АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

УДК 534.26

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

В. С. Иванов, В. Н. Романов

Определяется пространственная граница области, в которой возможно использование асимптотического решения задачи об излучении пластины под действием сосредоточенной силы, полученного Л. Я. Гутиным. Приводятся аналитические выражения для звукового давления вблизи пластины вдоль линии действия силы.

Асимптотический метод, с помощью которого Гутин [1] получил решение задачи об излучении бесконечной пластины, возбужденной сосредоточенной силой, не позволяет оценить погрешность, возникающую при вычислении акустического давления на конечных расстояниях от пластины.

Качественный анализ этого вопроса, проведенный Плаховым [2], показал, что погрешность использования решения Гутина тем меньше, чем меньше относительная толщина пластины kh (k — волновое число в жидкости, h — толщина пластины). Численная оценка, произведенная им с помощью ЦВМ для частного случая $kh = 0{,}2$, показала, что решение Гутина дает погрешность не более одного децибела уже при $kz = 2$.

Предпринятый в настоящей работе более подробный анализ вопроса был вызван практической необходимостью вычислять в ряде случаев звуковое давление в достаточной близости к излучающей поверхности, а также стремлением оценить характер изменения давления вблизи пластины при изменении параметров задачи в широких пределах.

Применяя для решения задачи преобразование Ханкеля, мы приходим для давления в жидкости, соприкасающейся с точечно возбужденной пластиной, к выражению

$$p(r; z; t) = -\frac{b\beta^3 k^2 F \exp(-i\omega t)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(kr\lambda) \exp(-kz\sqrt{\lambda^2-1})\lambda}{(\lambda^4-\beta^2)\sqrt{\lambda^2-1} - b\beta^3}\, d\lambda, \quad (1)$$

где $F \exp(-i\omega t)$ — гармоническая сосредоточенная сила, возбуждающая пластину; r, z — цилиндрические координаты (r — в плоскости пластины, z — по нормали к ней); ω — круговая частота;

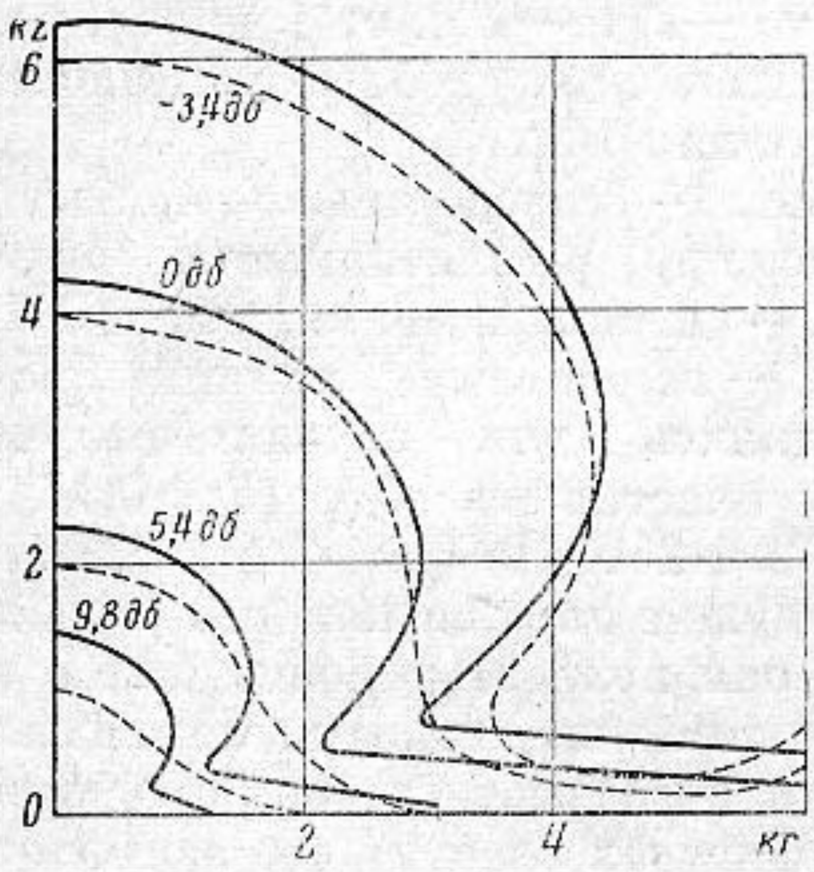
$$\beta = \frac{1}{kh}\frac{2\sqrt{3}\,c}{c_n}, \quad b = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{c_n}{2\sqrt{3}\,c},$$

