

УДК 534.121:531.133

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПО ТАНГЕНЦИАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

А. М. Мицкевич

Известно, что если телу некоторой массы m_1 , покоящемуся на поверхности, сообщить импульс $m_1\dot{x}_0$, то, будучи предоставлено самому себе, тело движется поступательно. Кинетическая энергия, сообщенная телу, естественно затрачивается на преодоление силы сухого трения, направленной в сторону, противоположную движению. Тело движется с постоянным замедлением (сила сухого трения постоянна) и в конце концов останавливается.

Рассмотрим движение тела массы m_1 , которому сообщен импульс $m_1\dot{x}_0$, по колеблющейся тангенциально с частотой f и амплитудой ξ_0 поверхности (направление колебаний точек поверхности касательно к самой поверхности). Пусть поверхность колеблется как целое со скоростью $\dot{\xi} = \omega\xi_0 \cos \omega t$, а векторы скорости тела и колебательной скорости точек поверхности совпадают.

Наличие колебаний, по-видимому, изменит характеристики трения по сравнению со случаем, когда колебания отсутствуют. Будем исследовать движение тела до того момента, пока сообщенная телу при воздействии импульса $m_1\dot{x}_0$ кинетическая энергия не израсходуется полностью на преодоление трения.

Рассмотрим случай, когда начальная скорость тела \dot{x}_0 меньше амплитуды колебательной скорости поверхности, т. е. $\dot{x}_0 < \omega\xi_0$. Тогда сила трения, действующая на тело $F_{\text{тр}}$ будет отличаться от той, которая действует на тело в отсутствие колебаний. Действительно, сформулированное условие означает, что в течение каждого периода колебаний, поверхность движется какое-то время быстрее, чем тело и обгоняет его. Поскольку тело и поверхность непрерывно взаимодействуют друг с другом через посредство силы трения, поверхность в это время увлекает тело за собой и сила трения направлена в сторону движения тела. Скорость тела относительно поверхности $v_{\text{отн}}(t) = \dot{x} - \dot{\xi}$ в этом случае меньше нуля. В остальную часть периода поверхность либо не обгоняет тело, либо движется в сторону, противоположную его движению. Относительная скорость в течение этой части периода будет больше нуля, а сила трения направлена в сторону, противоположную движению тела, т. е. отрицательна. Таким образом, выражение для силы трения можно написать в виде

$$F_{\text{тр}}(v_{\text{отн}}) = k_{\text{тр}0} \frac{\dot{x} - \dot{\xi}}{|\dot{x} - \dot{\xi}|} \cdot m_1 g_1 \quad (1)$$

где $k_{\text{тр}0}$ — постоянный коэффициент трения. Это выражение описывает так называемую «z-зависимость» силы трения от относительной скорости (скорости скольжения). Такая зависимость обычно используется при расчетах и хорошо оправдывается экспериментальными данными.

Из приведенных выше рассуждений очевидно, что тело, скользящее по колеблющейся поверхности, не только рассеивает энергию на трение,

но и приобретает некоторую энергию. Эта последняя сообщается телу колеблющейся поверхностью. Поэтому энергия, затраченная телом на преодоление трения, будет меньше, чем в отсутствие колебаний.

Используя выражение (1), напишем уравнение поступательного движения тела по колеблющейся поверхности

$$m_1 \ddot{x} + k_{\text{тр}0} m_1 g \frac{\dot{x} - \dot{\xi}}{|\dot{x} - \dot{\xi}|} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение описывает неконсервативную систему тело — поверхность. Легко показать, что если выполняется условие $\dot{x}_0 < \omega \xi_0$, то в такой системе потери энергии тела на трение отчасти компенсируются за счет имеющегося в ней резервуара энергии (колеблющаяся поверхность). Действительно, умножая уравнение (2) на dx/dt и интегрируя по времени за некоторый промежуток $[0, \tau]$, мы получаем

$$m_1 \int_0^{\tau} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt + k_{\text{тр}0} m_1 g \int_0^{\tau} \frac{\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}}{\left| \frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right|} \cdot \frac{dx}{dt} dt = 0.$$

Отсюда видно, что в течение времени $[0, \tau]$ в те интервалы, когда $\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} < 0$, знак перед вторым интегралом становится отрицательным, что соответствует некоторому восполнению потери кинетической энергии тела, имеющей место при $\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} > 0$.

