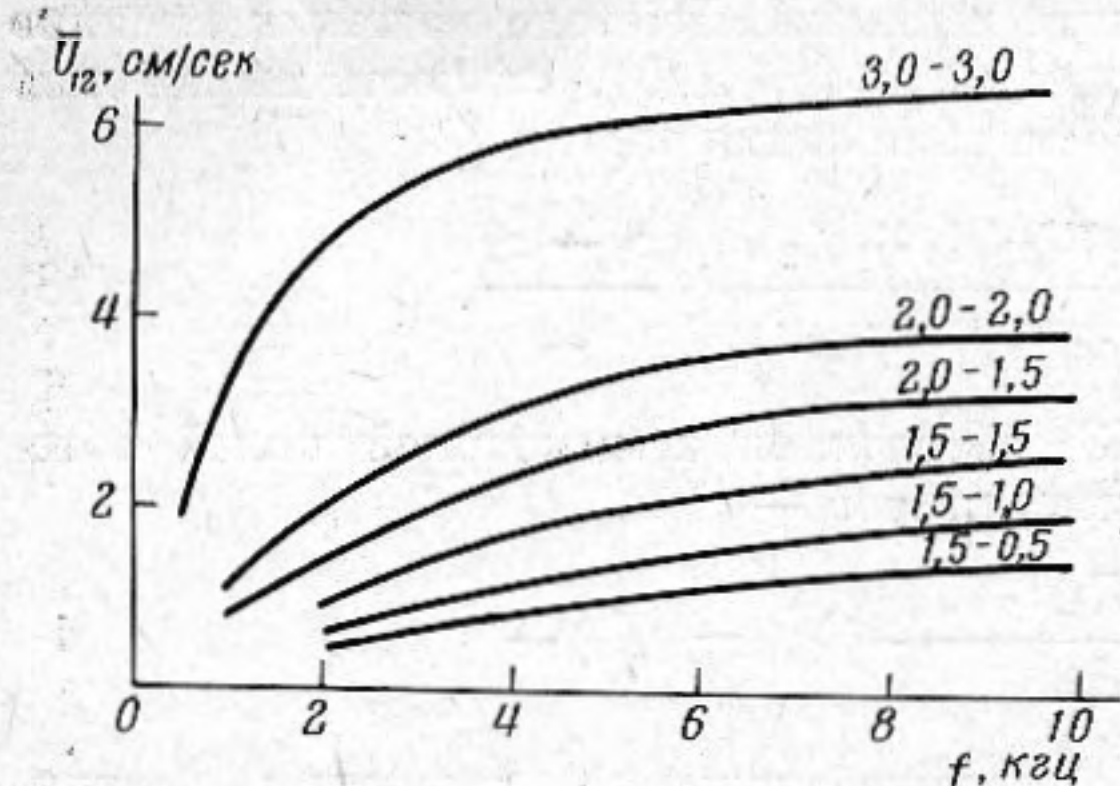
Выражение (19) показывает, что с ростом частоты скорость сближения асимптотически возрастает, приближаясь к постоянному значению. Этот результат физически может быть пояснен следующим образом. При низких частотах, когда степень обтекания частиц мала ($l \ll 1$), возмущения поля обтекания каждой частицы вследствие влияния соседней — незначительно. С повышением частоты скорость движения относительно среды увеличивается, что вызывает рост величины возмущения, вносимого каждой частицей в месте расположения другой частицы. Возрастание скорости сближения, обусловленное гидродинамическим взаимодействием в осееновском режиме обтекания будет продолжаться до тех пор, пока степень обтекания не станет равной единице*.

Полученные формулы (18), (19) могут быть использованы для расчетов при следующих ограничениях относительно амплитуды звукового поля:

