АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 1

УДК 534.26

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ПРИ НАЛИЧИИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ТОНКОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ (НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР)

В. М. Куртепов

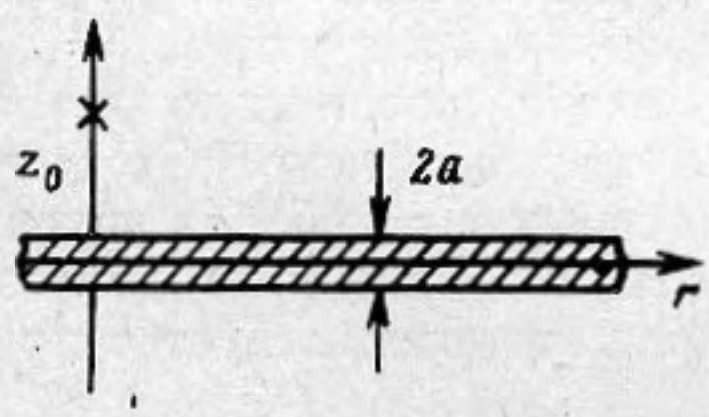
Вычисляется асимптотика отраженной и преломленной волн и анализируются ее особенности.

Как было показано в работе [1], непрерывный спектр поля точечного гармонического источника звука в присутствии тонкой * бесконечной пластинки имеет в области выше (ниже) пластинки вид

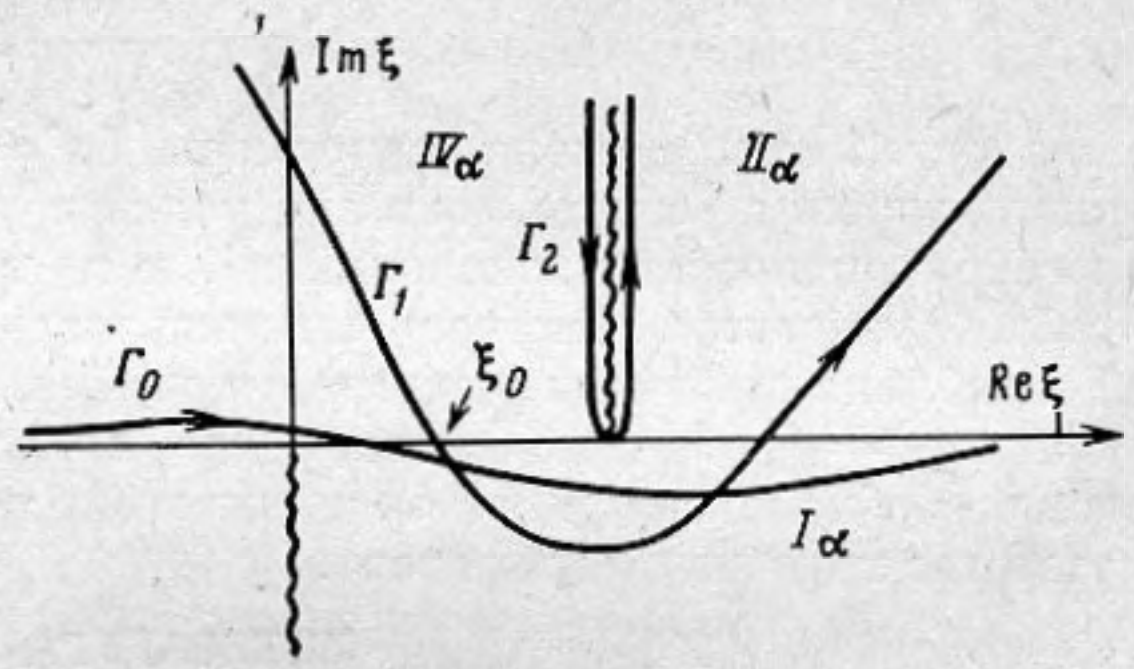
$$\varphi_1 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_1} V e^{i\alpha H} H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi\,\frac{d\xi}{\alpha} \equiv \frac{e^{ikR}}{R} + \varphi_r, \tag{1}$$

$$\varphi_2 = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_1} W e^{i\alpha H} H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi\,\frac{d\xi}{\alpha}. \tag{2}$$

