

УДК 534.874

**ИЗМЕРЕНИЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ
АКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ**

Б. Е. Кинбер, В. Б. Цейтлин

В работе [1] было получено асимптотическое разложение для коэффициента передачи между двумя антеннами электромагнитных волн по степеням $1/kR$ (R — расстояние между антеннами, $k = 2\pi/\lambda$). В настоящей работе аналогичное разложение получено для акустических антенн и сделано сопоставление обоих случаев. Полученное разложение позволяет путем расчета исключить ошибки измерения диаграмм направленности в зоне Френеля, обусловленные конечным расстоянием между антеннами и их конечными размерами.

При расчете коэффициента передачи будем считать, что нам известны диаграммы направленности антенн — передающей F_I и приемной — F_{II} . Будем считать, что антенны могут быть разделены в пространстве плоскостью, т. е. находятся в разных полупространствах. Будем полагать, что диаграмма антенны I записана относительно начала координат, а диаграмма антенны II — относительно точки x, y, z ($x > 0$).

Как известно, в этом случае поле антенны I при $x > 0$ может быть записано в виде суперпозиции плоских волн

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_I(k_y, k_z) e^{i(\mathbf{kR})} \frac{dk_y dk_z}{kk_x}, \quad (1)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{dk_y dk_z}{kk_x} = d\Omega$$

в области $k_z^2 + k_y^2 \leq k^2$ $d\Omega$ можно трактовать как элемент телесного угла.

Функция F_I в окружности $k_y^2 + k_z^2 \leq k^2$ соответствует диаграмме направленности, т. е. может рассматриваться как спектр обычных плоских волн, а вне ее, в силу аналитичности F_I , или как аналитическое продолжение диаграммы в области комплексных углов или как спектр неоднородных волн.

Рассмотрим теперь реакцию антенны II на плоскую волну с амплитудой $E_0(k_y, k_z)$. Очевидно, что если I — комплексная амплитуда напряжения (тока) на выходных клеммах антенны, то $I = CF_{II}(k_y, k_z)E_0(k_y, k_z, x, y, z)$, где $E_0(k_y, k_z, x, y, z)$ — амплитуда и фаза плоской волны в точке (x, y, z) . C — постоянная, не зависящая от углов и расстояний, которая нам в последующем не понадобится.

Если спектр плоских волн, падающих на антенну II, непрерывен, то очевидно, что

$$I = C \int F_{II}E_0 d\Omega = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{II}E_0 \frac{dk_y dk_z}{kk_x}. \quad (2)$$

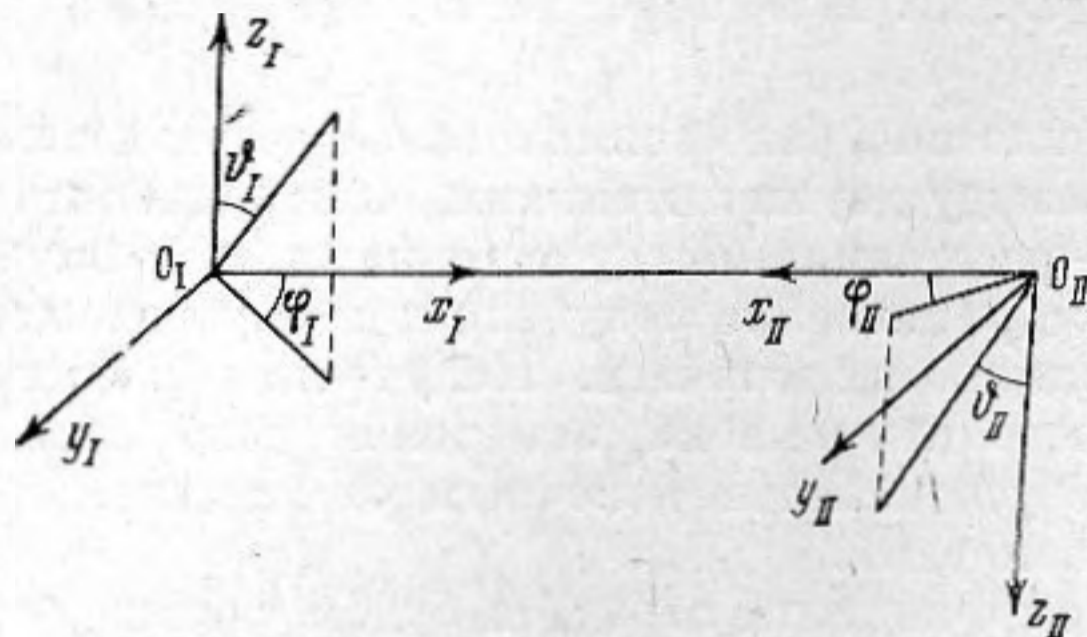
Переход от интегрирования по углам к интегрированию по k_y, k_z необходим, т. к. передающая антенна, кроме однородных волн, порождает и неоднородные волны, которые также могут быть приняты приемником. Поскольку из формулы (1) следует, что