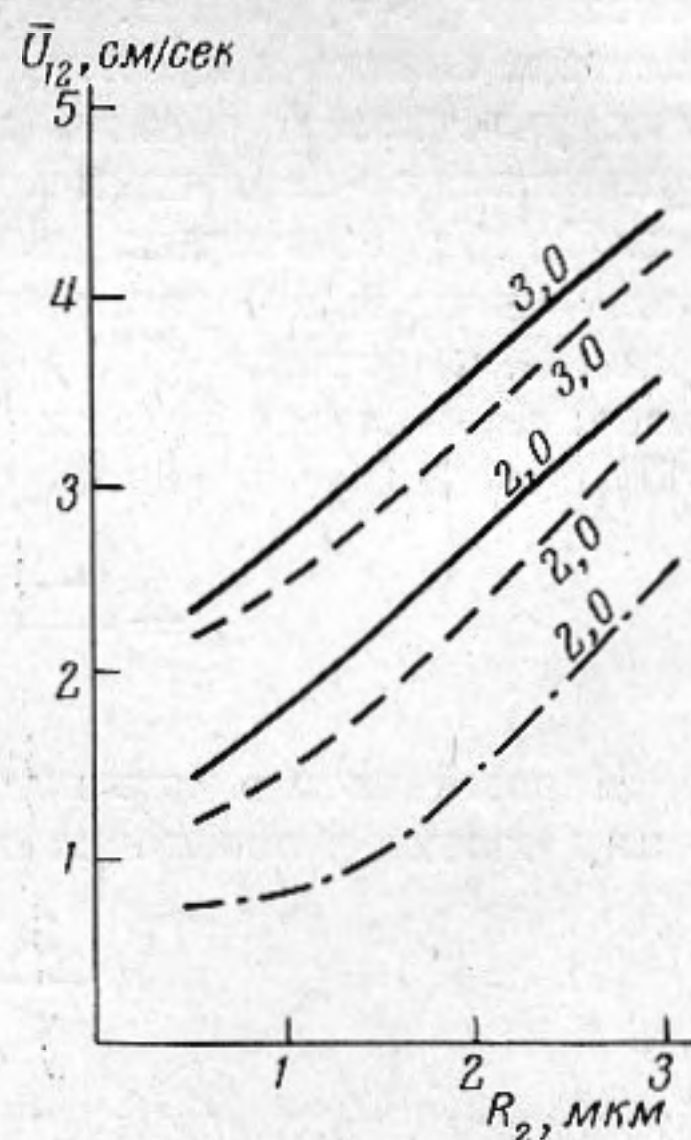
$$U_0 \leq (1 \div 2) \frac{v}{2R_i l_i}, \quad (20)$$

$$\frac{v}{l_i r_0} \ll U_0 \ll \frac{r_0 \omega}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)}}.$$

По формуле (18) с учетом ограничений (20) были произведены расчеты скоростей сближения пар частиц радиусов $0,5 \div 3,0$ мкм при среднем расстоянии между частицами $50 \div 200$ мкм в звуковом поле с амплитудой $0,5 \div 4,0$ м/сек на частотах $0,5 \div 10$ кгц. При расчетах были приняты следующие параметры газовой среды и аэрозольных частиц: $\rho_p = 1$ г/см³; $\rho_g = 1,29 \cdot 10^{-3}$ г/см³; $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5}$ н·сек/м. Расчеты показали, что в зависимости от параметров аэрозоля и акустического поля величина скорости сближения может изменяться от долей см/сек до нескольких десятков см/сек.