При этом излучатель располагается в точке $(0, 0, z_0)$ в среде с плотностью ρ и скоростью звука c (фиг. 1); $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, $H = z_0 + |z| - 2a$, $2a$ — толщина пластинки, ρ_0 — ее плотность, $C_-(k_-)$ —



Фиг. 1



Фиг. 2

скорость (волновое число) продольных волн в свободной пластинке. Функция $\alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, где $k = \omega / c$, определена согласно фиг. 2, где римскими цифрами обозначены квадранты ее значений на верхнем листе римановой поверхности для функции α, а необходимые разрезы проведены волнистыми линиями. Далее V и W — коэффициенты отражения и прозрачности для плоской волны, падающей на пластинку

$$V = \frac{Z_- Z_\sim - Z^2}{(Z_- + Z)(Z_\sim + Z)} \qquad W = \frac{(Z_- - Z_\sim) Z}{(Z_- + Z)(Z_\sim + Z)}$$

* Тонкой считается пластинка, толщина которой много меньше длины звуковой волны в материале ее.

где $Z = \rho_w / \alpha$, а Z_- и $Z_\sim$ — импеданцы продольных и изгибных колебаний пластинки, известные, например, из работы [1]. Перевальный контур Γ_1, с уравнением

$$f(\xi) \equiv iR'(\alpha \sin \chi_0 + \xi \cos \chi_0) = f(\xi_0) - s^2 \qquad (3)$$
$$-\infty < s < +\infty$$

проходит, как это показано на фиг. 2. Здесь $R' = \sqrt{r^2 + H^2}$, $\chi_0 = \arccos r / R'$, $\xi_0 = k \cos \chi_0$, $f(\xi_0) \equiv ikR'$.

Асимптотика φ_r и φ_2 при удалении приемника от излучателя существенно зависит от их взаимного расположения. Эта зависимость формально проявляется, как смещение перевальной точки $\xi_0 = k \cos \chi_0$ на отрезке $[0, k]$. При этом она может приблизиться к полюсам подынтегрального выражения в формулах (1) и (2), которые изучались в работе [1]. Это должно сказаться на скорости убывания поля с увеличением расстояния от источника.

Вид перевального контура также определяется взаимным расположением точек излучения и приема. В частности, при $\chi_0 \to 0$ он превращается в петлю, охватывающую точку разветвления (контур Γ_2 на фиг. 2).

Рассмотрим сначала отраженную волну. Пусть $\chi_0 \ll 1$. Тогда φ_r удобно написать в виде

$$\varphi_r = -\frac{e^{ikR'}}{R'} + \frac{i}{2} \int_{\Gamma_2} (1 + V) e^{i\alpha H} H_0^{(1)}(\xi r) \frac{\xi d\xi}{\alpha}.$$

После простых преобразований получим

$$\varphi_r = -\frac{e^{ikR'}}{R'} + \frac{i}{2} \int_k^{k+i\infty} F_1(\alpha) H_0^{(1)}(\xi r) \xi \, d\xi, \qquad (4)$$

где

$$F_1 = \frac{2}{\alpha} \times$$
$$\times \frac{[2(Z_- Z_\sim)^2 - Z^2(Z_-^2 + Z_\sim^2)] \cos \alpha H + iZ(Z_- + Z_\sim)(Z^2 - Z_- Z_\sim) \sin \alpha H}{(Z_-^2 - Z^2)(Z_\sim^2 - Z^2)}$$
$$\operatorname{Im} \alpha > 0. \qquad (5)$$