$c_п$ и c — скорости распространения продольных волн в материале пластины и в жидкости; ρ и ρ_0 — плотности жидкости и материалы пластины; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

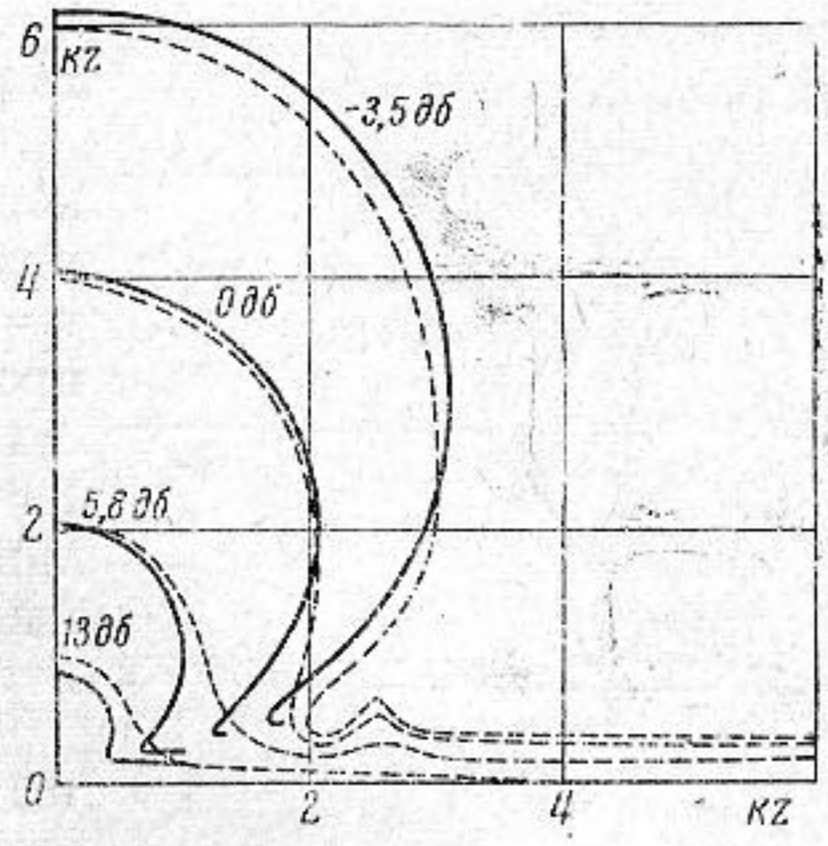
Выражение (1) написано в предположении, что пластина соприкасается с жидкостью одной стороной. При двухстороннем касании необходимо удвоить слагаемое $b\beta^3$ в знаменателе подынтегрального выражения.

Выражение (1) легко вычисляется лишь при $kz \gg 1$ и $kr \gg 1$; при этом используется метод перевала и в результате вычислений получается асимптотическое выражение для звукового давления вдали от пластины. Однако метод перевала не дает возможности определить аналитическим путем пространственную границу применения асимптотического выражения.