Найдем решение уравнения (2) при следующих условиях:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \omega \xi_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 \ll \omega \xi_0, \end{cases} \quad (3)$$

которые, очевидно, включают в себя все возможные случаи, не противоречащие неравенству $\dot{x}_0 < \omega \xi_0$. Нелинейное дифференциальное уравнение (2) можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + gk_{\text{тр}0} = 0 & (\dot{x} - \dot{\xi} > 0), \\ \ddot{x} - gk_{\text{тр}0} = 0, & (\dot{x} - \dot{\xi} < 0). \end{cases} \quad (4)$$

Для решения этой системы при начальных условиях (3) введем переменные x_i , соответствующие таким интервалам времени t_i ($i = 1, 2, 3 \dots$), что при i нечетном $v_{\text{отн}} > 0$ и $F_{\text{тр}} < 0$ (за положительное направление принято направление движения тела), а при i четном $v_{\text{отн}} < 0$ и $F_{\text{тр}} > 0$. Интервалы t_i обозначены на фиг. 1, где показана качественно зависимость $v_{\text{отн}}(t)$, причем учтено то обстоятельство, что скорость тела \dot{x}_i уменьшается с течением времени. Левая часть фиг. 1 соответствует случаю $\dot{x}_0 = \omega \xi_0$, правая — $\dot{x}_0 \ll \omega \xi_0$.

Решения уравнения движения \dot{x}_i находятся путем интегрирования то первого, то второго из уравнений системы (4) и сшивания полученных решений, причем каждый раз начальные условия $\dot{x}_i(0)$, $x_i(0)$ для последующего интервала t_i определяются из выражений предыдущего интервала t_{i-1} :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i-1}(t_{i-1}) = \dot{x}_i(0), \\ x_{i-1}(t_{i-1}) = x_i(0). \end{cases} \quad (5)$$

Решая таким образом систему (4) и переходя к текущему времени, $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2 - \tau_1 \dots \dots \dots t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, а

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i = \frac{\pi_i + \Delta_i}{\omega} \quad (i - \text{четное}) \\ \tau_i = \frac{\pi(i+1) - \Delta_i}{\omega} \quad (i - \text{нечетное}) \end{array} \right. \quad (6)$$