Для дальнейших вычислений важно знать поведение функции F_1 в окрестности точки $\xi = k$, определяющей асимптотику φ_r. Как было показано в работе [1], стр. 565, при $k > k_-$ здесь всегда имеется полюс $\xi_-^{(2)}$, отвечающий продольной скользящей нормальной волне. Расположение констант распространения изгибных волн, также являющихся полюсами функции F_1, сильно зависит от соотношения параметров задачи. Поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда $\frac{\rho_0}{\rho} k_- a \gg 1$ и $k_\sim > k$ *, где $k_\sim$ — волновое число изгибной волны в свободной пластинке ($Z_\sim(k_\sim) = 0$). При этом (см. [1], стр. 564) вблизи точки $\xi = k$ находится лишь полюс $\xi = \xi_\sim^{(2)}$, соответствующий изгибной скользящей нормальной волне и лежащий на нижнем листе римановой поверхности для функции α.

Следуя работе [2], заменим в окрестности точки $\xi = k$ функции от α первыми членами их тейлоровских разложений по α. Если воспользоваться, кроме того, асимптотикой функции $H_0^{(1)}(\xi r)$ и произвести в формуле (4) замену $\xi = k + i\eta^2 / r$, то мы получим

$$\varphi_r \approx -\frac{e^{ikR'}}{R'} + A \frac{e^{ikr}}{(kr)^2} I(r), \qquad (6)$$

---

* Как будет ясно из дальнейшего, достаточно, чтобы $(k_\sim - k) r \gg 1$.

где

$$A = \frac{4ik}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\rho c)^2} [i\rho\omega H (Z_- + Z_\sim) - Z_-^2 - Z_\sim^2]_{\xi=k},$$

$$I(r) = w_1^2 w_2^2 \int_0^\infty e^{-\eta^2} \frac{\eta^2 d\eta}{(w_1^2 + \eta^2)(w_2^2 + \eta^2)}, \tag{7}$$

причем

$$w_1 = \frac{\rho\omega}{|Z_-(k)|} \sqrt{\frac{r}{2k}} e^{i\pi/4}, \quad w_2 = \frac{\rho\omega}{|Z_\sim(k)|} \sqrt{\frac{r}{2k}} e^{i\pi/4} \tag{8}$$

При выводе формулы (6) учитывалось, что $Z_-(k) \neq 0$ и $Z_\sim(k) \neq 0$, что позволило аппроксимировать функции $Z_-(\xi)$ и $Z_\sim(\xi)$ в окрестности точки $\xi = k$ их нулевыми членами. Кроме того, использовалась «медленность» функции F_1 для ξ из интервала $(k, k + i/r)$. Это приводит к условию $r \gg kH^2$, или $kr \operatorname{tg}^2 \chi_0 \ll 1$.

Подставляя выражение (7) в формулу (1) и учитывая, что при больших r

$$R \approx R' \left[1 - 2\frac{(|Z| - a)(Z_0 + a)}{(R')^2}\right] \text{ и } R' \approx r\left[1 + \frac{1}{2}(H/r)^2\right],$$

получим для полного поля выражение:

$$\varphi_1 \approx \frac{1}{(kr)^2} [AI(r) + 2ik^3(|z| - a)(z_0 - a)] e^{ikr}. \tag{9}$$

Характер $I(r)$ при $r \to \infty$ определяется близостью точки $\xi = k$ к полюсам функции $V(\xi)$, т. е. к константам распространения «продольных» и «изгибных» скользящих нормальных волн. Величины $|w_1|$ и $|w_2|$ играют при этом роль численных расстояний.

Пусть $|w_1| \gg 1$, $|w_2| \gg 1$. Полагая в знаменателе под интегралом в формуле (7) $\eta = 0$, получим, что $I(r) \approx \sqrt{\pi}/4$, т. е. $\varphi_1 \sim 1/r^2$.