Для определения этой границы необходимо произвести численный расчет выражения (1) и сравнить результаты этого расчета с расчетом по асимптотическому выражению. На частотах много меньше граничной ча-



Фиг. 1



Фиг. 2

стоты ($\beta \gg 1$) вычисление интеграла (1) сведем к вычислению интеграла по перевальному пути и к вычислению вычета подынтегральной функции в полюсе q, расположенном на действительной оси. Вкладом в результат вычисления других полюсов, расположенных на комплексной плоскости λ, пренебрегаем из-за их значительной мнимой части. В результате мы получаем выражение:

$$p(r, z) = P_{\text{пр}} + P_{\text{пов}} = \frac{-b\beta^3 k^2 F}{2\pi}\left\{\frac{i}{kR}\,\frac{\cos\nu\exp(ikR)}{b\beta^3\left[1 - \frac{i\cos\nu}{b\beta}\left(1 - \frac{\sin^4\nu}{\beta^2}\right)\right]} + \right. \tag{2}$$

$$\left. + i\sqrt{\frac{2\pi(q_1^2 - 1)}{krq_1}}\,\frac{\exp\left[i(krq_1 - \pi/4) - kz\sqrt{q_1^2 - 1}\right]}{5q_1^4 - 4q_1^2 - \beta^2}\right\}\exp(-i\omega t).$$

Здесь $R = \sqrt{r^2 + z^2}$; ν — угол между радиусом-вектором $\hat{\mathbf{R}}$ и z осью. На основании работы Гутина [1] легко найти, что

$$q_1 = \sqrt{\beta}\sqrt[4]{1 + b/\sqrt{\beta}/\sqrt[4]{1 + b\sqrt{\beta}/\sqrt[4]{1 + \ldots}}}$$

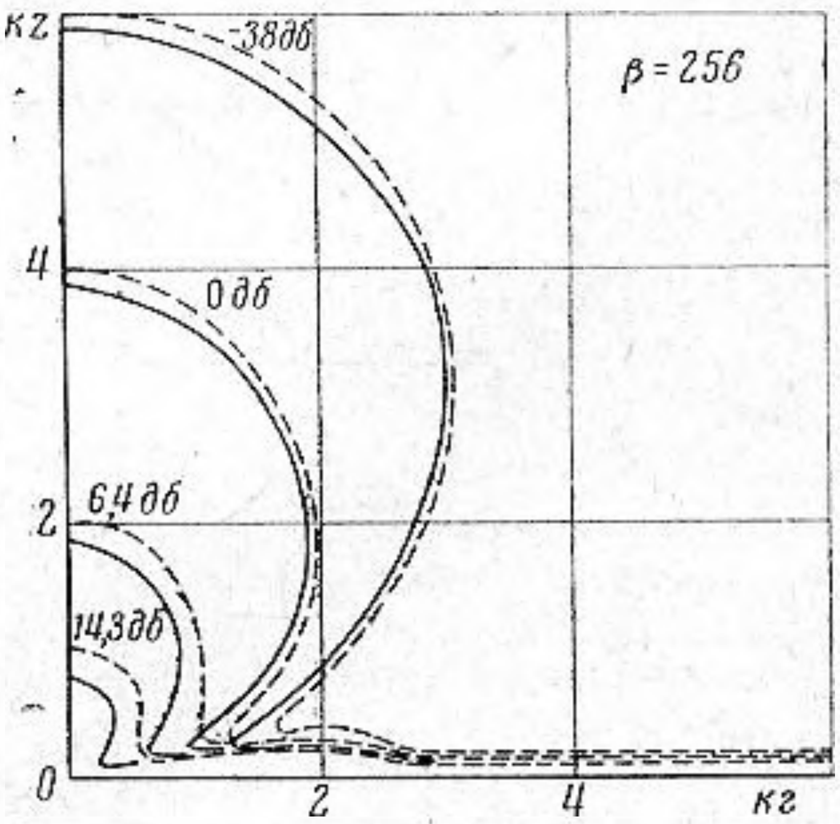
Первый член в выражении (2) определяет пространственную волну в жидкости, а второй — поверхностную волну, амплитуда которой экспоненциально убывает по нормали к пластине.

