

УДК 534.232

ВЗАИМНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ МАЛЫХ ПОРШНЕЙ В ВЫПУКЛОМ ЭКРАНЕ

Ю. Ю. Добровольский

Описан приближенный метод определения взаимного сопротивления излучения поршней, расположенных на гладком выпуклом абсолютно жестком экране, главные радиусы кривизны поверхности которого велики по сравнению с длиной звуковой волны. Взаимное сопротивление излучения малых поршней в выпуклом экране выражено в виде произведения универсальной функции Фока и взаимного сопротивления излучения этих поршней при плоском экране.

В работах, посвященных изучению взаимодействия поршней, которые находятся в неплоском абсолютно жестком экране, взаимное сопротивление излучения определялось в виде разложений по собственным ортогональным функциям задачи [1, 2]. Известно, что использованный в этих работах метод собственных функций не является универсальным, поскольку его применение накладывает значительные ограничения на форму поверхности экрана, требуя, чтобы она совпадала с координатными поверхностями таких систем координат, которые допускают разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Ниже рассматривается приближенный способ определения взаимного сопротивления излучения, основанный на методе коротковолновой асимптотики, который предъявляет менее строгие требования к форме поверхности экрана.

Взаимное сопротивление излучения поршней 1 и 2 в абсолютно жестком экране находится из выражения

$$Z_{12} = R_{12} - iX_{12} = -\frac{i\omega\rho}{4\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (1)$$

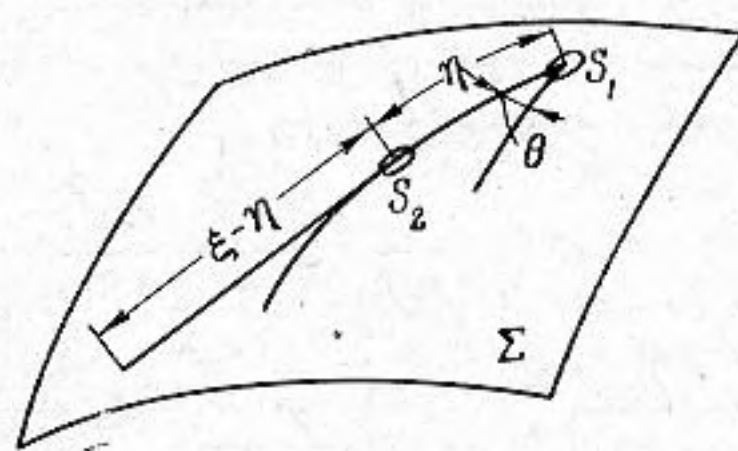
где индексы 1 и 2 указывают на принадлежность обозначений соответствующим поршням. Здесь и далее приняты обозначения: ω — круговая частота, ρ — плотность среды, \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий точку на поверхности S поршня, $f(\mathbf{r})$ — форма колебаний поверхности поршня, $G(\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2)$ — функция Грина внешней задачи Неймана. Временной множитель принят в виде $\exp(-i\omega t)$. Как видно из формулы (1), рассматриваемая задача сводится, в основном, к нахождению частного вида функции Грина, при расположении источника и точки наблюдения на поверхности экрана.

Пусть взаимодействующие поршни находятся в выпуклом экране Σ , поверхность которого лишена каких-либо изломов. Примем также, что минимальный радиус кривизны поверхности экрана превышает длину звуковой волны λ в окружающей среде. В этом случае естественно использование коротковолновой асимптотики функции Грина $G(\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2)$, выраженной в терминах универсальной функции Фока. Далее покажем, что при медленном изменении радиусов кривизны от точки к точке поверхности экрана требуемая асимптотика может быть весьма просто найдена из асимптотических выражений, полученных в работах [3—6].