$$E_0(k_y, k_z, x, y, z) = F_1(k_y, k_z) e^{i(\mathbf{kR})},$$

то искомая формула для коэффициента передачи имеет вид

$$I = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_I(k_y, k_z) F_{II}(k_y, k_z) e^{i(\mathbf{kR})} \frac{dk_y dk_z}{kk_x}. \quad (3)$$

Получим теперь асимптотическое разложение для коэффициента передачи (3) по степеням $1/kR$, что даст нам возможность исследовать ошиб-



Фиг. 1

ки измерения диаграмм направленности при малых расстояниях между антеннами.

Вычислять интеграл в формуле (3) мы будем в системе координат, ось x которой совпадает с прямой, соединяющей передающую и приемную антенны (фиг. 1). Фазовая функция (\mathbf{kR}) будет в этом случае осесимметричной. На этой же фигуре показаны сферические системы координат, в которых в дальнейшем будут выражены диаграммы направленности антенн. Расстояние между центрами антенн O_I и O_{II} обозначим через R . Вычисляя интеграл в формуле (3) методом стационарной фазы [2], получим

$$I = C \frac{2\pi i e^{ikR}}{kR} \left\{ 2F_I F_{II} - \frac{i}{kR} \left[\frac{\partial^2 (F_I F_{II})}{\partial k_y^2} + \frac{\partial^2 (F_I F_{II})}{\partial k_z^2} \right] - \frac{1}{(kR)^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^4 (F_I F_{II})}{\partial k_y^4} + 2 \frac{\partial^4 (F_I F_{II})}{\partial k_y^2 \partial k_z^2} + \frac{\partial^4 (F_I F_{II})}{\partial k_z^4} \right) - \frac{\partial^2 (F_I F_{II})}{\partial k_y^2} - \frac{\partial^2 (F_I F_{II})}{\partial k_z^2} \right] + O\left(\frac{1}{kR}\right)^3 \right\}. \quad (4)$$

Переходя здесь к переменным φ и ϑ по формулам

$$\frac{\partial^2}{\partial k_y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial k_z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}, \quad \frac{\partial^4}{\partial k_y^4} = \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial^4}{\partial k_z^4} = \frac{\partial^4}{\partial \vartheta^4} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}, \quad \frac{\partial^4}{\partial k_y^2 \partial k_z^2} = \frac{\partial^4}{\partial \vartheta^2 \partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