При удалении точки наблюдения вдоль пластины от точки приложения силы F поверхностная волна начинает обуславливать все больший вклад в излучение пластины, ибо из-за наличия направленности излучения в виде $\cos\vartheta$ пространственная волна не дает заметного вклада в точках, расположенных вблизи пластины.

Приравняв модули $P_{\text{пр}}$ и $P_{\text{пов}}$, можно определить поверхность, на которой эти модули равны. Для случая низких частот ($b\beta \gg 1$ и $\beta \gg 1$) уравнение поверхности имеет вид

$$\cos^{3/2}\nu = b\beta^3\sqrt{\frac{2\pi kz(q_1^2 - 1)}{q_1}}\,\frac{\exp(-kz\sqrt{q_1^2 - 1})}{5q_1^4 - 4q_1^2 - \beta^2}.$$

Для проведения численного расчета интеграла в выражении (1) необходимо сместить полюс q_1 с вещественной оси, которая является путем интегрирования. Для этого учтем внутренние потери в материале пластины, коэффициент которых обозначим η. При этом в выражение (1) необходимо подставлять параметры задачи с учетом η: $\beta^2 = \beta_0^2(1 + i\eta)$; $b\beta^3 = b_0\beta_0^3(1 + 5i\eta)$, где индекс 0 определяет параметры, рассчитываемые без учета η. Выделив действительную и мнимую части подынтегральной функции и разделив путь интегрирования от 0 до ∞ на два участка (от 0 до 1, в пределах этого участка $\sqrt{\lambda^2 - 1} = -i\sqrt{1 - \lambda^2}$ и от 1 до ∞), мы получим выражения, удобные для численного расчета на ЦВМ.



Фиг. 3

На фиг. 1—3 представлены кривые равного давления, рассчитанные по выражению (2) — сплошные линии, и на ЦВМ при $\eta = 10^{-3}$ — штриховые линии. Расчеты производились для случая излучения стальной пластины в воду ($b = 0{,}13$) при $\beta = 4$; 32 и 256. На фиг. 2 и 3 сплошные линии, идущие параллельно оси kr, оборваны, ибо они полностью совпадают с соответствующими штриховыми линиями.

Из анализа результатов, представленных на фигурах, следует, что асимптотическое выражение, полученное при условии $kz \gg 1$ и $kz \gg 1$, достаточно хорошо описывает излучение пластин и для более близких расстояний: до $kz = 1$ и $kr = 3$. След поверхности, на которой $|P_{\text{пр}}| = |P_{\text{пов}}|$, проходит через точки перегибов сплошных линий и на фигурах не представлен. Ниже этого следа давление излучения определяется поверхностной волной, выше — пространственной.

Для случая относительно низких частот, представляющего большой практический интерес, можно получить аналитическое выражение для звукового давления вблизи пластины по нормали к ней вдоль линии действия силы.

Если $\beta^2 \geqslant 10$ и $\dfrac{1}{b^2\beta^2} \leqslant 0{,}15$ $\left(\dfrac{1}{4b^2\beta^2} \leqslant 0{,}15\right.$ при двустороннем соприкосновении воды с пластиной), то для $\nu = 0$ при любых z интеграл (1) может быть приближенно вычислен при ошибке не более 1 *дб*:

$$p(0,z) = -\frac{k^2F}{2\pi}\left\{-\underline{\frac{\sin kz}{kz}} - \frac{\cos kz - 1}{(kz)^2} + \frac{1}{b\beta}\left[-\underline{\frac{\cos kz}{kz}} + \frac{2\sin kz}{(kz)^2} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{2(\cos kz - 1)}{(kz)^3}\right] + i\left[-\underline{\frac{\cos kz}{kz}} + \frac{\sin kz}{(kz)^2} + \frac{1}{b\beta}\left(\underline{\frac{\sin kz}{kz}} + \frac{2\cos kz}{(kz)^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{2\sin kz}{(kz)^3}\right)\right] + b\beta^3\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-kz\lambda)\,\lambda d\lambda}{[(\lambda^2+1)^2 - \beta^2]\,\lambda - b\beta^3}\right\}. \qquad (3)$$

