

УДК 534.29

**О ВЛИЯНИИ МИКРОПОТОКОВ, ВЫЗВАННЫХ ЗВУКОМ,  
НА МАССОПЕРЕДАЧУ В СИСТЕМЕ ГАЗОВЫЙ  
ПУЗЫРЕК — ЖИДКОСТЬ**

*О. А. Капустина, Ю. Г. Статников*

Известно, что причиной увеличения размеров газовых пузырьков в жидкости под действием ультразвуковых колебаний является «выпрямленная диффузия» [1]. Однако только этим эффектом механизм роста пузырька не исчерпывается. Под действием акустических колебаний у поверхности пузырька возникают микропотоки, осуществляющие перенос растворенного в жидкости газа к поверхности пузырька.

Сделаем попытку оценить влияние микропотоков на массопередачу в системе газовой пузырек — жидкость, рассмотрев одиночный пузырек газа в жидкости, насыщенной газом. Пусть центр пузырька неподвижен и совмещен с началом системы координат  $r, \theta$  (фиг. 1). Предположим, что радиус пузырька  $a$  меньше длины звуковой волны  $\lambda$  в жидкости и ограничимся рассмотрением линейных колебаний пузырька на нулевой моде.

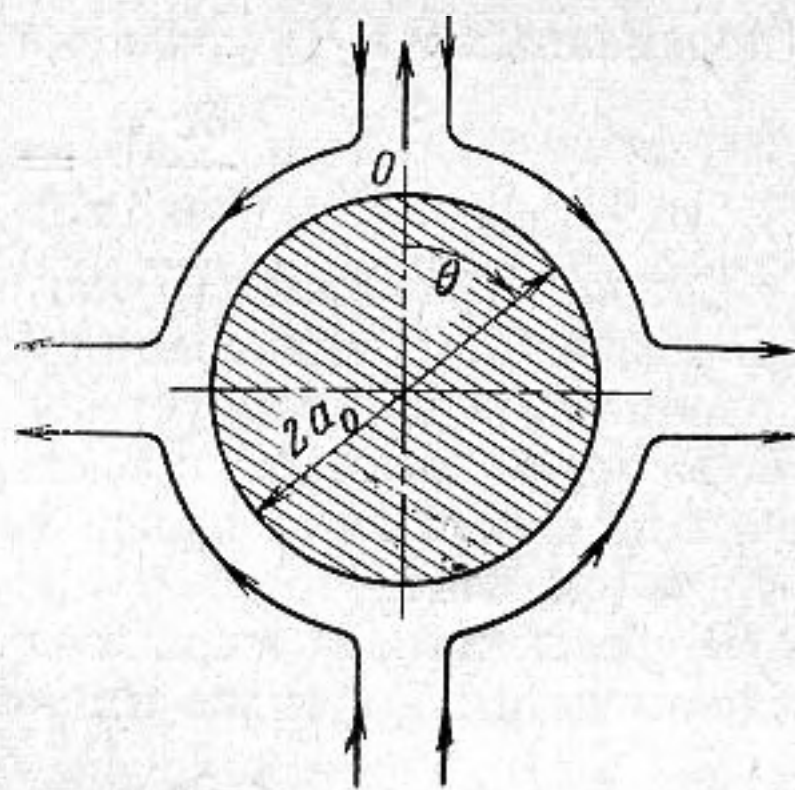
Мгновенное значение радиуса пузырька  $a(t)$  определяется выражением  $a(t) = a_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)$ , где  $a_0$  — радиус пузырька в состоянии покоя,  $\varepsilon$  — отношение амплитуды колебаний пузырька к начальному радиусу  $a_0$ ,  $\omega$  — частота звука. Задача о массообмене между пузырьком и окружающей средой описывается общим уравнением конвективной диффузии [2]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)c = D\nabla^2 c \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c(r, t) = c_\infty, \quad c(a_0, t) = c_s(1 + \varepsilon \sin \omega t), \quad c_s = c_0 \left( 1 + \frac{2\sigma}{P_A a_0} \right), \tag{2}$$

где  $c$  — концентрация растворенного в жидкости газа,  $D$  — коэффициент молекулярной диффузии,  $c_s$  — равновесная концентрация газа в жидкости при данном статическом давлении  $P_A$  и температуре,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\mathbf{u}$  — скорость движения среды, представляющая собой сумму скорости колебательного движения среды  $\mathbf{w}$  и скорость микропотока  $\mathbf{v}$ , т. е.  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ .



