АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 2

УДК 534.232:681.888

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ЗАДАННУЮ ЧАСТОТУ КОЛЕБАНИЙ

И. Х. Бутурович, Хан Дык Ким

Излагается метод расчета параметров криволинейных ультразвуковых концентраторов.

Криволинейные ультразвуковые концентраторы пока применяются в промышленных установках довольно редко, несмотря на то, что при выполнении некоторых технологических операций они более удобны, чем прямолинейные. В значительной степени это можно объяснить тем, что в настоящее время отсутствует инженерная методика расчета криволинейных концентраторов.

Для того чтобы в какой-то степени восполнить этот пробел, ниже излагается метод расчета криволинейного концентратора, у которого имеется плоскость симметрии, причем ось концентратора представляет собой дугу окружности радиуса r, радиальный размер поперечного сечения концентраторов значительно меньше радиуса кривизны ($b \leqslant 0{,}2\ r$) и ось концентратора перемещается в плоскости симметрии. Метод расчета предназначен для определения резонансной длины концентратора и распределения амплитуды колебаний по его длине при заданной частоте.

Результаты расчета концентраторов на ЭЦВМ приведены в виде графиков для собственных частот в диапазоне 18—22 *кгц*. Выбор такого диапазона объясняется тем, что современные промышленные ультразвуковые установки (например, установки для ультразвуковой размерной обработки материалов, очистки деталей, сварки и др.) работают в этой области частот.

При вышеуказанных условиях, наложенных на концентратор, известные соотношения упругости [1, 2] и уравнения движения элемента криволинейного стержня в прямоугольной системе координат (ξ_1, η) приводят к следующей системе дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\xi_1'' - \frac{\eta'}{r} + \frac{\Omega'}{\Omega}\left(\xi_1' - \frac{\eta}{r}\right) + \frac{1}{r\Omega}\left[J'\left(\eta'' + \frac{\eta}{r^2}\right) + J\left(\eta''' + \frac{\eta'}{r^2}\right)\right] = \frac{1}{c^2}\ddot{\xi}_1,$$

$$\frac{J}{\Omega}\eta'''' + \frac{2}{\Omega}J'\eta''' + \frac{1}{\Omega}\left(J'' + \frac{J}{r^2}\right)\eta'' + \frac{2}{r^2\Omega}J'\eta' + \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left(\frac{J''}{\Omega} + 1\right)\eta - \frac{\xi_1'}{r} = -\frac{\ddot{\eta}}{c^2},$$

где c — скорость распространения продольных волн, Ω, J — площадь и момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии, ξ, η — перемещения точки оси стержня, соответственно по касательному и нормальному направлениям к оси концентратора, s — криволинейная координата поперечного сечения вдоль оси концентратора, здесь и далее точки обозначают дифференцирование по времени t и штрихи — дифференцирование по координате s.

Решение системы (1) ищем в виде

$$\xi_1 = \xi_1(s)\, e^{i\omega t}, \quad \eta = \eta(s)\, e^{i\omega t},$$

где ω — угловая частота колебаний.

При этом для определения амплитуд продольных и поперечных колебаний $\xi_1(s)$, $\eta(s)$ мы получаем систему уравнений:

$$\xi_1'' + \frac{\Omega'}{\Omega}\xi_1' + k^2\xi_1 - \frac{\eta'}{r} - \frac{\Omega'}{\Omega}\frac{\eta}{r} + \frac{1}{r\Omega}\left[J'\left(\eta'' + \frac{\eta}{r^2}\right) + J\left(\eta''' + \frac{\eta'}{r^2}\right)\right] = 0,$$

$$\eta'''' + 2\frac{J'}{J}\eta''' + \left[\frac{J''}{J} + \frac{1}{r^2}\right]\eta'' + \frac{2J'}{J}\frac{\eta'}{r^2} +$$

$$+ \left[\frac{J''}{r^2 J} + \frac{\Omega}{J}\left(\frac{1}{r^2} - k^2\right)\right]\eta - \frac{\Omega}{Jr}\xi_1' = 0, \qquad (2)$$

где $k = \omega / c$.