получим

$$\begin{aligned}
 I = C \frac{4\pi e^{ikR}}{kR} \left\{ F_I F_{II} - \frac{i}{2kR} \left[F_I \left(\frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^2} + \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \vartheta_{II}^2} \right) + F_{II} \left(\frac{\partial^2 F_I}{\partial \varphi_I^2} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial \vartheta_I^2} \right) + \right. \right. \\
 + 2 \left(\frac{\partial F_I}{\partial \vartheta_I} \frac{\partial F_{II}}{\partial \vartheta_{II}} + \frac{\partial F_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial F_{II}}{\partial \varphi_{II}} \right) - \frac{1}{8(kR)^2} \left[F_I \left(\frac{\partial^4 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^4} + \right. \right. \\
 + 2 \frac{\partial^4 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^2 \partial \vartheta_{II}^2} + \left. \frac{\partial^4 F_{II}}{\partial \vartheta_{II}^4} \right) + F_{II} \left(\frac{\partial^4 F_I}{\partial \varphi_I^4} + 2 \frac{\partial^4 F_I}{\partial \varphi_I^2 \partial \vartheta_I^2} + \left. \frac{\partial^4 F_I}{\partial \vartheta_I^4} \right) + \right. \\
 + 2 \frac{\partial^2 F_I}{\partial \vartheta_I^2} \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^2} + 2 \frac{\partial F_I}{\partial \varphi_I^2} \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \vartheta_{II}^2} + 6 \frac{\partial^2 F_I}{\partial \vartheta_I^2} \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \vartheta_{II}^2} + 6 \frac{\partial^2 F_I}{\partial \varphi_I^2} \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^2} + \\
 + 8 \frac{\partial^2 F_I}{\partial \varphi_I \partial \vartheta_I} \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \varphi_{II} \partial \vartheta_{II}} + \frac{\partial F_I}{\partial \vartheta_I} \frac{\partial F_{II}}{\partial \vartheta_{II}^3} + \frac{\partial^3 F_I}{\partial \vartheta_I^3} \frac{\partial F_{II}}{\partial \vartheta_{II}} + \frac{\partial F_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial^3 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^3} + \\
 + \frac{\partial^3 F_I}{\partial \varphi_I^3} \frac{\partial F_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \frac{\partial F_I}{\partial \vartheta_I} \frac{\partial^3 F_{II}}{\partial \vartheta_{II} \partial \varphi_{II}^2} + \frac{\partial F_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial^3 F_{II}}{\partial \varphi_{II} \partial \vartheta_{II}^2} + \frac{\partial^3 F_I}{\partial \varphi_I \partial \vartheta_I^2} \frac{\partial F_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \\
 \left. + \frac{\partial^3 F_I}{\partial \varphi_I^2 \partial \vartheta_I} \frac{\partial F_{II}}{\partial \vartheta_{II}} + 4F_I \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial \varphi_{II}^2} + 8 \frac{\partial F_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial F_{II}}{\partial \varphi_{II}} + 4F_{II} \frac{\partial^2 F_I}{\partial \varphi_I^2} \right] + O\left(\frac{1}{kR}\right)^3 \left. \right\}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Непосредственное сравнение выражения (5) с аналогичной формулой (21а) из работы [1] для антенн электромагнитных волн показывает, что первые два члена разложений совпадают полностью и различие есть лишь в третьем члене, порядка $1/(kR)^2$, где, в отличие от работы [1], появляются слагаемые со второй производной ($F_I F_{II}$) по φ .

Практически важным аспектом применения формулы (5) является оценка ошибок при измерении диаграмм остронаправленных антенн, т. к. в этом случае ошибки особенно велики. Характерными примерами являются антенны, диаграммы направленности которых являются функциями переменных $v = k_2 D \simeq kD(\pi/2 - \vartheta)$ и $u = k_y D \simeq kD\varphi$ (D — размер антенны). Переход к этим переменным легче всего сделать непосредственно в формуле (4). Полагая $kD \gg 1$, будем в каждом порядке $1/kR$ сохранять лишь высшие степени kD , т. е. сохранять лишь высшие производные. В этом приближении всякая разница между векторным и скалярным решениями стирается и формула (4) переходит в следующую

$$I = C \frac{4\pi e^{ikR}}{kR} \left[1 - i \left(\frac{\pi D_I^2}{\lambda R} \right) \hat{\nabla}^2 - \left(\frac{\pi D_I^2}{\lambda R} \right)^2 \hat{\nabla}^4 + O\left(\frac{1}{R}\right)^3 \right] F_I F_{II}, \quad (6)$$