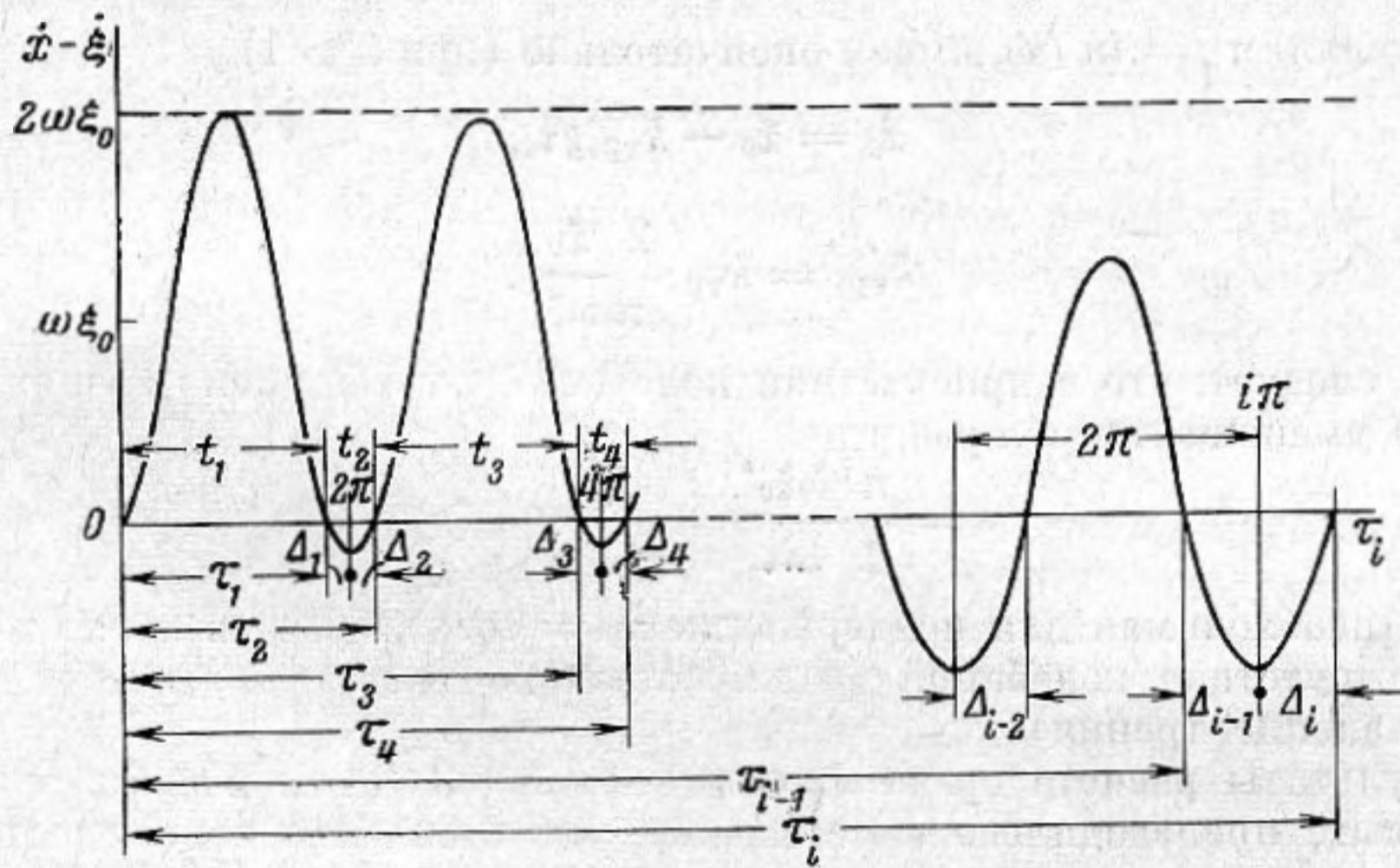
(Δ_i — определяют длительности интервалов, когда $v_{отн} < 0$, см. фиг. 1), мы получаем выражение для скорости тела:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 - k_{тр0} g \tau_i + \frac{2k_{тр0} g}{\omega} \sum_1^{i-1} \Delta_i. \quad (7)$$

Выражение для Δ_i , входящего в эту формулу, можно получить из условия $\dot{x}_i - \dot{\xi}_i = 0$, откуда с учетом выражения (6)

$$\Delta_i = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\dot{x}_i}{\omega \xi_0}. \quad (8)$$

Определение Δ_i в общем виде из выражений (7) и (8) довольно сложно. Поэтому путем линейно-кусочной аппроксимации на основании выражений (7) и (8) мы получили показанную на фиг. 2 приближенную зависимость для Δ_i (при $f = 2 \cdot 10^4$; $k_{тр0} = 0,5$; $\xi_0 = 10$ мк). Затем, с использованием этой зависимости, был построен график для \dot{x}_i по выраже-



Фиг. 1

нию (7) при $\dot{x}_0 = \omega \xi_0$ (фиг. 3, кривая 1). Для сравнения на фиг. 3 показано изменение скорости тела в отсутствие колебаний (прямая 2).