Остановимся сначала на случае криволинейного концентратора с постоянным поперечным сечением. Так как Ω и J постоянны, то система уравнений (2) примет вид

$$\begin{gathered} \xi_1'' + k^2\xi_1 - \frac{1}{r}\eta' + \frac{J}{r\Omega}\left(\eta''' + \frac{1}{r^2}\eta'\right) = 0, \\ \eta'''' + \frac{1}{r^2}\eta'' - \frac{\Omega}{J}\left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\eta - \frac{\Omega}{Jr}\xi_1' = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Исключив η или ξ_1 из системы (3), получим

$$\begin{gathered} \xi_1''''' + \left(k^2 + \frac{2}{r^2}\right)\xi_1'''' + \left[k^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{r^4}\right]\xi_1'' - \frac{k^2}{a^2}\left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\xi_1 = 0, \\ \eta''''' + \left(k^2 + \frac{2}{r^2}\right)\eta'''' + \left[k^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{r^4}\right]\eta'' - \frac{k^2}{a^2}\left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\eta = 0, \end{gathered} \qquad (4)$$

где $a^2 = J / \Omega$.

Дифференциальные уравнения (4) — обыкновенные с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{6} C_i\, e^{\alpha_i s}, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{6} C_i'\, e^{\alpha_i s}, \qquad (5)$$

где α_i — корни характеристического уравнения:

$$\alpha^6 + \left(k^2 + \frac{2}{r^2}\right)\alpha^4 + \left[k^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{r^4}\right]\alpha^2 - \frac{k^2}{a^2}\left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) = 0. \qquad (6)$$

Для значений параметров k, r, a^2, применяющихся в ультразвуковых системах ($k = 0{,}225 - 0{,}276$ 1 / *см*, $r \geqslant 7$ *см*, $a^2 = 0{,}05 - 0{,}35$ *см*^{2}), уравнение (6) имеет два действительных и четыре мнимых корня. Поэтому выражения (5) имеют вид

$$\begin{gathered} \xi_1 = C_1 \operatorname{ch} m_1 s + C_2 \operatorname{sh} m_1 s + C_3 \cos m_2 s + C_4 \sin m_2 s + C_5 \cos m_3 s + \\ + C_6 \sin m_3 s, \\ \eta = C_1' \operatorname{ch} m_1 s + C_2' \operatorname{sh} m_1 s + C_3' \cos m_2 s + C_4' \sin m_2 s + C_5' \cos m_3 s + \\ + C_6' \sin m_3 s, \end{gathered} \qquad (7)$$

где

$$m_1=\sqrt{-2R_1\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{r^2}+k^2\right)},$$

$$m_2=\sqrt{-2R_1\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{r^2}+k^2\right)}$$

$$m_3=-2R_1\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{r^2}+k^2\right),\quad R_1=-\sqrt{\frac{B^2-3C}{9}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{B^3}{27}-\frac{B\cdot C}{6}+\frac{D}{2}}{R_1{}^3},\quad B=\frac{2}{r^2}+k^2,\quad C=k^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^4},\quad D=\frac{k^2}{a^2}\left(\frac{1}{r^2}-k^2\right),$$