Пусть $0 \leqslant |w_1| < \infty$, $|w_2| \gg 1$. Это соответствует случаю возможной близости собственного значения «продольной» нормальной волны $\varphi_-^{(2)}$ к точке $\xi = k$. При этом в области $0 < \eta < 1$, существенной для интегрирования, можно положить $w_2^2 + \eta^2 \approx w_2^2$ и мы найдем (см. [3])

$$I(r) \simeq \sqrt{\pi} \frac{w_1^2}{2} \{1 - \sqrt{\pi} w_1 [1 - \Phi(w_1)] e^{w_1^2}\},$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности. Если значение $|w_1|$ велико, то мы получаем предыдущий случай. Если же $|w_1| \ll 1$, то

$$I \approx \sqrt{\pi} \frac{w_1^2}{2} [1 + O(w_1)], \tag{10}$$

где w_1 определено из формул (8). Обращает на себя внимание возрастание I, а следовательно и φ_1, на порядок относительно r по сравнению со случаем $|w_1| \gg 1$, $|w_2| \gg 1$.

При $0 \leqslant |w_1| < \infty$, $0 \leqslant |w_2| < \infty$, представляя дробь, стоящую под интегралом в формуле (7) в виде

$$\frac{\eta^2}{(w_1^2 + \eta^2)(w_2^2 + \eta^2)} = \frac{w_1^2}{w_1^2 - w_2^2} \frac{1}{w_1^2 + \eta^2} + \frac{w_2^2}{w_2^2 - w_1^2} \frac{1}{w_2^2 + \eta^2},$$

получим (см. [3])

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{w_1^2 w_2^2}{w_1^2 - w_2^2} \{w_1 [1 - \Phi(w_1)] e^{w_1^2} - w_2 [1 - \Phi(w_2)] e^{w_2^2}\}. \tag{11}$$

Остановимся на случае, когда $|w_1| \ll 1$ и $|w_2| \ll 1$. При этом

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{w_1^2 w_2^2}{w_1 + w_2} [1 + O(w_1^2 - w_2^2)]$$

или, используя формулу (8)

$$I \approx \frac{\pi}{2} e^{3/4\pi i} \left(\frac{r}{2k}\right)^{3/2} \frac{(\rho\omega)^3}{|Z_-(k)| + |Z_\sim(k)|}. \tag{12}$$

Мы видим, что φ_1 убывает с расстоянием, как $1/\sqrt{r}$, т. е. не быстрее, чем нормальные волны. Разумеется, это справедливо лишь для значений r, удовлетворяющих условиям $|w_1| \ll 1$, $|w_2| \ll 1$. При $r \to \infty$ φ_1 всегда $\sim 1/r^2$.

Пользуясь формулами (8), оценим расстояния $r_{\text{кр}}^{(1)}$ и $r_{\text{кр}}^{(2)}$, на которых $w_1(r_{\text{кр}}^{(1)})| = \mu_1$ и $|w_2(r_{\text{кр}}^{(2)})| = \mu_2$, где $\mu_1 \ll 1$, $\mu_2 \ll 1$.

$$r_{\text{кр}}^{(1)} = 2\frac{1}{k}\left|\mu_1 \frac{Z_-(k)}{\rho c}\right|^2, \quad r_{\text{кр}}^{(2)} = \frac{2}{k}\left|\mu_2 \frac{Z_\sim(k)}{\rho c}\right|^2.$$

Здесь $\varepsilon = k_- a$ — малый, по предположению, параметр. Очевидно, для $r \leqslant r_{\text{кр}}^{(1)}$, $|w_1(r)| \ll 1$, а при $r \leqslant r_{\text{кр}}^2 |w_2(r)| \ll 1$. Например, для алюминиевой пластинки толщины $2a = 0{,}5$ *см*, в воздухе ($c = 340$ *м/сек*, $c_- = 5 \cdot 10^3$ *м/сек*), полагая $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$ и $\varepsilon = 0{,}05$, получим $kr_{\text{кр}}^{(1)} \sim 10^{11}$, $kr_{\text{кр}}^{(2)} \approx 125$. При этом поле φ_1 для $r < r_{\text{кр}}^{(2)}$ дается подстановкой выражения (12) в (9).