Последний член этой формулы (интеграл) представляет собой давление, обусловленное наличием присоединенной массы жидкости (неволновая зона), остальные члены описывают звуковое давление в среде. Подчеркнутые члены формулы (3) соответствуют асимптотическому решению (первый член формулы (2)).

Интеграл в формуле (3) может быть вычислен приближенно, если принять во внимание, что при относительно больших kz величина интеграла будет определяться подынтегральной функцией вблизи нулевых значений аргумента. Обозначая интеграл буквой I, получаем

$$I \cong -\frac{1}{\beta^2 - 1}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-kz\lambda)\,\lambda}{\lambda + a_1}\,d\lambda, \text{ где } a_1 = \frac{b\beta^3}{\beta^2 - 1}.$$

Тогда

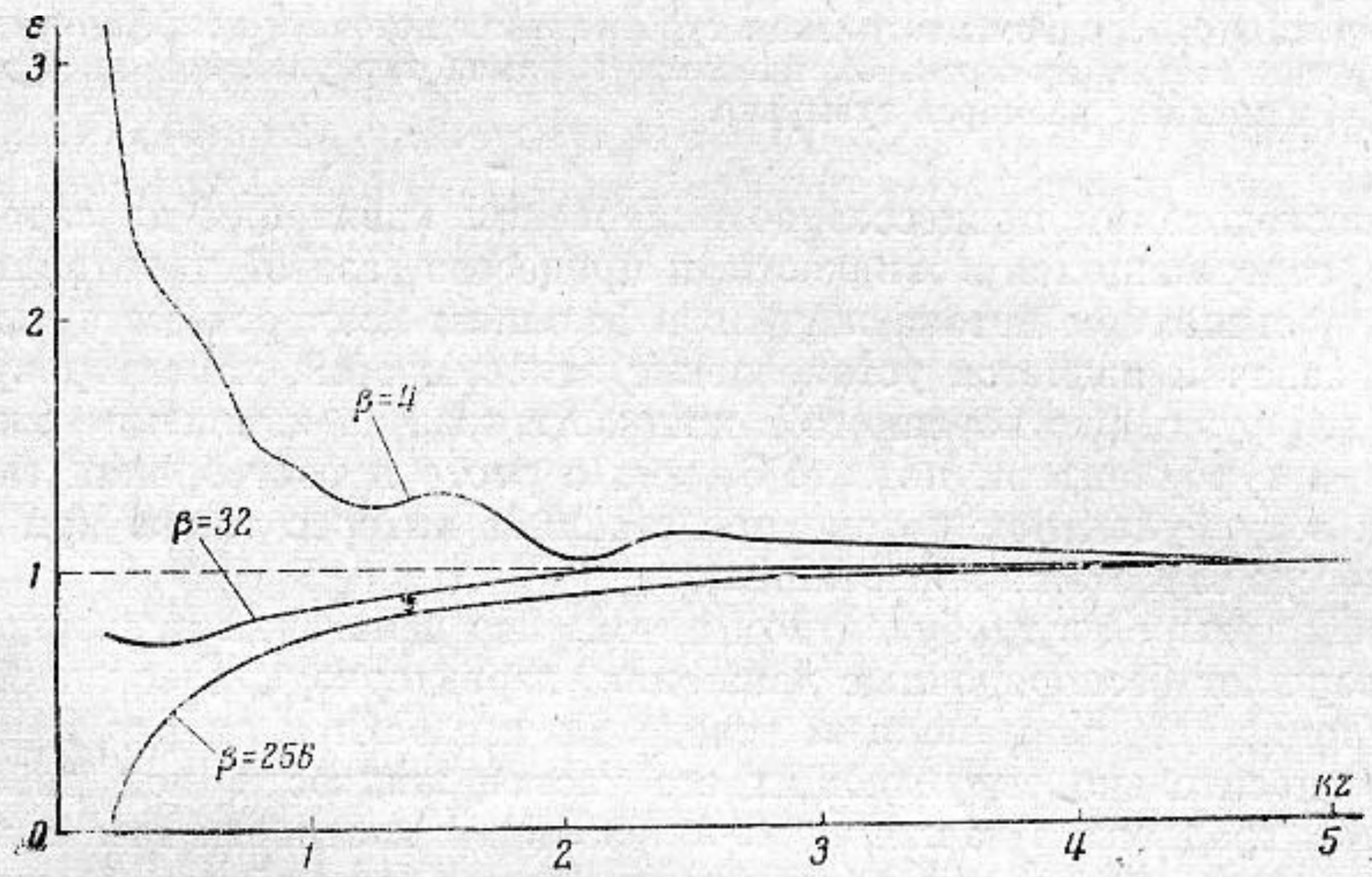
$$I \cong -\frac{1}{\beta^2-1}\left[a_1 \exp(a_1kz)\cdot Ei(-a_1kz)+\frac{1}{kz}\right], \qquad (4)$$