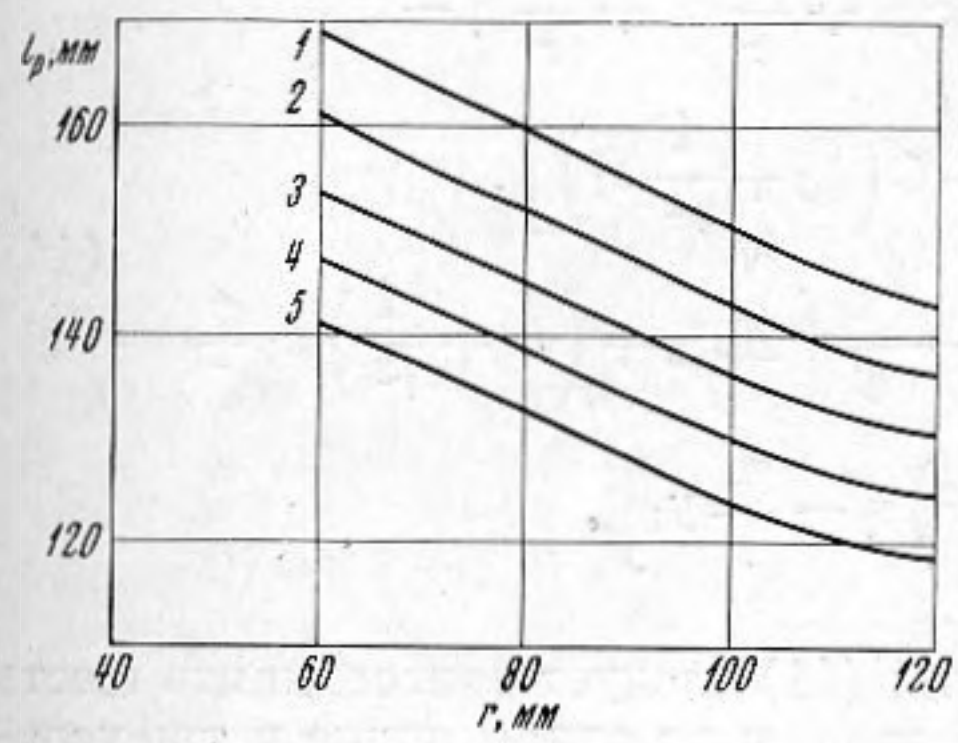
$C_1, C_2, \ldots C_1', C_2' \ldots$ — постоянные интегрирования.

Краевые условия на свободных концах концентратора $s=0$, l записываются следующим образом:

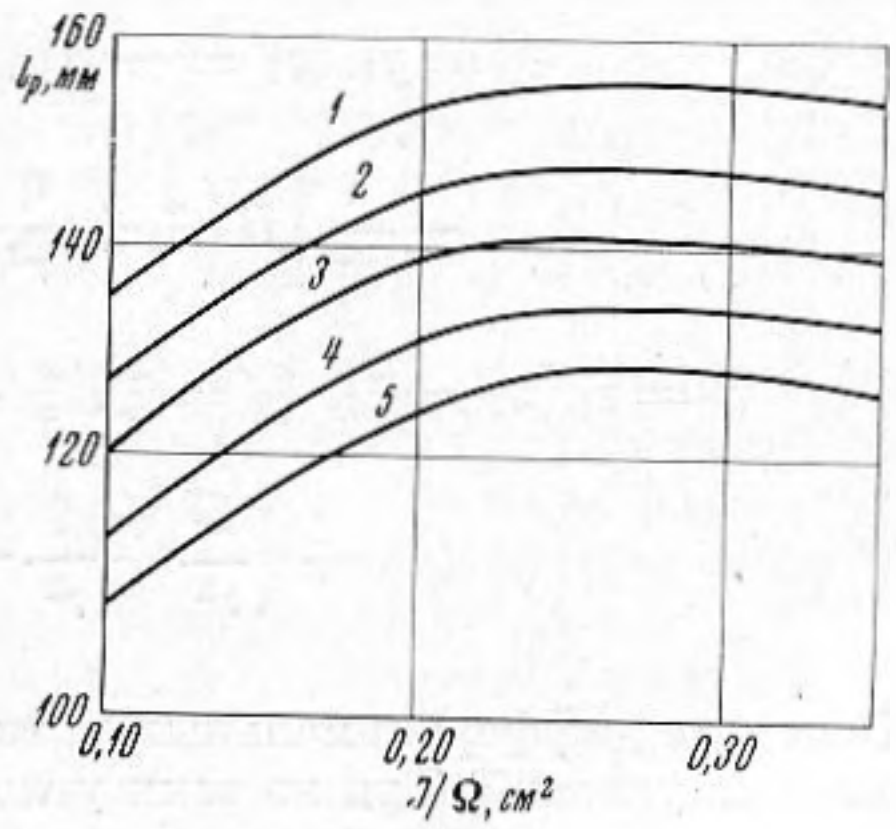
$$F=E\Omega\left(\xi_1'-\frac{\eta}{r}\right)=0,\quad M=EJ\left(\eta''+\frac{\eta}{r^2}\right)=0,$$