Фиг. 2

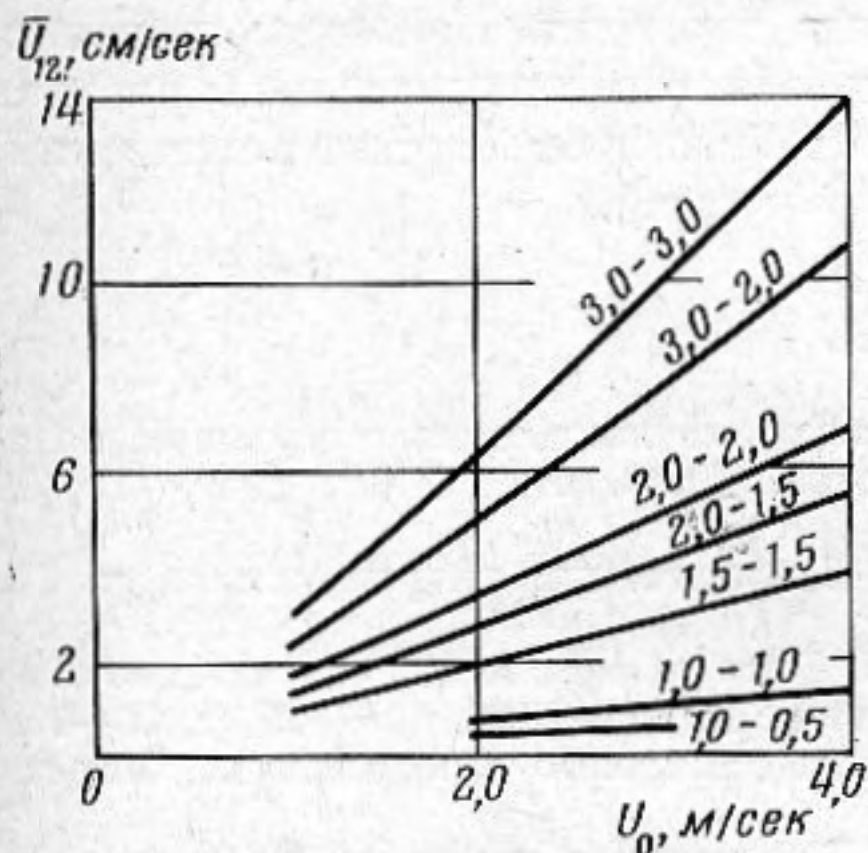


Фиг. 3

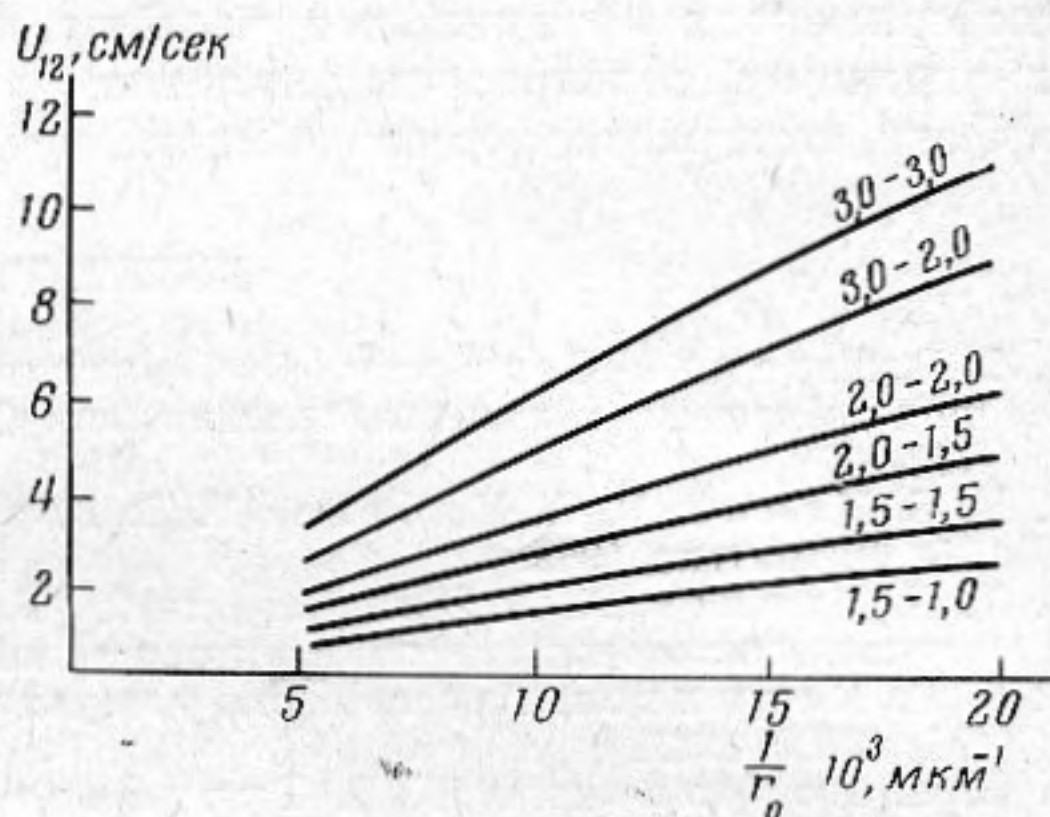
Часть результатов представлена в виде графиков на фигурах 2—5. На всех кривых цифрами указаны радиусы частиц в микронах.

* Отличие полученных результатов от приведенных в работе [1] связано, по-видимому, с неточным заданием начальных условий в последней.

На фиг. 2 приведены частотные зависимости скорости сближения пар частиц при $r_0 = 100$ мкм, $U_0 = 2,0$ м/сек. Видно, что скорости сближения монотонно растут с увеличением частоты, как для пар одинаковых, так и для пар неодинаковых частиц. Необходимо отметить, что отсутствие экстремума в частотной зависимости наблюдалось в всех просчитанных вариантах. С увеличением размеров каждой из взаимодействующих ча-



Фиг. 4



Фиг. 5

стиц скорость сближения растет. Это особенно хорошо видно из графиков фиг. 3, представляющих зависимость скорости сближения частиц радиусов R_1 и R_2 в функции от значения R_2 при $r_0 = 150$ мкм, $U_0 = 2,0$ м/сек. Здесь сплошные линии соответствуют частоте 10 кГц, штриховые — 5 кГц, штрихпунктирная — 2 кГц. Зависимость скорости сближения от амплитуды звукового поля, как видно из фиг. 4 ($r_0 = 100$ мкм; $f = 5$ кГц), близка к линейной. Это согласуется с результатами экспериментальных исследований ряда авторов [4]. На фиг. 5 представлены зависимости скорости сближения частиц в функции от расстояния между ними при $f = 5$ кГц, $U_0 = 2,0$ м/сек. Видно, что преобладающий вклад в величину скорости сближения вносят члены, пропорциональные $1/r_0$.