Для частного случая, когда $\dot{x}_0 \ll \omega \xi_0$ положение проще, мы имеем

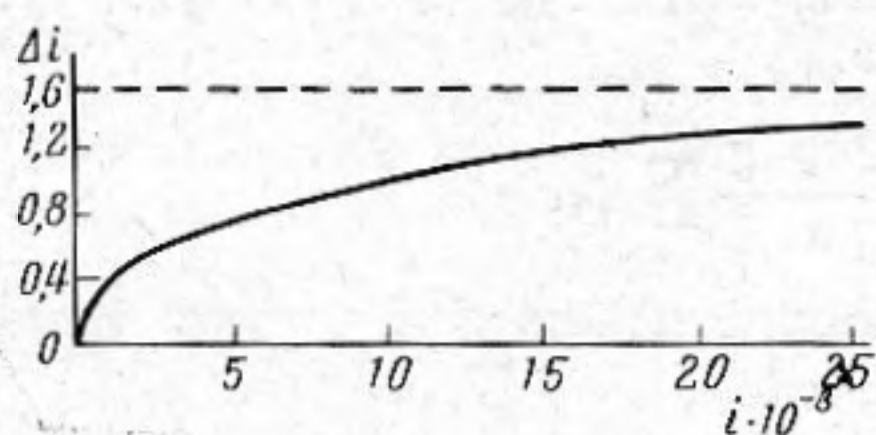
$$\Delta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\dot{x}_i}{\omega \xi_0}, \quad (9)$$

и подставляя это выражение в формулу (7), мы получаем непосредственно

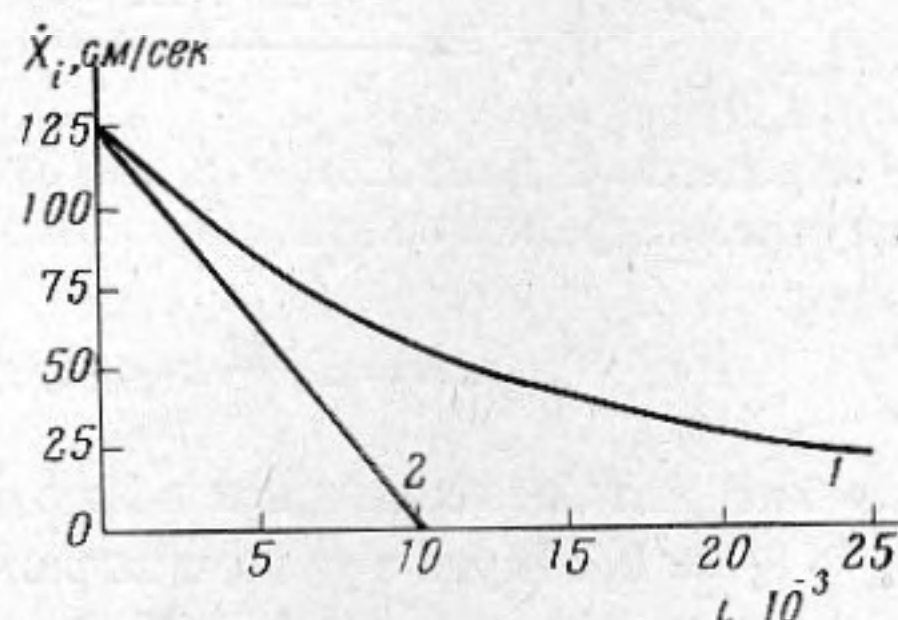
$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 - \frac{2k_{тр0} g}{\omega} \sum_1^{i-1} \frac{\dot{x}_h}{\omega \xi_0}. \quad (10)$$

Поскольку \dot{x}_h здесь убывающие величины и $\dot{x}_h < \dot{x}_0$, можно для оценки изменения коэффициента трения заменить \dot{x}_h под знаком суммы на \dot{x}_0 .