Будем искать функцию $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = 0$$

везде, кроме источника на поверхности Σ , в точке \mathbf{r}' расположения которого искомая функция должна обладать особенностью, характерной для функции Грина. Кроме того, потребуем, чтобы $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$ удовлетворяла граничным условиям задачи Неймана на поверхности Σ и условию излучения при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. Введем эвольвентную лучевую систему координат $\{\xi, \eta, \theta\}$, центр которой O совместим, например, с фазовым центром поверхности поршня S_1 . Систему координат $\{\xi, \eta, \theta\}$ строим следующим образом. На поверхности Σ первоначально вводим ортогональную полугеодезическую полярную систему координат $\{\eta, \theta\}$, в которой линии $\theta = \text{const}$ образуют пучек геодезических, исходящих из точки O , а линии $\eta = \text{const}$ — геодезические окружности с центром в этой точке [7, 8]. Систему координат $\{\eta, \theta\}$ дополним семейством лучевых линий ξ , состоящих из отрезков геодезических η и прямолинейных отрезков $\xi - \eta$, касающихся геодезических η . Заметим, что семейство линий ξ и η соответствует эвольвентным лучевым координатам на плоскости. Вследствие такого построения система координат $\{\xi, \eta, \theta\}$ является одновременно лучевой, полугеодезической и ортогональной (фиг. 1). Ее коэффициенты Ламе будут соответственно $h_1 = 1$, $h_2 = (\xi - \eta) / \rho(\eta)$ и h_3 ; $\rho(\eta)$ — радиус кривизны геодезической $\theta = \text{const}$ на поверхности Σ в точке отрыва луча. Коэффициент Ламе h_3 определяется локальными свойствами поверхности Σ и может быть найден лишь при ее конкретизации. В некоторых случаях может оказаться полезен ряд [7]



Фиг. 1

где K_0 — гауссова кривизна поверхности в начале координат $\{\eta, \theta\}$, K_1 и K_2 — производные от K_0 по η в начале системы координат в направлении геодезических $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ соответственно. Для некоторых поверхностей коэффициенты h_3 могут быть просто определены из геометрических построений. Так, для произвольного выпуклого цилиндра $h_3 = \eta$, для сферы с радиусом a $h_3 = a \sin(\eta/a)$.

$$h_3 = \eta \left\{ 1 - \frac{K_0}{3} \eta^2 - \frac{1}{6} (K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta) \eta^2 + \dots \right\}^{1/2},$$

Уравнение Гельмгольца в системе координат $\{\xi, \eta, \theta\}$ принимает вид

$$\frac{\rho(\eta)}{(\xi - \eta) h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{(\xi - \eta) h_3}{\rho(\eta)} \cdot \frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_3 \rho(\eta)}{\xi - \eta} \cdot \frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\xi - \eta}{\rho(\eta) h_3} \frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial \theta} \right] \right\} + k^2 G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = 0. \quad (2)$$

Ввиду того, что амплитуда поля вблизи поверхности Σ существенно изменяется в направлении нормали и слабо — вдоль поверхности [3], функцию Грина будем искать в виде произведения медленно меняющейся волновой амплитуды и быстро осциллирующего экспоненциального множителя $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = A \exp(ik\xi)$. В результате подстановки получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{(\xi - \eta) h_3}{\rho(\eta)} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\xi - \eta}{\rho(\eta) h_3} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_3 \rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial A}{\partial \eta} \right] + \frac{ik(\xi - \eta)}{\rho(\eta)} \left[h_3 \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial h_3 A}{\partial \xi} \right] + \frac{ikh_3}{\rho(\eta)} A = 0. \quad (3)$$

В выражении (3) первый член учитывает продольную диффузию волновой амплитуды A (диффузия вдоль координаты ξ) [4, 5]. В силу того, что рассматриваются экраны, радиусы кривизны поверхностей которых превышают длину волны, этим членом в дальнейшем пренебрежем. Будем пренебрегать также изменением волновой амплитуды по координате θ (второй член в выражении (3)) [3]. В полученном «укороченном» уравнении, которое является параболическим, сделаем новую подстановку: $A = (h_3)^{1/3} U$. После несложных преобразований «укороченное» уравнение (3) преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + 2ik \frac{\xi - \eta}{\rho(\eta)} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ik}{\rho(\eta)} U = 0, \quad (4)$$

решение которого при плавном изменении кривизны поверхности Σ , удовлетворяющем условию

$$\frac{\rho(\eta)}{2k^{2/3}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \rho(\eta)^{1/3} \ll 1,$$