$$Q=EJ\left(\eta'''+\frac{\eta'}{r^2}\right)=0, \tag{8}$$

где F, M, Q — растягивающая сила, изгибающий момент и перерезывающая сила в поперечном сечении, E — модуль упругости материала концентратора.



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставив ξ_1 и η, представленные в виде (7), в систему (4), после преобразований, получим еще шесть условий.

В результате задача определения резонансной длины концентратора приводится к решению системы 12 алгебраических уравнений первого порядка. Условием нетривиальности решения является обращение в нуль определителя из коэффициентов.

Расчет резонансной длины был выполнен на ЦВМ Урал-2 для различных исходных данных. При этом определялись три первых значения резо-

нансной длины концентратора. Оказалось, что два первых значения резонансной длины соответствуют преимущественно изгибным колебаниям, а третье — продольным колебаниям.

Исходя из условий работы концентратора, мы выбрали длину концентратора, при которой имеют место наибольшие продольные колебания. Результаты этого расчета, представленные на фиг. 1, получены при $a^2 = 0{,}25$ *см*^{2}, а на фиг. 2 — при $r = 9$ *см*. На этих фигурах *1* — 18, *2* — 19, *3* — 20, *4* — 21, *5* — 22 *кгц*.

Рассмотрим теперь практически интересный случай серповидного концентратора (фиг. 3). Так как радиальный размер b серповидного концентратора значительно меньше радиуса r его оси, то площадь Ω и момент инерции J поперечного его сечения могут быть определены с достаточно большой точностью следующими выражениями:

$$\Omega = 2\delta m r\left(1 + \frac{b_{\min}}{2mr} - \sin\frac{s}{r}\right), \quad J = \frac{2\delta m^3 r^3}{3}\left(1 + \frac{b_{\min}}{2mr} - \sin\frac{s}{r}\right)^3, \tag{9}$$

где δ, $b_{\min}$ — ширина и минимальный радиальный размер концентратора соответственно, $m = e / r$. Обозначим Ω' / Ω, J' / Ω, J / Ω, J'' / Ω через A, B, C, D и напишем уравнения (2) в виде

$$\xi_1'' + A\xi_1' + k^2\xi_1 - \frac{1}{r}\eta' - \frac{A\eta}{r} + \frac{1}{r}\left[B\left(\eta'' + \frac{\eta}{r^2}\right) + C\left(\eta''' + \frac{\eta'}{r^2}\right)\right] = 0,$$

$$\eta'''' + \frac{1}{C}\left[2B\eta''' + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\eta'' + \frac{2B}{r^2}\eta' + \left(\frac{D}{r^2} + \frac{1}{r^2} - k^2\right)\eta - \frac{1}{r}\xi_1'\right] = 0. \tag{10}$$

Заменим систему двух дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков системой шести уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\xi_1' = y_1,\ y_1' = -Ay_1 - k^2\xi_1 + \frac{1}{r}z_1 + \frac{A}{r}\eta - \\ -\frac{1}{r}\left[B\left(\xi_2 + \frac{\eta}{r^2}\right) + C\left(\xi_3 + \frac{1}{r^2}z_1\right)\right], \\ \eta' = z_1,\ z_1' = \xi_2,\ \xi_2' = \xi_3,\ \xi_3' = -\frac{1}{C}\left[2B\xi_3 + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)z_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{D}{r^2} + \frac{1}{r^2} - k^2\right)\eta - \frac{1}{r}y_1\right].\end{gathered} \tag{11}$$

К системе дифференциальных уравнений (11) следует присоединить шесть краевых условий. Три из этих условий заданы на одном конце и три условия на другом конце стержня.