Фиг. 1

Усредним уравнение (1) и граничное условие (2) по времени и рассмотрим случай, когда член  $\langle w \nabla c \rangle$  меньше, чем  $\langle v \nabla c \rangle$ . (Символ  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени). Тогда уравнение (1) и граничные условия (2) преобразуются к виду:

$$v \nabla c = D \nabla^2 c, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c(r) = c_\infty, \quad c(a_0) = c_s. \quad (4)$$

Поскольку обычно в жидкостях типа воды диффузионное число Прандтля достаточно велико (около  $10^3$ ), уже при числах Рейнольдса, равных  $10^{-2}$ , число Пекле больше единицы ( $va_0/D \gg 1$ ) и для диффузионного пограничного слоя уравнение (3) имеет вид [2]

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}, \quad (5)$$

где  $v_r$  и  $v_\theta$  — нормальная и тангенциальная составляющие скорости микропотоков.

Для решения уравнения (5) используем стандартную подстановку Мизеса [3]  $r \rightarrow \Psi_1$ , где функция  $\Psi_1$  определена следующим образом:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}. \quad (6)$$

В переменных  $\theta$  и  $\Psi_1$  уравнение (5) принимает вид

$$\left( \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)_{\Psi_1} = D v_\theta r^3 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi_1^2}. \quad (7)$$

Так как уравнение (5), а, следовательно, и уравнение (7) описывает распределение концентрации только в пограничном слое вблизи пузырька, значение  $v_\theta$  в нем следует брать при значениях  $r$ , близких к  $a_0$ . Введем новую переменную  $y$ , представляющую расстояние от рассматриваемой точки до поверхности пузырька, положив  $y = r - a_0$  и будем считать, что  $y \ll a_0$  (см. фиг. 1).

В уравнении (7) выразим  $r$  через  $y$  и ограничимся членами первого порядка малости. Тогда мы имеем

$$\left( \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)_{\Psi_1} = D a_0^3 v_\theta|_{y=0} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi_1^2}. \quad (8)$$

В работе [4] было показано, что значение тангенциальной составляющей скорости движения среды на поверхности пузырька, т. е.  $v_\theta|_{y=0}$ , зависит от скорости колебания этой поверхности  $U_\xi$  и определяется формулой

$$v_\theta|_{y=0} = -\frac{U_\xi^2}{4\omega a_0} \sin 2\theta. \quad (9)$$

Подставляя значение  $v_\theta|_{y=0}$  в формулу (8), получаем

$$\left( \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)_{\Psi_1} = \frac{D a_0^3 U_L}{4} \sin 2\theta \sin^2 \theta \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi_1^2}, \quad U_L = \frac{U_\xi^2}{\omega a_0}. \quad (10)$$

Вводя новую переменную

$$t = -\frac{D a_0^3 U_L}{4} \int \sin 2\theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{D a_0^3 U_L}{8} \sin^4 \theta + C_1, \quad (11)$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования, мы получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi_1^2} \quad (12)$$

со следующими граничными условиями:

$$c = c_\infty \Psi_1 \rightarrow \infty, \quad c = c_s \Psi_1 \rightarrow 0, \quad t = t_0 = c \quad \Theta = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (12), удовлетворяющее граничным условиям (13), может быть написано в виде [5]

$$c = \frac{2(c_\infty - c_s)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Psi_1/2\sqrt{t-t_0}} e^{-z^2} dz + C_2. \quad (14)$$

Откуда

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right) \Big|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (c_\infty - c_s) \sqrt{\frac{U_L}{Da_0}} \cos \Theta. \quad (15)$$