или, используя асимптотическое выражение для интегральной показательной функции,

$$Ei(-a_1kz), I \cong -\frac{1}{\beta^2-1}\left[\frac{1!}{a_1(kz)^2}-\frac{2!}{a_1^2(kz)^3}+\dots\right].$$

Сопоставление расчетов на ЦВМ с расчетами по формуле (4) показывает, что ошибка не превосходит 1 *дб*, если $kz \geqslant 3/q_1$. Второе выражение для I может быть использовано при выполнении дополнительного неравенства: $a_1kz \geqslant 4$.

Заметим, что при рассмотрении случая двухстороннего соприкосновения пластины с жидкостью необходимо вместо b полагать $2b$. Тогда полу-



Фиг. 4

ченное решение распространяется на более высокочастотную область. Расчеты по формулам (3) и (4), проведенные для большого числа значений b и β, показывают, что в области малых значений kz, где асимптотическое решение неприменимо, модуль суммарного давления $P_т$ выше, чем это следует из асимптотического решения P_a, для $\beta > 30$ и ниже для $\beta < 30$ (см. фиг. 4, где построено отношение $\varepsilon = P_a / P_т$). Зависимость этого отношения от параметра b при его изменении в практических важных пределах $0{,}13 \leqslant b \leqslant 0{,}90$ невелико.

Весьма существенно отметить, что хорошее совпадение точного и асимптотического решений обеспечивается за счет давления в неволновой зоне, которое в большом диапазоне значений β компенсирует разницу между давлениями, определенными по обоим этим решениям (интеграл в формуле (3) частично компенсирует неподчеркнутые члены в этой же формуле). Сравнение только по звуковому давлению в волновой зоне (без учета интеграла в выражении (3)) показывает, что вблизи пластины асимптотическое решение (2) дает существенное превышение над точным уже при $kz = 3 \div 4$.

Таким образом, для случая низких частот асимптотические формулы с успехом могут быть использованы для описания поля излучения вблизи пластины за исключением небольшой области, примыкающей к началу координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Я. Гутин. Звуковое излучение бесконечной пластинки, возбуждаемой нормальной к ней сосредоточенной силой. Акуст. ж., 1964, 10, 4, 431—434.
2. Д. Д. Плахов. Ближнее акустическое поле бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой. Акуст. ж., 1967, 10, 2, 304—306.

Ленинград

Поступила в редакцию
15 сентября 1969 г.