Вводя эту замену, мы по существу переходим к движению тела с постоянной скоростью $\dot{x}_0 \ll \omega \xi_0$ по колеблющейся поверхности. В этом случае к телу должна быть приложена некоторая сила с тем, чтобы поддерживать его скорость постоянной. Именно такие условия и осуществляются при волочении или резании металлов с наложением колебаний. Поэтому бесполезно иметь соотношение для расчета коэффициента трения



Фиг. 2



Фиг. 3

в присутствии колебаний. Заменяв в выражении (10) \dot{x}_k на \dot{x}_0 , мы получаем

$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 - \frac{2k_{\text{тр}0} g}{\omega} \cdot \frac{\dot{x}_0 \cdot i}{\omega \xi_0},$$

и, подставляя $\tau_i = i\pi / \omega$, имеем окончательно (при $i \gg 1$)

$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 - k'_{\text{тр}0} g \tau_i, \quad (11)$$

где

$$k'_{\text{тр}0} = k_{\text{тр}0} \frac{2}{\pi} \frac{\dot{x}_0}{\omega \xi_0}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что в присутствии колебаний коэффициент трения (сила трения) уменьшается в n раз, где

$$n = \frac{\pi}{2} \frac{\omega \xi_0^*}{\dot{x}_0} \quad (\dot{x}_0 \ll \omega \xi_0) \quad (13)$$

и сила, необходимая для поддержания $\dot{x}_0 = \text{const}$, будет в n раз меньше, чем в отсутствие колебаний (если движению тела препятствует только сопротивление трения).

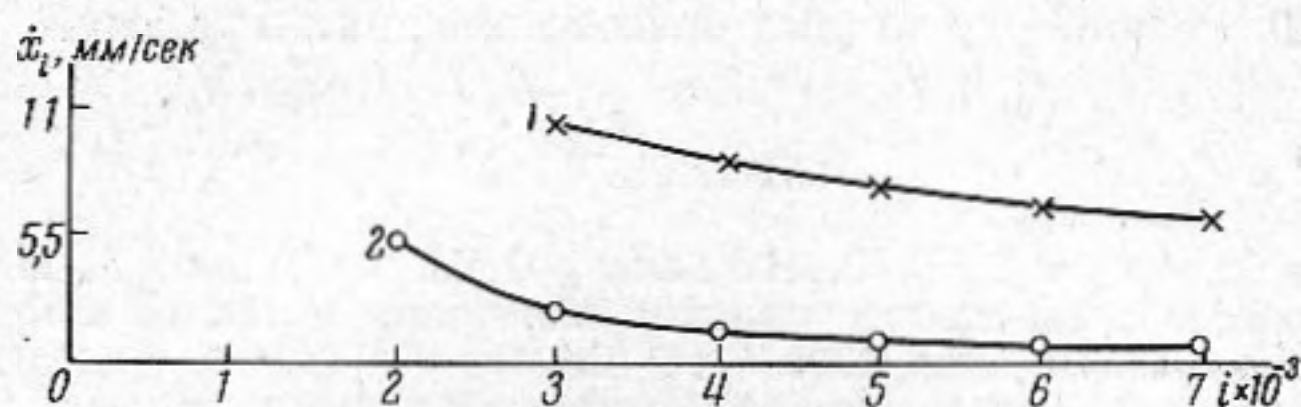
Результаты расчета сравнивались с экспериментом в двух случаях. Во-первых, производилось качественное сопоставление зависимости \dot{x}_i с такой же зависимостью, полученной экспериментально. Во-вторых, полученное экспериментально уменьшение трения при волочении и резании металлов сопоставлялось с расчетным по выражению (13).

Изменение скорости маленьких частичек ($1 \times 1 \text{ мм}^2$) при их движении по колеблющейся тангенциально поверхности, исследовалось на плоской поверхности массивного стального стержня. В стержне возбуждались продольные колебания частотой 20 кГц (стоячая волна). Амплитуда колебаний подбиралась такой, чтобы после включения колебаний частички начинали двигаться и производилась киносъемка движения частиц при помощи аппарата К16-С2, на участке поверхности длиной около 15 мм. (Скорость съемки 64 кадр/сек, что соответствует времени экспозиции одного кадра 0,005 сек). Такой размер участка заметно меньше $\lambda/4$ для продольных колебаний в стержне ($\lambda/4 = 70 \text{ мм}$). Поэтому можно считать амплитуду колебаний поверхности в пределах этого участка постоянной, что соответствует условиям расчета. В результате покадровой обра-

* Такое же выражение было получено в работе [1].