где $\hat{\nabla} = \hat{\nabla}_I - \kappa \hat{\nabla}_{II}$,

$$\hat{\nabla}_I = \vartheta_I \frac{\partial}{\partial v_I} + \varphi_I \frac{\partial}{\partial u_I}, \quad \hat{\nabla}_{II} = \vartheta_{II} \frac{\partial}{\partial v_{II}} + \varphi_{II} \frac{\partial}{\partial u_{II}}, \quad (7)$$

$\kappa = D_{II}/D_I$ — отношение размеров антенн, $u \simeq kD\varphi$, $v \simeq kD(\pi/2 - \vartheta)$.

Отсутствие разницы между векторными и скалярными величинами показывает, что поляризационные эффекты выражаются тем слабее, чем острее диаграмма направленности. Таким образом, в случае остронаправленных антенн все результаты, полученные для электромагнитных волн, справедливы и для звуковых.

Легко видеть, что общий член ряда, стоящего в квадратных скобках в формуле (6), имеет вид $a_n = (\pi D_I^2 / i\lambda R)^n \hat{\nabla}^{2n} (F_I F_{II}) / n!$, т. е. ряд (6) можно продолжить и записать как

$$I = C \frac{4\pi e^{ikR}}{kR} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi D_I^2}{i\lambda R} \right)^n \hat{\nabla}^{2n} (F_I F_{II}). \quad (8)$$

Обоснованность продолжения ряда в формуле (8) можно подтвердить двумя соображениями. Рассмотрим, во-первых, случай, когда одна из антенн является ненаправленной, а следовательно, асимптотический ряд для коэффициента передачи непосредственно совпадает с асимптотическим рядом для акустического поля [3]:

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\varphi, \vartheta)}{(kR)^n} \quad (9)$$

и с измеряемой поперечной компонентой ряда для электромагнитного поля:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kR)^n} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n(\varphi, \vartheta) \\ \mathbf{N}_n(\varphi, \vartheta) \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Согласно работе [3], для функций F_n и N_n мы имеем рекуррентные соотношения вида

$$\begin{aligned} iB_1^\rho &= \frac{-1}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_0^\vartheta) + \frac{\partial B_0^\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ 2inB_{n+1}^\rho &= n(n-1)B_n^\rho + DB_n^\rho, \\ 2inB_n^\vartheta &= n(n-1)B_{n-1}^\vartheta + DB_{n-1}^\vartheta + D_\vartheta B_{n-1}, \\ 2inB_n^\varphi &= n(n-1)B_{n-1}^\varphi + DB_{n-1}^\varphi + D_\varphi B_{n-1}, \\ &n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

и для функции F_n :

$$F_n = n(n-1)F_{n-1} + DF_{n-1}, \quad (12)$$

где операторы D выражаются так:

$$\begin{aligned} Df &= \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \\ D_\vartheta \mathbf{B} &= 2 \frac{\partial B^\rho}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin \vartheta} B^\vartheta - \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial B^\varphi}{\partial \varphi}, \\ D_\varphi \mathbf{B} &= \frac{2}{\sin \vartheta} \frac{\partial B^\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} B^\varphi + \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial B^\vartheta}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как следует из формулы (13), наибольшие производные в рекуррентных соотношениях как в акустическом, так и в электромагнитном случаях, дают слагаемые с оператором D . Следовательно, если сохранить в рекуррентных соотношениях (11), (12) только член с высшей производной, то формулы (9) и (10) примут вид

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n F_0}{n! (ikR)^n}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n! (ikR)^n} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{N}_0 \end{Bmatrix}$$

Если мы перейдем теперь от переменных φ, ϑ к переменным u, v и сохраним лишь наивысшие степени kD , то получим формулу (8) (в предположении, что одна из антенн — ненаправленная), так как

$$D^n = (kD)^{2n} \nabla^{2n}.$$

Вторым соображением, подтверждающим справедливость формулы (8) при одинаковых размерах антенн, является ее совпадение с формулой, полученной Броуном [4] для частного случая — двух круглых равномерно возбужденных антенн равных размеров.