Для χ_0, сильно отличающихся от 0, выражение (6) уже несправедливо, поскольку при его вычислении мы считали функцию (5) «медленно изменяющейся». Кроме того, перемещаясь по отрезку $[0, k]$, перевальная точка ξ_0 может сблизиться с полюсом $\xi_-^{(1)}$ функции $V(\xi)$, соответствующим «продольной» нормальной волне $\varphi_-^{(1)}$ (см. работу [1]) и равным

$$\xi_-^{(1)} = k_- \left[1 + \frac{i\varepsilon}{2m_1} \frac{k_- \sigma_1^2}{\alpha_-} + O\left(\frac{\varepsilon}{m_1}\right)^2\right]. \text{ Здесь } m_1 = \rho_0/\rho, \quad \alpha_- = \alpha(k_-),$$

а $\sigma_1 \equiv \sigma / 1 - \sigma$ — коэффициент Пуассона для тонкой пластинки. Вычислить φ_r в этом случае помогает модифицированный метод перевала, обобщенный на случай полюса вблизи точки перевала (см. работу [4], § 20.2).

Воспользуемся асимптотикой функций Ганкеля при больших значениях аргумента и произведем в выражении для φ_r замену переменных согласно формуле (3). Умножим и разделим затем подынтегральное выражение на $s^2 - s_p^2$, где $s_p = \pm\sqrt{f(\xi_0) - f(\xi_-^{(1)})}$ — изображение полюса $\xi_-^{(1)}$ на комплексной плоскости s. Знак $\pm$ выбирается так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} s_p > 0$. Разлагая затем «медленно изменяющуюся» функцию $(s^2 - s_p^2)\left[\frac{\sqrt{\xi}}{\alpha} V(\xi) \frac{d\xi}{ds}\right]_{\xi=\xi(s)}$ по степеням s и, ограничиваясь первым членом этого разложения, получим

$$\varphi_r \approx V(\xi_0) \frac{e^{ikR'}}{R'} N(R', \xi_0), \tag{13}$$

где R' — расстояние от мнимого источника, имеющего координаты $(0, 0, 2a - z_0)$, а N — медленно изменяющаяся функция координат

$$N(R', \xi_0) = -i\sqrt{\pi} s_p e^{-s_p^2} [1 - \Phi(-is_p)].$$

Изучим вид функции N при различных ξ_0. Если перевальная точка ξ_0 располагается «вдали» от $\xi = \xi_-^{(1)}$ и величина $|s_p|$, играющая роль численного расстояния, велика, то $N = 1 + O(s_p^{-2})$.

При сближении ξ_0 и $\xi_-^{(1)}$ величина $|s_p|$ может стать малой и тогда

$$N = -i\sqrt{\pi} s_p [1 + O(s_p)]. \tag{14}$$

Выделим в пространстве область, где имеет место неравенство $|s_p| \leqslant \mu_3 \ll 1$. Для этого выразим s_p через параметры задачи. Пользуясь гладкостью $f(\xi)$ при $\xi < k$, разложим функцию $s_p^2(\xi_0) = f(\xi_0) - f(\xi_-^{(1)})$ по степеням $\xi_0 - \xi_-^{(1)}$. Ограничиваясь членами порядка $(\xi_0 - \xi_-^{(1)})^2$, получим

$$s_p^2 \approx -\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi_-^{(1)}} \frac{(\xi_0 - \xi_-^{(1)})^2}{2} = i(kH)\frac{k(\xi_0 - \xi_-^{(1)})^2}{2\alpha_1^3},$$