подробно исследовано в работе [5]. Учитывая результаты этой работы и сделанные выше подстановки, можно показать, что при положении точки наблюдения на поверхности экрана $\xi - \eta = 0$ и

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = \frac{e^{ik\xi}}{4\pi h_3^{1/2}} \left(\frac{k}{2\rho(\eta)\rho(0)} \right)^{1/6} x_{12}^{-1/2} V(x_{12}, 0, 0, 0), \quad (5)$$

где $x_{12} = (k/2) \int_0^\eta [k\rho(\bar{\eta})/2]^{-2/3} d\bar{\eta} \cdot V(x_{12}, 0, 0, 0)$ — универсальная функция

Фока, табулированная в работе [9]. Формула (5) пригодна для вычисления функции Грина в пределах геодезической окрестности источника. Если же между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' можно провести N различных геодезических линий, коротковолновую асимптотику функции Грина следует искать в виде

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = \sum_N G_N(\mathbf{r}/\mathbf{r}'), \quad \text{где } G_N(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \text{ — частная функция Грина, кото-}$$

рая определяется по формуле (5) в лучевой системе координат, включающей N -ю геодезическую в качестве координаты η .

Очевидно, что применение коротковолновой асимптотики функции Грина (5) при вычислении Z_{12} по формуле (1) значительно расширяет класс поверхностей экранов, для которых могут быть выполнены расчеты. При этом в случае малых поршней можно получить простые приближенные формулы, используя то обстоятельство, что универсальные функции Фока являются монотонными и слабо изменяются на участках длины, соизмеримых с длиной звуковой волны. Действительно, при выполнении условия $kD \ll (k\rho)^{2/3}$, где D — характерный размер поршня, функция $V(x_{12}, 0, 0, 0)$ может быть вынесена за знак интеграла. Полагая также, что в силу медленного изменения кривизны поверхности Σ ее радиусы кривизны и коэффициент h_3 неизменны в пределах поверхности поршня, малого по сравнению с длиной волны, получим выражение