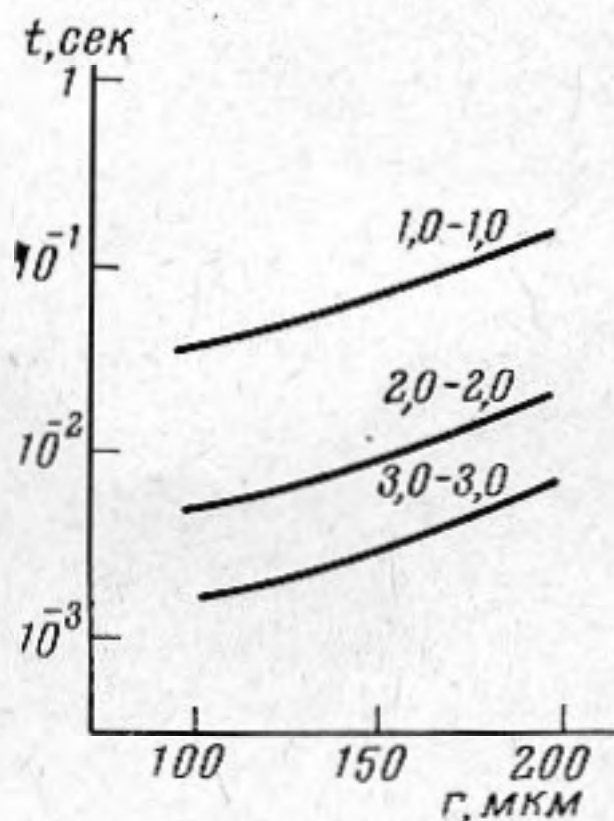
Проведенные расчеты показывают, что при рассмотрении задачи о сближении частиц в звуковом поле в осееновском режиме обтекания можно ограничиться приближением, учитывающим лишь члены, содержащие $1/r_0$ и U_0 в степени не выше первой. В этом случае \bar{u}_{12} определяется формулой

$$\bar{u}_{12} = \frac{3U_0}{2\pi r_0} (R_1 l_1 + R_2 l_2). \quad (21)$$

Основываясь на этой формуле, можно получить выражение для оценки времени сближения аэрозольных частиц с расстояния r_{02} до расстояния r_{01} :

$$t = \frac{\pi}{3U_0(R_1 l_1 + R_2 l_2)} (r_{02}^2 - r_{01}^2). \quad (22)$$

На фиг. 6 приведены зависимости времени сближения одинаковых частиц в функции от расстояния между ними при $f = 1$ кГц, $U_0 = 2,0$ м/сек. Видно, что при $r_0 = 100 \div 200$ мкм величина t не превышает $10^{-1} - 10^{-2}$ сек.



Фиг. 6

Таким образом, гидродинамическое взаимодействие частиц в осееновском режиме обтекания приводит к быстрому сближению частиц в звуковом поле и может являться одним из важнейших факторов обуславливающих акустическую коагуляцию аэрозоля. Характерной особенностью этого вида взаимодействия является слабая зависимость от частоты в широком частотном диапазоне. Осееновское взаимодействие не накладывает жесткие ограничения на выбор частоты озвучивания аэрозоля. Наблюдающиеся в экспериментах оптимальные частоты или области оптимальных частот, по-видимому, обусловлены влиянием других факторов (ортокинетический эффект, стоксовское взаимодействие, дрейфы и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Пшенай-Северин. О сближении аэрозольных частиц в звуковом поле под действием гидродинамических сил Осеена. Докл. АН СССР, 1959, 125, 4, 775—778.
2. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. II, М., Физматгиз, 1963.
3. Д. Б. Дианов, А. А. Подольский, В. И. Турубаров. Колебательное движение аэрозольных частиц в акустическом поле. Коллоид. ж., 1967, 29, 1, 69—75.
4. Е. П. Медников. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. А. А. Подольский, В. И. Турубаров. К теории сближения аэрозольных частиц в звуковом поле в стоксовском режиме обтекания. Акуст. ж., 1966, 12, 2, 266—269.

Ленинградский институт авиационного
приборостроения
Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
29 апреля 1966 г.