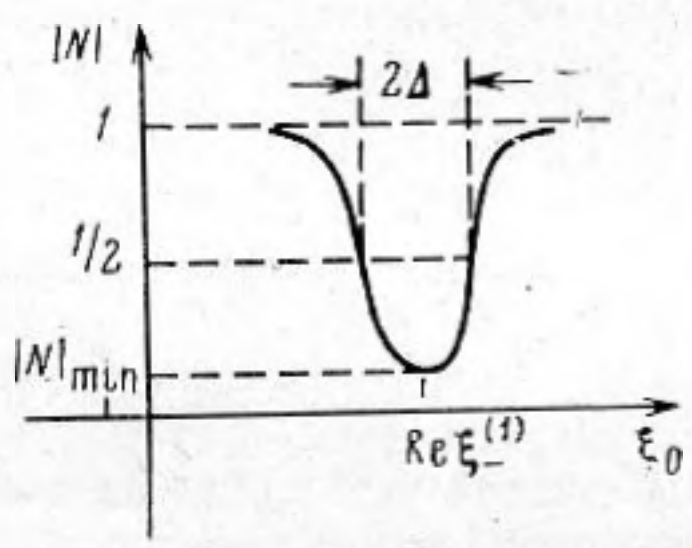
где $\alpha_1 \equiv \alpha(\xi_-^{(1)}) = \alpha_-\left[1 + O\left(\frac{\varepsilon}{m_1}\right)\right]$. Используя требование $\operatorname{Im} s_p > 0$, найдем, что

$$s_p \approx \sqrt{\frac{kR'}{2}}\frac{\xi_0 - \xi_-^{(1)}}{\alpha_-} e^{i\pi/4 + l\pi}, \tag{15}$$

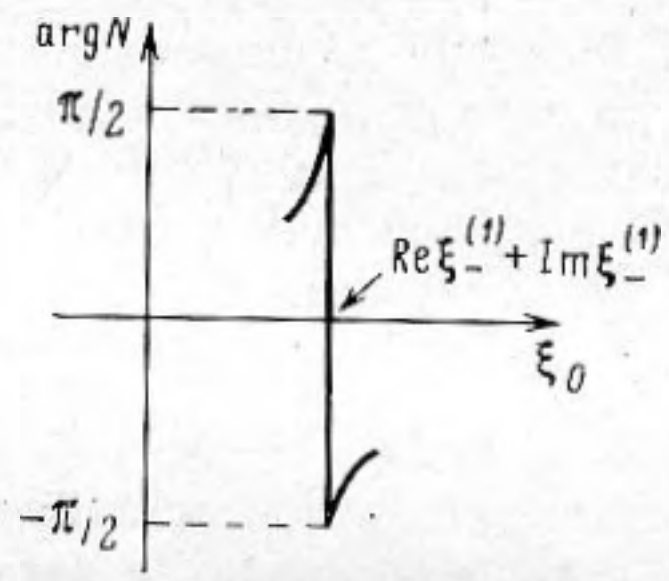
где

$$l = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{4} < \arg(\xi_0 - \xi_-^{(1)}) < 0 \\ 1, & -\pi < \arg(\xi_0 - \xi_-^{(1)}) < -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Как видно из формулы (15), $|s_p|_{\min} = \sqrt{\frac{kR'}{2}}\frac{\operatorname{Im}\xi_-^{(1)}}{\alpha_-} = \sqrt{\frac{kR'}{2}}\left(\frac{k_-}{\alpha_-}\right)^2\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\varepsilon}{m_1}$, т. е. неравенство $|s_p| \leqslant \mu_3$ реализуется в окрестности луча, соответствующего перевальному значению $\xi_0 = \operatorname{Re}\xi_-^{(1)}$, если только kR' не превышает $kR_{\text{кр}}' = 8\mu_3^2\left(\frac{\alpha_-}{k_-\sigma_1}\right)^2\left(\frac{m_1}{\varepsilon}\right)^2$. Именно в этой области функция N определяется выражением (14), где s_p взято из формулы (15). Часто $kR_{\text{кр}}'$ велико.