Плотность диффузионного потока сквозь поверхность пузырька, т. е. число частиц, проходящих за 1 сек через 1 см<sup>2</sup> поверхности пузырька

$$j = D \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right) \Big|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (c_\infty - c_s) \sqrt{\frac{U_L \cdot D}{a_0}} \cos \Theta, \quad (16)$$

а полный поток газа сквозь поверхность пузырька получается из выражения (16) интегрированием по всей поверхности пузырька

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi a_0^2 \int_0^{\pi/2} j \sin \Theta d\Theta = \sqrt{2\pi} (c_\infty - c_s) a_0^2 \sqrt{\frac{U_L D}{a_0}}. \quad (17)$$

На фиг. 2, 1 представлена зависимость величины  $dm/dt$ , рассчитанной по соотношению (17), от отношения  $a_0/a_{\text{рез}}$ , где  $a_{\text{рез}}$  — резонансный радиус пузырька для частоты  $f$  звука. Величина колебательной скорости поверхности пузырька рассчитывалась по известному выражению

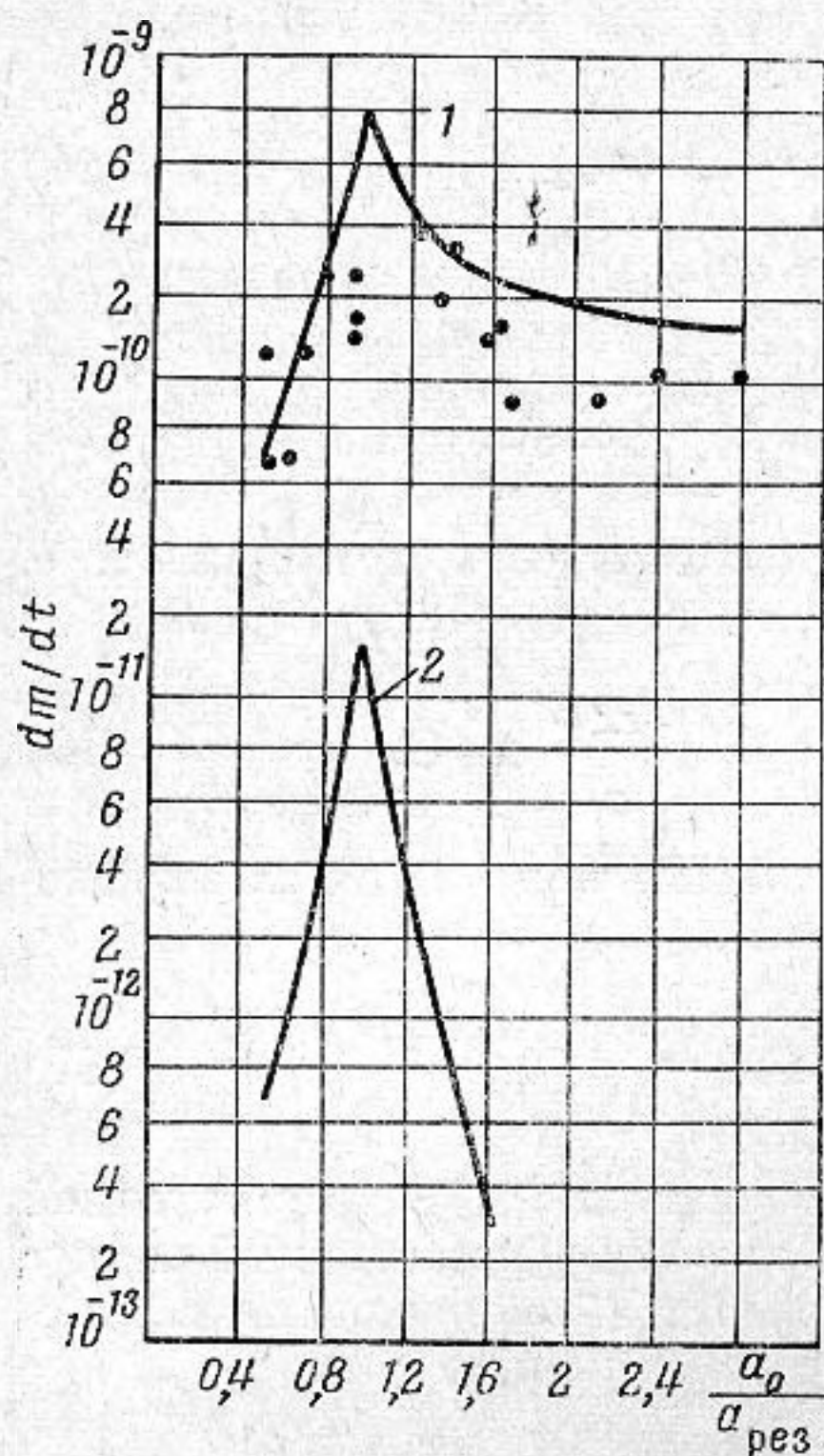
$$U_\xi = \frac{P_0}{\omega a_0 \rho_{\text{ж}} \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \delta^2}},$$