Решение этой краевой задачи можно представить как результат наложения трех решений начальных задач, для которых все шесть условий заданы на одном конце стержня при $s = 0$, а именно:

$$\begin{gathered}F = C_1F_1 + C_2F_2 + C_3F_3, \quad M = C_1M_1 + C_2M_2 + C_3M_3, \\ Q = C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3,\end{gathered} \tag{12}$$

где решения F_i, M_i, Q_i $(i = 1, 2, 3)$ соответствуют начальным условиям

$$\xi_i(0) = 1 \quad \xi_j(0) = 0 \quad j \neq i$$

и условиям

$$F = E\Omega\left(\xi_1' - \frac{\eta}{r}\right)_{s=0} = 0, \quad M = EJ\left(\eta'' + \frac{\eta}{r^2}\right)_{s=0} = 0,$$

$$Q = \left[EJ'\left(\eta'' + \frac{\eta}{r^2}\right) + EJ\left(\eta''' + \frac{\eta'}{r^2}\right)\right]_{s=0} = 0. \tag{13}$$

На другом конце стержня при $s = l$ должно быть

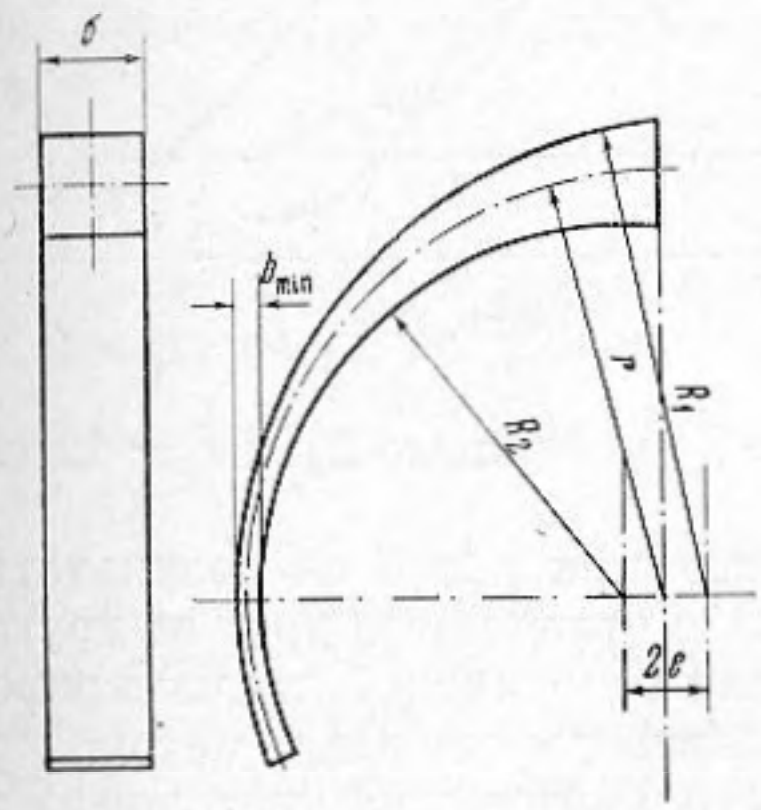
$$F(l) = 0, \quad M(l) = 0, \quad Q(l) = 0. \tag{14}$$