Исследуем при помощи формулы (8) зависимость коэффициента передачи от расстояния R для антенн, направленных друг на друга максимумами главных лепестков. Будем полагать, что диаграммы направленности обеих антенн имеют одинаковую форму в главных плоскостях и плоскости их симметрии параллельны осям u и v , т. е.:

$$F_I = F_{II} = F, \quad F(0, 0) = 1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}},$$

$$\left. \frac{\partial^4 F}{\partial u^4} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = \left. \frac{\partial^4 F}{\partial v^4} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}},$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 F}{\partial u^3 \partial v} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0, \text{ и т. д.}$$

В этом случае операторы в формуле (8) примут вид

$$\hat{\nabla}^2 F F = 2(1 + \kappa^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2},$$

$$\hat{\nabla}^4 F F = 2(1 + \kappa^4) \left(\frac{\partial^4 F}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial u^2 \partial v^2} \right) + 16\kappa^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)^2 \quad (14)$$

и т. д.

На фиг. 2 показана зависимость $R^2 |I|_R^2$ от $\lambda R / D^2$ для двух круглых равномерно возбужденных антенн с диаграммами направленности $F = 2J_1(\sqrt{u^2 + v^2} / 2) / \sqrt{u^2 + v^2}$ при разных значениях параметра κ , определяющего соотношение размеров антенн (1 — 0; 2 — 0,25; 3 — 0,5; 4 — 0,75; 5 — 1). Кривые нормированы на коэффициент передачи в дальней зоне $|I|_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} (R/I)$. В случае двух одинаковых антенн ($\kappa = 1$) из

формулы (8) получаем

$$I \sim 1 - i0,785(D^2/\lambda R) + 0,514(D^2/\lambda R)^2 - i0,282(D^2/\lambda R)^3 + 0,314(D^2/\lambda R)^4 - \dots \quad (15)$$

Этот результат, как было отмечено выше, совпадает с расчетом по формуле Броуна [4].

$$I \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+2)! [(n+1)!]^2} \left(-\frac{i\pi D^2}{4\lambda R} \right)^n$$

Графики построены с точностью 0,01. Для значений $(R|I|_R)^2 / (R|I|_\infty)^2 < 0,8$ в ряде (8) при этой точности достаточно удержать три члена, в интервале $0,8 \div 0,5$ — 7 членов, а в интервале $0,5 \div 0,3$ — 13 членов.

На фиг. 3 показано такое же семейство кривых для равномерно возбужденных квадратных антенн (D — сторона раскрыва) с диаграммами направленности

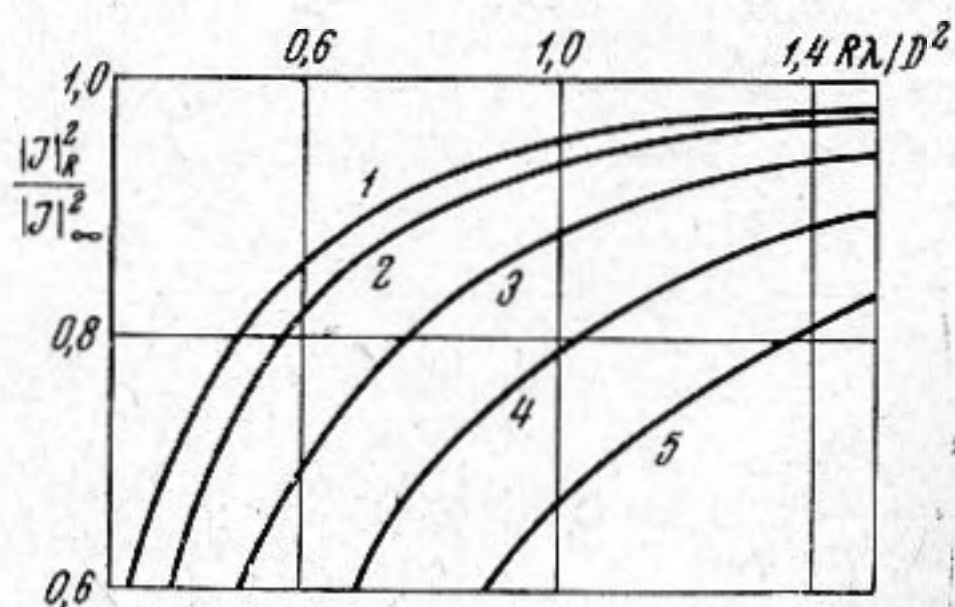
$$F = \left(\sin \frac{u}{2} \middle| \frac{u}{2} \right) \left(\sin \frac{v}{2} \middle| \frac{v}{2} \right).$$