где  $P_0$  — амплитуда звукового давления,  $\rho_{\text{ж}}$  — плотность жидкости,  $\omega_p$  — резонансная частота пузырька,  $\delta$  — константа затухания. Интересно сопоставить теоретическую кривую 1 с результатами экспериментального исследования скорости роста одиночных газовых пузырьков под воздействием ультразвуковых колебаний. Исследования проводились на установке, описанной в работе [6] на частоте  $f = 26,5$  кгц ( $a_{\text{рез}} = 0,0124$  см) при постоянной амплитуде звукового давления 0,14 ат, измеряемой звукоприемником волноводного типа; чувствительная игла приемника служила базой, на которой располагался пузырек. Наблюдались пузырьки с начальными радиусами 0,007; 0,01; 0,018; 0,02; 0,03 и 0,035 см. Результаты эксперимента представлены на фиг. 2 точками. На той же фигуре приведена кривая 2, выражающая зависимость величины диффузионного потока газа в пузырек, определяемой «выпрямленной диффузией», от отношения  $a_0/a_{\text{рез}}$ . Расчет проводился согласно выражению, полученному в работе [1], с учетом поправки на резонансные свойства пузырька [6]

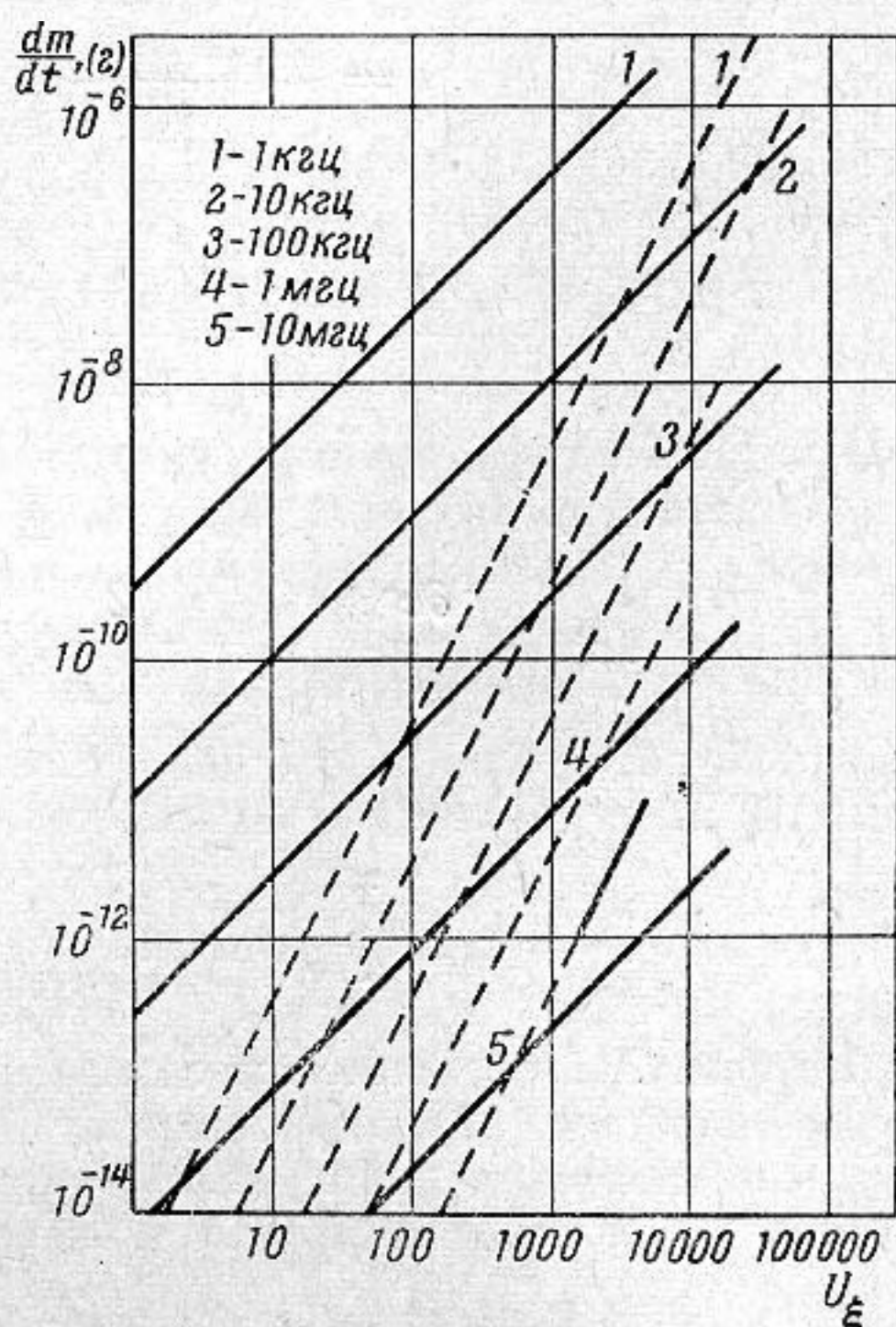
$$\frac{dm}{dt} = 24\pi D c_\infty \rho_{\text{г}} \left(\frac{U_\xi}{\omega a_0}\right)^2 a. \quad (18)$$

Из сопоставления представленных на фиг. 2 кривых следует, что микропотоки оказывают существенное влияние на массообмен. Особенно велика их роль при сравнительно небольших амплитудах колебаний пузырька. В самом деле, на фиг. 3 сопоставлены зависимости величин рассматриваемых диффузионных потоков от колебательной скорости поверхности пузырька на нескольких частотах, резонансных для рассматриваемых пу-