Условия (14) выполняются, если

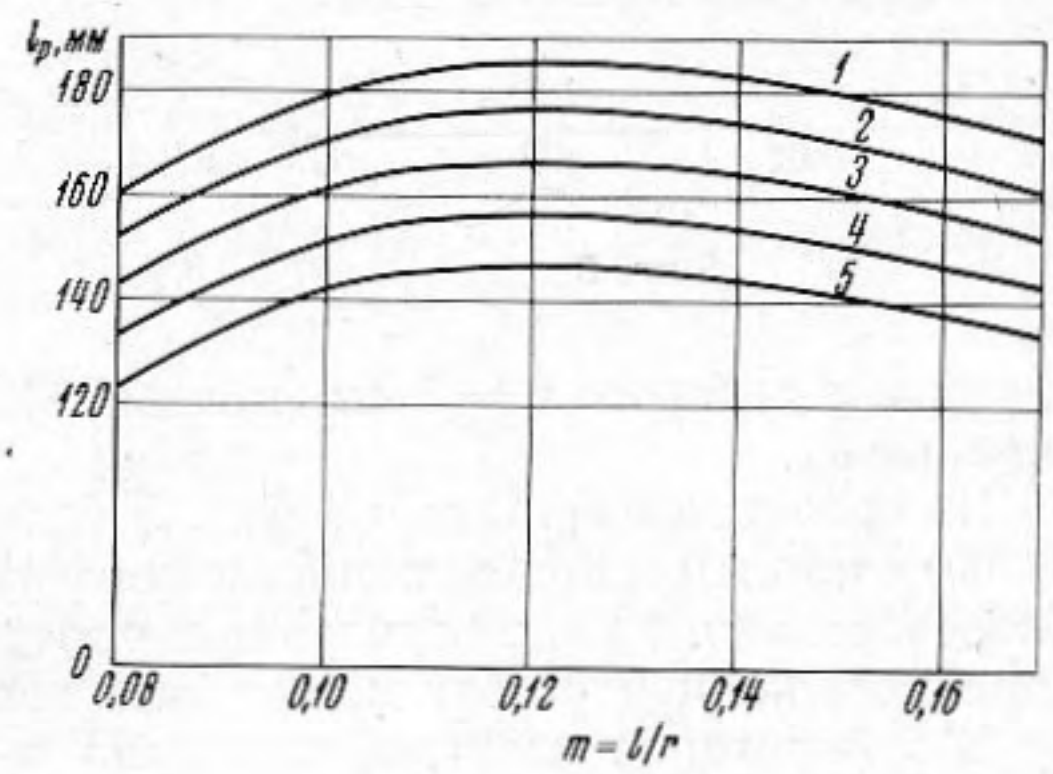
$$\Delta(l) = \begin{vmatrix} F_1(l) & F_2(l) & F_3(l) \\ M_1(l) & M_2(l) & M_3(l) \\ Q_1(l) & Q_2(l) & Q_3(l) \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) позволяет определить резонансную длину колебаний серповидного концентратора.

Для определения резонансной длины концентратора была составлена программа расчета на ЦВМ Урал-2, использующая стандартную подпро-



Фиг. 3



Фиг. 4

грамму решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка и подпрограмму решения определителя, и были выполнены расчеты нескольких серповидных концентраторов при $r = 8$ *см*, $b_{\min} = 0{,}2$ *е* (фиг. 4, где *1* — 18, *2* — 19, *3* — 20, *4* — 21, *5* — 22 *кгц*) и при $m = 0{,}1$, $b_{\min} = 0{,}02\,r$ (фиг. 5 — сплошные линии, обозначения те же).