ботки отснятых пленок были получены кривые зависимости пути, пройденного частицами от времени (т. е. от числа периодов колебаний) и, затем, графическим дифференцированием — кривые для скорости (фиг. 4).

Из фиг. 4 видно, что скорость частиц непрерывно меняется с увеличением i (с течением времени). В этом и заключается влияние колебаний поверхности на характер движения частиц — в отсутствие колебаний за-



Фиг. 4

висимость скорости частиц от времени изображается прямой линией.

Кривые 1 и 2 отвечают различным частицам, обладающим разной начальной скоростью. Из фигуры видно, что замедление является переменной величиной и уменьшается со временем.

Такой характер изменения \dot{x}_i как раз и отражает влияние колебаний поверхности на движение частиц; напомним, что в отсутствие колебаний зависимость скорости частиц от времени изображается прямой линией (см. фиг. 3). Сопоставление кривых фиг. 4 с расчетной зависимостью 1 фиг. 3 показывает их качественное соответствие.

Известно далее, что наложение ультразвуковых колебаний при волочении и резании металлов уменьшает сопротивление трения [1, 2]. В обоих случаях взаимодействуют колеблющаяся с ультразвуковой частотой поверхность (резец, оправка) и тело, движущееся с небольшой постоянной скоростью (протягиваемый металл, обрабатываемая деталь), причем колебания ориентированы в направлении движения обрабатываемого металла и параллельно его поверхности. Размер зоны контакта колеблющейся поверхности с обрабатываемой меньше длины волны продольных колебаний.

В работе [1], где исследовалось оправочное волочение стальных труб, введение ультразвуковых колебаний в оправку, соприкасающуюся с внутренней поверхностью трубы, уменьшило усилие волочения вследствие уменьшения сопротивления трения. Экспериментальная проверка выражения (13) в этой работе показала хорошее совпадение расчетных и экспериментальных величин снижения трения.

В случае резания металлов получено уменьшение трения в три-четыре раза, причем сопротивление трения уменьшается пропорционально увеличению амплитуды колебаний резца при неизменной частоте колебаний [2]. Эти результаты получены при $\omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^4$, $v_{\text{пост}} = 30$ м/мин, $\xi_0 = 7,5$ мк. Расчет по (13) с использованием указанных величин дает уменьшение трения в три раза.

Приведенные сведения дают основание считать, что физические предпосылки, положенные в основу изложенного выше расчета, являются правильными и выражение (13) можно использовать для выбора оптимальных параметров (ω , ξ_0 , $v_{\text{пост}}$) при волочении и резании металлов с наложением ультразвука.

Следует отметить, что наложение ультразвуковых колебаний не может дать энергетического выигрыша при снижении трения. Однако уменьшение трения дает ряд других положительных результатов. Например, в случае резания с наложением колебаний увеличивается стойкость резца и чистота обработанной поверхности улучшается на два класса [2]. В случае волочения, уменьшение усилия волочения позволяет, по-видимому,

увеличить либо степень деформации металла, либо скорость его движения через фильеру без риска обрыва металла. В рассмотренном в работе [1] случае увеличение скорости волочения $v_{\text{пост}}$ в два-три раза приведет, согласно выражению (13), лишь к незначительному увеличению усилия на преодоление трения. Увеличение же скорости волочения увеличит производительность.

Автор приносит благодарность А. И. Осипову за помощь при решении задачи и Л. Ф. Розенбергу за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Вердеревский, В. В. Носаль, О. М. Рымша, А. М. Мицкевич, М. Г. Сиротюк. Снижение усиления волочения металлов в присутствии ультразвука. Ультразвук. техн., 1964, 5, 18—21.
2. М. С. Нерубай. Исследование эффективности вынужденных ультразвуковых колебаний инструмента при обработке резанием жаропрочных и титановых сплавов. (Канд. дис.) Куйбышевский авиационный ин-т, 1964.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
14 июля 1965 г.