зырьков: 1, 10, 100, 1000 и 10000 кгц (соответственные размеры пузырьков 0,33; 0,033; 0,0033; 0,00033; 0,000033 см и прямые 1, 2, 3, 4 и 5 на фигуре). Видно, что при больших значениях колебательной скорости  $U_{\xi}$  поток, обусловленный выпрямленной диффузией (пунктирные линии на фиг. 3)



Фиг. 2



Фиг. 3

превалирует над потоком, вызванным микропотоками (сплошные линии). С увеличением частоты граничное значение колебательной скорости  $U_{\xi}'$ , при которой диффузионные потоки равны, уменьшается.

В заключение авторы выражают благодарность Л. Д. Розенбергу и Ю. Я. Богуславскому за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. Hsieh, M. Plesst. Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles. J. Acoust. Soc. America, 1965, 33, 2, 206—215.
2. В. Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
3. Л. Г. Лойцянский. Теория ламинарного пограничного слоя. М., ГТТИ, 1955.
4. Ю. Г. Статников. Микропотоки у газового пузырька в жидкости. Акуст. ж., 1967, 133, 464—466.
5. А. Н. Тихонов, Д. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., ГТТИ, 1953.
6. О. А. Капустина. Исследование влияния ультразвука на процесс роста воздушного пузырька в воде. Акуст. ж., 1965, 11, 1, 116—119.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступила в редакцию  
17 мая 1966 г.