Фиг. 3



Фиг. 4

Например, для случая алюминиевой пластинки толщиной 0,5 *см* в воздухе, полагая $\varepsilon = 0{,}005$ (это соответствует частоте 1,6 *кгц*), получим $kR_{\text{кр}}' \sim 10^{13}$. Мы видим, таким образом, что функции $|N|$ и $\arg N$ имеют вид, показанный на фиг. 3 и 4. Полуширина «провала» Δ на фиг. 1 определяется из условия $|N| = 1/2$. Пользуясь формулой (15), найдем, что (для $R' \ll R_{\text{кр}}'$) $\frac{\Delta}{k} = \frac{\alpha_-}{k^2}\sqrt{\frac{k}{2\pi R'}}$. Переброс фазы функции N в точке $\xi_0 = \operatorname{Re}\xi_-^{(1)} + \operatorname{Im}\xi_-^{(1)}$, соответствующей $\arg(\xi_0 - \xi_-^{(1)}) = -\frac{\pi}{4}$ обусловлен выделением из непрерывного спектра «продольной» нормальной волны $\varphi_-^{(1)}$.

Обращает на себя внимание тот факт, что при $\xi_0 \to \mathrm{Re}\,\xi_-^{(1)}$ поле φ_r убывает как $(R')^{-1/2}$, т. е. значительно медленней, чем в отсутствие пластинки.

Анализ непрерывного спектра (2) в области ниже пластинки проводится точно так же (и при таких же предположениях), как это делалось с отраженной волной. Мы приведем поэтому лишь конечные результаты. При $\chi_0 \ll 1$ преломленная волна φ_2 имеет вид

$$\varphi_2 \approx B \frac{e^{ikr}}{(kr)^2} I(r), \quad \text{где } B = \frac{4ik}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\rho c)^2} \left[(Z_- - Z_\sim)(i\rho\omega H - Z_- - Z_\sim) \right]_{\xi=k},$$

а $I(r)$ определена из выражения (11).

Для χ_0, сильно отличающихся от нуля, получаем выражение:

$$\varphi_2 \approx W(\xi_0) \frac{e^{ikR'}}{R'} N(R', \xi_0). \tag{16}$$

Пользуясь формулами (13) и (16), не следует забывать о поглощении звука в материале пластинки. Поглощение, проявляющееся в виде положительной мнимости у k_-, приводит, в частности, к тому, что $W(\xi_0)$ не обращается в нуль ни при каких вещественных ξ_0. Минимальное значение $|W|_{\min}$ достигается при $\xi_0 \approx k_-^0 \left[1 - \frac{(\varepsilon_0 \sigma_1)^2}{2} \right]$, где $k_-^0 = \mathrm{Re}\, k_-$. Как легко показать, им будет

$$|W|_{\min} = \eta \frac{m_1}{\varepsilon_0 \sigma_1^2} \frac{k_-^0 \alpha_-^0}{\left[(k_-^0)^2 + (m_1 \alpha_-^0 \varepsilon_0)^2 \right]^{1/2}} \left[\left(k_-^0 + \eta \frac{m_1 \alpha_0}{\varepsilon_0 \sigma_1^2} \right)^2 + (m_1 \alpha_-^0 \varepsilon_0)^2 \right]^{-1/2}.$$

Здесь $\alpha_-^0 = \alpha(k_-^0)$, $\eta = 2\,\mathrm{Im}\, k_- / k_-^0$, $\varepsilon_0 = k_-^0 a$. Очевидно, для малых ε_0 величина $|W|_{\min}$ достаточно велика, чтобы, вычисляя φ_2 (в случае больших χ_0), не учитывать членов $\sim 1/(R')^2$.

В заключение автор выражает глубокую признательность Л. М. Бреховских, под руководством которого выполнялась настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Куртепов. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластинки (дискретный спектр). Акуст. ж., 1969, 15, 4, 560—566.
2. Ю. Л. Газарян. Волноводное распространение звука для одного класса слоисто-неоднородных сред. Акуст. ж., 1957, 3, 2, 127—141.
3. И. С. Градштейн, М. Рыжик. Таблицы интегралов, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963, стр. 352.
4. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 237—239.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
22 ноября 1968 г.