Заметим, что для определения резонансной длины концентратора, при которой имеют место преимущественно продольные колебания, можно предложить упрощенный метод, основанный на пренебрежении изгибающим моментом. При этом система (2) заменится такой:

$$\xi_1'' + \frac{\Omega'}{\Omega}\xi_1' + k^2\xi_1 - \frac{1}{r}\left[\eta' + \frac{\Omega'}{\Omega}\eta\right] = 0, \qquad \left(\frac{1}{r^2} - k^2\right)\eta - \frac{1}{r}\xi_1' = 0. \tag{16}$$

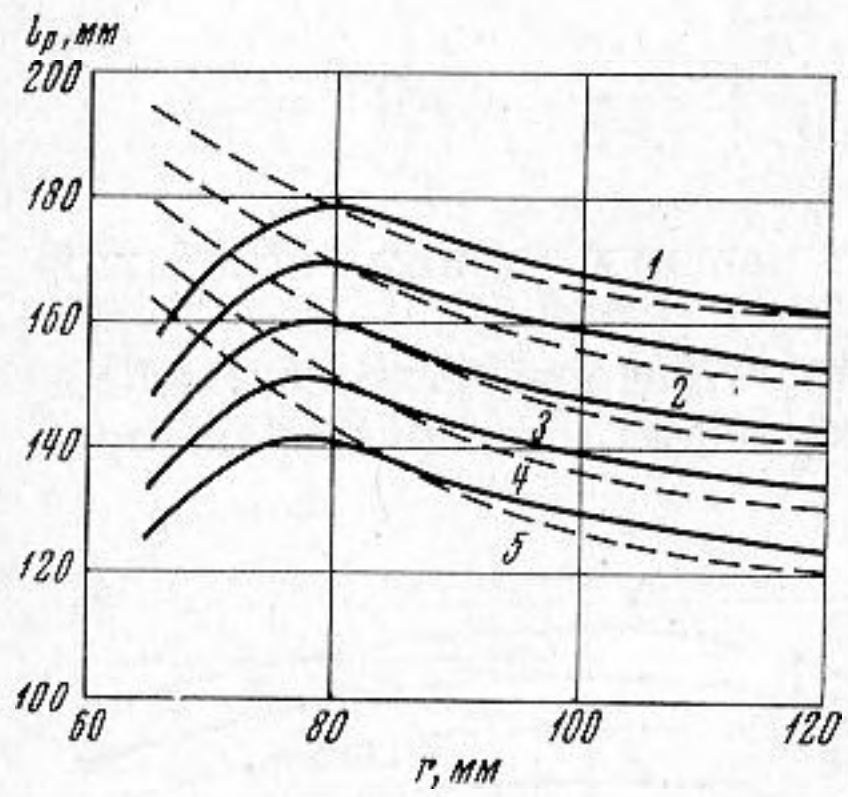
Исключив η из системы (16), получим

$$\xi_1'' + \frac{\Omega'}{\Omega}\xi_1' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\xi_1 = 0. \tag{17}$$