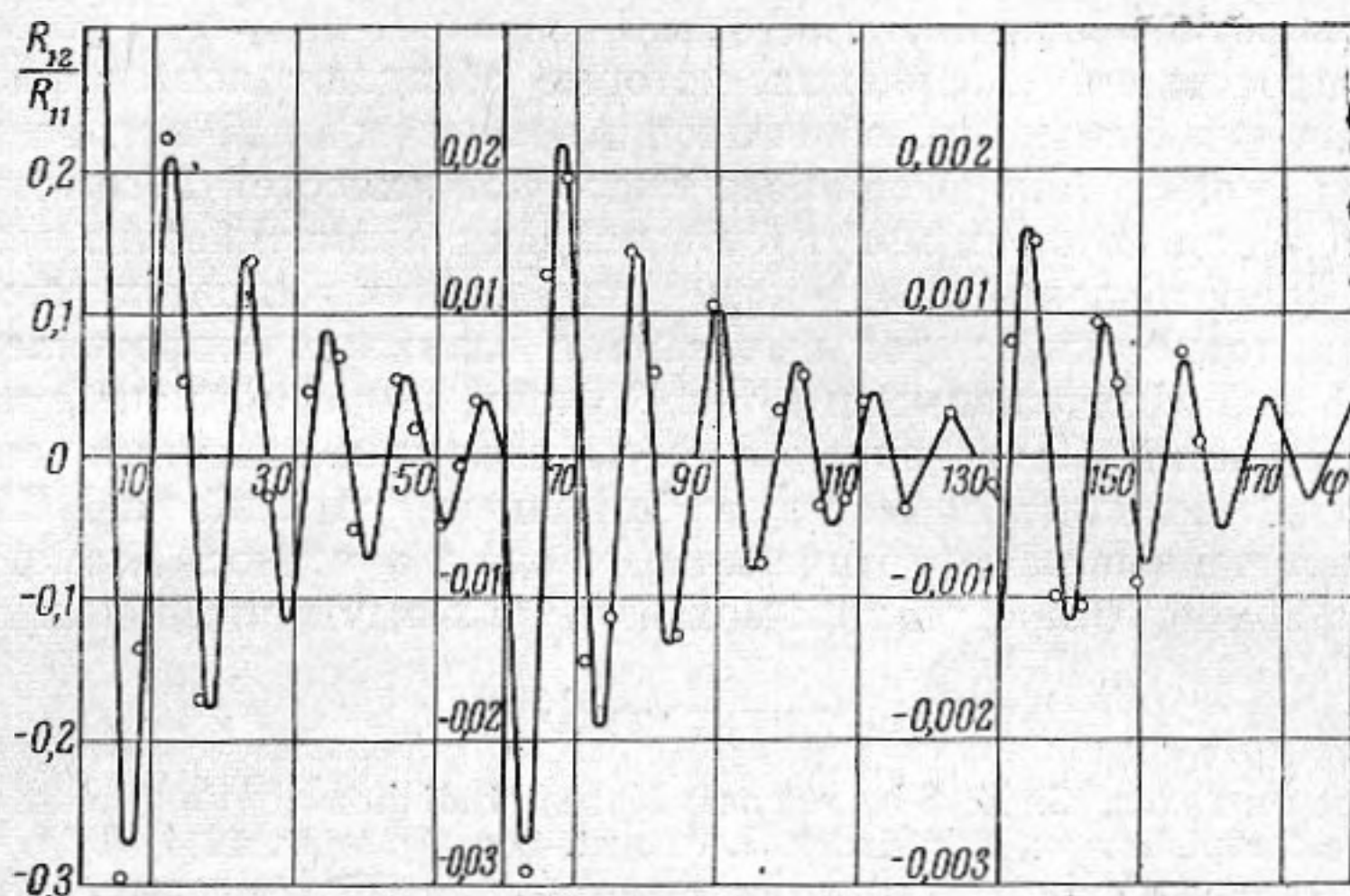
$$Z_{12} \approx - \frac{i\omega\rho}{4\pi} \left[\frac{k}{2\rho(\eta)\rho(0)} \right]^{1/6} \frac{\eta}{\sqrt{h_3 x_{12}}} V(x_{12}, 0, 0, 0) \int_{S_1} \int_{S_2} \times \\ \times f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 0,5 \left[\frac{k}{2\rho(\eta)\rho(0)} \right]^{1/6} \frac{\eta}{\sqrt{h_3 x_{12}}} V(x_{12}, 0, 0, 0) Z_{12}^n, \quad (6)$$

где Z_{12}^n — взаимное сопротивление поршней 1 и 2, помещенных в абсолютно жесткий бесконечный экран на расстоянии друг от друга, численно равным η .

Коротковолновая асимптотика функции Грина, полученная в работах [5, 6] может быть непосредственно использована для нахождения аналогичного приближенного выражения взаимного сопротивления излучения весьма длинных полос, находящихся в жестком цилиндрическом выпуклом экране

$$Z_{12} \approx \frac{\omega \rho H^2}{4} \left[\frac{k}{2\rho(\eta)\rho(0)} \right]^{1/6} \left(\frac{\eta}{x_{12}} \right)^{1/2} V(x_{12}, 0, 0, 0) \int_{L_1} \int_{L_2} f(r_1) f(r_2) H_0^{(1)} \times \\ \times [k|r_2 - r_1|] dr_1 dr_2 = 0,5 \left[\frac{k}{2\rho(\eta)\rho(0)} \right]^{1/6} \left(\frac{\eta}{x_{12}} \right)^{1/2} V(x_{12}, 0, 0, 0) Z_{12}^{\Pi}. \quad (7)$$

Здесь η — расстояние по образующей цилиндрического экрана между центрами полос, H — длина полос, L_1 и L_2 — ширина полос, Z_{12}^{Π} — отнесенное к единице длины взаимное сопротивление полос, заключенных в жесткий плоский бесконечный экран, $H_0^{(1)}[k|r_2 - r_1|]$ — функция Ханкеля 1-го рода.