Значения κ для кривых 1, 2, 3, 4, 5 те же, что и на фиг. 2.

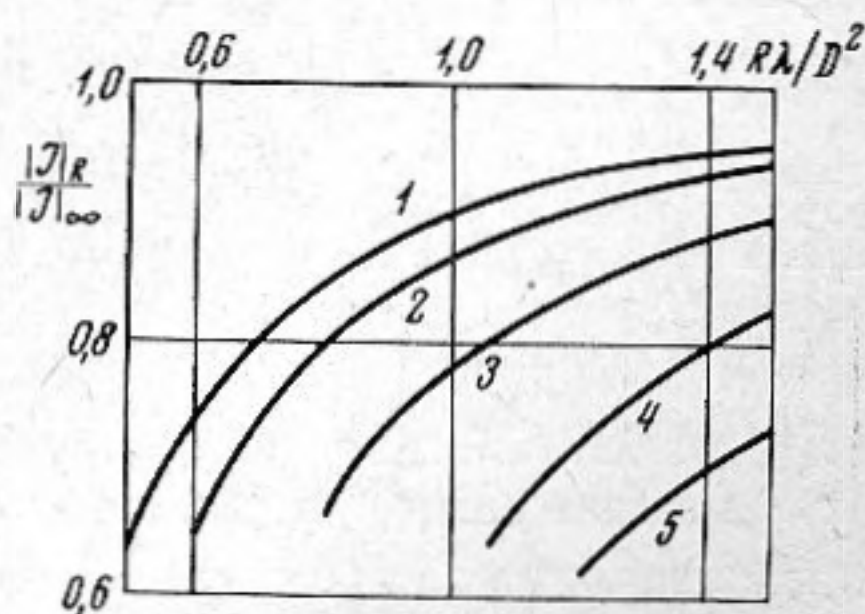
Как видно из фигуры, для малых вспомогательных антенн ($\kappa < 0,25$) величина погрешности измерения (т. е. отличие величины $|I|_R / |I|_\infty$ от 1)

мало отличается от погрешности для ненаправленной вспомогательной антенны ($\kappa = 0$). Поэтому значение $\kappa < 0,25$ можно принять за критерий малости вспомогательной антенны.