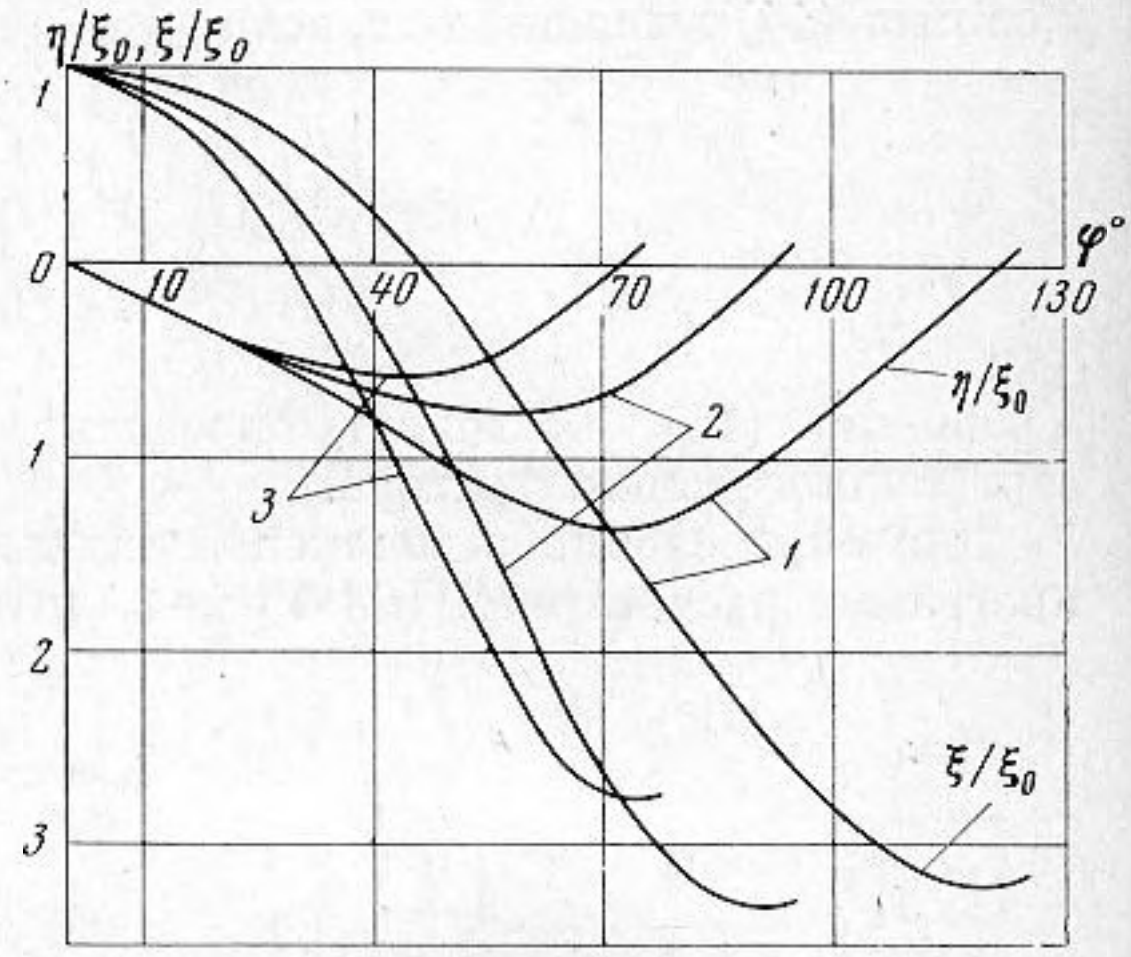
В частном случае, когда площадь поперечного сечения концентратора постоянна, уравнение (17) приводится к виду:

$$\xi_1'' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\xi_1 = 0. \qquad (18)$$

Результаты расчета резонансной длины серповидного концентратора, полученные с помощью уравнения (17) при $m = 0{,}1$ и $b_{\min} = 0{,}02\,r$, представлены на фиг. 5 штриховыми линиями. На фиг. 6 показано рассчитанное с помощью того же уравнения (17) распределение амплитуды продольных ξ_1 / ξ_{10} и поперечных η / ξ_{10} колебаний вдоль оси серповидного концен-



Фиг. 5



Фиг. 6

тратора, у которого $r = 7$ *см* (кривые *1*), $r = 9$ *см* (кривые *2*) и $r = 11$ *см* (кривые *3*).

Из сравнения кривых на фиг. 5 видно, что при $r \geqslant 8$ *см* результаты расчета точным и приближенным методами мало отличаются друг от друга. Следовательно, в ряде случаев при определении резонансной длины криволинейного концентратора может быть использован упрощенный метод.

В лаборатории электрофизических и электрохимических методов размерной обработки материалов Ленинградского политехнического института по вышеизложенным результатам была изготовлена серия концентраторов различных типов и размеров. Проверка показала, что действительные значения собственных частот этих концентраторов отличались не более чем на 2,5% от расчетных.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. М., ГТТИ, 1958.
2. С. П. Тимошенко. Колебания в инженерном деле. М., ГТТИ, 1959.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию
23 декабря 1968 г.