Фиг. 2

Выражения (6) и (7) весьма удобны при практических вычислениях, так, как взаимное сопротивление излучения преобразователей в плоском жестком экране наиболее полно исследовано и описано в литературе. Если характерные размеры поршней и ширина полос, заключенных в плоский экран, существенно меньше длины звуковой волны и расстояния η , выражения их взаимных сопротивлений упрощаются:

для поршней

$$Z_{12}^{\Pi} \approx -i \frac{\rho \omega}{2\pi} S_1 S_2 \frac{e^{ik\eta}}{\eta}, \quad (8)$$

для полос при $k\eta \gg 1$

$$Z_{12}^{\Pi} \approx \frac{\rho \omega L_1 L_2 H}{2} \left(\frac{2}{\pi k \eta} \right)^{1/2} e^{ik\eta - i\pi/4}. \quad (9)$$

Из формул (6) и (7) и вида функции Фока $V(x_{12}, 0, 0, 0)$ следует, что для неплоских экранов при малых расстояниях между поршнями или полосами $Z_{12} \approx Z_{12}^{\Pi}$, при больших расстояниях $|Z_{12}| < |Z_{12}^{\Pi}|$. Нулевые значения R_{12} и X_{12} , а также R_{12}^{Π} и X_{12}^{Π} имеют место при разных расстояниях между поршнями η . Это различие усиливается с увеличением расстояния η .

Степень совпадения значений взаимного сопротивления излучения поршней в выпуклом экране, вычисленных методом собственных функций и по приближенной формуле (7), иллюстрируется фиг. 2, на которой приведены значения отношений активных составляющих взаимного и собственного сопротивлений излучений двух бесконечных полос, заключенных

в жесткий цилиндрический экран. Значения, найденные методом собственных функций, показаны сплошными линиями, вычисленные по формуле (7), показаны точками. Расчеты выполнены при различных значениях углового расстояния φ между центрами полос, для $ka = 31,4$ и $\varphi_0 = 3^\circ 26'$, где a — радиус цилиндра, φ_0 — угловой размер полосы. Из фиг. 2 видно, что при $a \gg \lambda$ приближенный метод обеспечивает удовлетворительное совпадение с результатами, найденными по точной формуле, как это и следует из условия получения асимптотических выражений для функции Грина. Очевидно, при $a \gg \lambda$ приближенным методом проще пользоваться и в тех случаях, когда поверхности экрана совпадают с фундаментальными поверхностями систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца, и имеются точные формулы для Z_{12} , найденные методом собственных функций.

Выводы

Метод коротковолновой асимптотики позволяет получить формулы взаимного сопротивления излучения, которые обладают ясным физическим и геометрическим смыслом, облегчающим качественный анализ решений. Этот метод существенно расширяет класс поверхностей абсолютно жестких экранов, для которых могут быть найдены аналитические выражения взаимных сопротивлений излучения. При больших волновых размерах экранов асимптотический метод вычисления взаимных сопротивлений оказывается более эффективным и в тех случаях, когда применим метод собственных функций. Приведенные в статье значения взаимных сопротивлений полос вычислялись по методу собственных функций на ЦВМ, значения же, полученные асимптотическим методом, оказалось возможным определить с помощью простейших механических вычислительных приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Greenspan, C. H. Sherman. Mutual radiation impedance and nearfield pressure for pistons on a cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 1, 149—159.
2. C. H. Sherman. Mutual radiation impedance of sources on a sphere. J. Acoust. Soc. America, 1959, 31, 7, 947—952.
3. В. А. Фок. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1946, 10, 2, 171—186.
4. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Радиотехн. и электрон., 1961, 6, 8, 1247—1258.
5. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия при дифракции коротких волн на выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной. Радиотехн. и электрон., 1963, 8, 3, 363—388.
6. В. С. Буслаев. Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на гладких выпуклых контурах. Тр. МИАН СССР, 1964, 73, 2.
7. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1935.
8. В. Ф. Коган. Основы теории поверхностей, ч. 1. М., ГТТИ, 1947.
9. П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина. Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности. М., «Сов. радио», 1957.

Ленинград

Поступила в редакцию
25 апреля 1969 г.