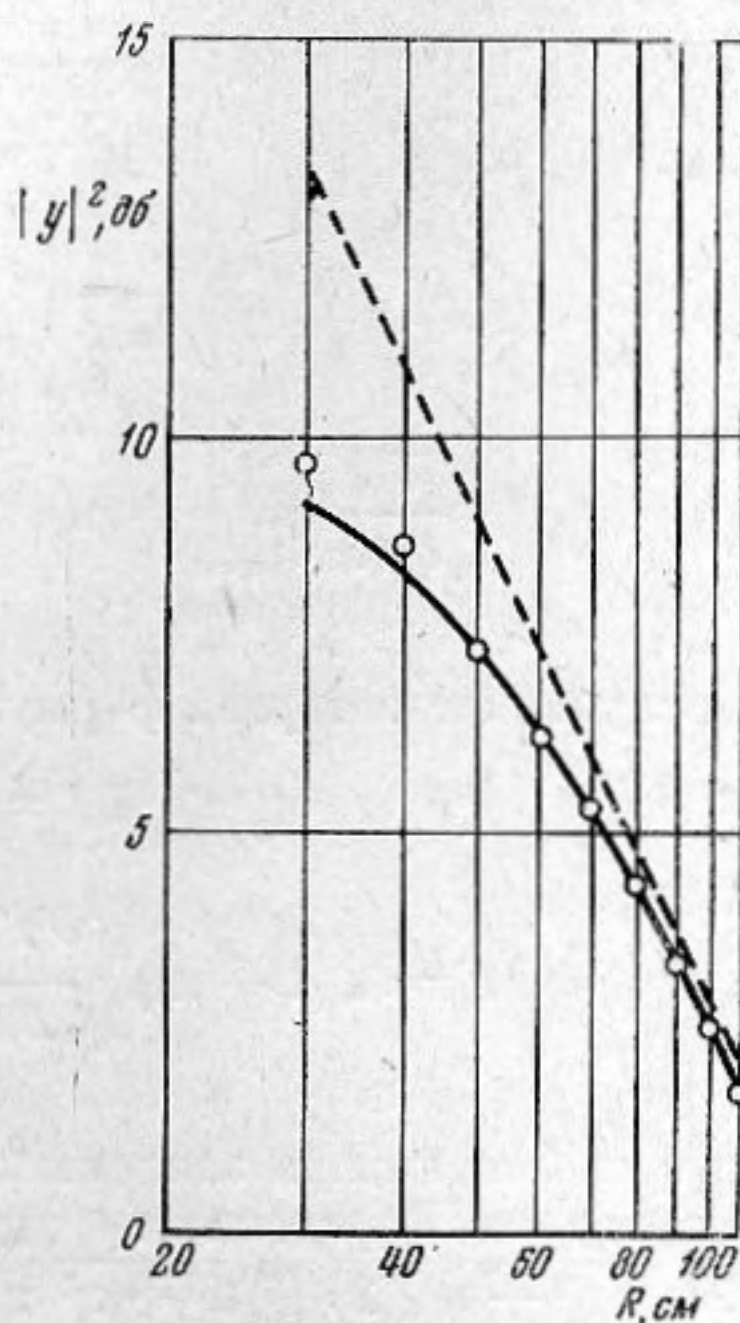
В заключение сравним результаты расчета с экспериментом, описанным в работе [5]. В ней исследовался коэффициент передачи в воде между двумя одинаковыми круглыми поршневыми преобразователями. Диаметры



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

преобразователей были одинаковы ($D = 20$ мм), измерения производились на частоте 1640 кГц ($\lambda = 0,875$ мм). Поскольку в этом случае $kD = 144 \gg \gg 1$, то при расчете можно воспользоваться формулой (15) для круглых антенн при $\kappa = 1$. Как видно из фиг. 4, результаты эксперимента (показаны кружками) вполне удовлетворительно совпадают с расчетной (сплошной) кривой. Штриховая прямая отвечает зависимости $1/R^2$.

Авторы благодарят М. А. Исаковича и И. А. Урусовского за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Е. Кинбер, В. Б. Цейтлин. О погрешности измерения коэффициента направленного действия и диаграммы направленности антенн на близких расстояниях. Радиотехн. и электрон., 1964, 9, 1581—1593.
2. М. М. Тененбаум. К вопросу о методе стационарной фазы. Радиотехн. и электрон., 1960, 12, 1909—1918.
3. С. Н. Wilcox. An expansion theorem for electromagnetic fields, Com. Bure Appl. Math., 1956, 9, 12, 115, 134.
4. Y. Brown. A theoretical analysis of some errors on aerial measurements. Proc. YEE, 1958, 105, C, 8, 343—351.
5. G. A. Sabin, Calibration of piston transducers of marginal test distances. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 1, 168—173.

Всесоюзный н.-и. институт
физико-технических
и радиотехнических измерений
Москва

Поступила в редакцию
16 февраля 1966 г.