АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

УДК 534.29

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ НА ИЗМЕНЕНИЕ РАЗМЕРОВ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Ю. Н. Калашников

Определяется среднеквадратичная относительная скорость газового пузырька в однородном изотропном турбулентном потоке и коэффициент диффузии газа в пузырек. Оценивается влияние турбулентной диффузии на изменение размеров пузырька.

При исследовании процессов возникновения кавитации из зародышевых ядер, содержащихся в жидкости, и процессов газовой кавитации, связанной с насыщением потока жидкости большим количеством пузырьков, основной задачей является установление зависимостей, характеризующих влияние диффузии растворенного в жидкости газа на изменение размеров пузырька в турбулентном потоке. Задача о росте и растворении газового пузырька в турбулентном потоке представляет интерес также при изучении процессов барботажа и флотации.

Газовый пузырек в турбулентном потоке под действием пульсаций скорости совершает беспорядочные движения, характеризующиеся переносом его крупномасштабными молями вследствие малости размеров и перемещением относительно окружающих его частиц жидкости под действием мгновенных градиентов давления из-за различия плотности газа и жидкости. Кроме того, пульсации давления вызывают случайные радиальные колебания пузырька.

В строгой постановке учет всех этих обстоятельств вызывает при определении диффузионного потока газа в пузырек необходимость решать уравнение нестационарной конвективной диффузии, коэффициенты которого являются случайными функциями пространства и времени. Такая задача чрезвычайно сложна. Для практических целей желательно ввести ряд упрощающих допущений, которые позволили бы получить результат в конечном виде.

Прежде всего представляется возможным не учитывать влияние пульсаций давления. Согласно работе [1], их среднеквадратичная величина для изотропной турбулентности не превышает 0,7 ρv^2 и, следовательно, десятых долей процента скоростного напора при интенсивности турбулентности в несколько процентов. Колебательные изменения радиуса пузырька будут, по крайней мере, еще на половину порядка меньше.

Далее, заменим мгновенную скорость обтекания пузырька жидкими частицами ее среднеквадратичной величиной, определяемой размером пузырька и характеристиками турбулентного потока. Будем считать, что зависимость среднеквадратичной относительной скорости от времени обусловлена только изменением размера пузырька в процессе его эволюции. Аналогичное предположение введем и для коэффициента диффузии. Это принципиальное допущение позволяет воспользоваться решением уравнения конвективной диффузии для пузырька, перемещающегося в жидкости с постоянной скоростью, если явление рассматривать квазистационарно (т. е. решать уравнение диффузии для каждого момента эволюции пузырька).

В работе [2] получено уравнение движения стенки сферического газового пузырька, обтекаемого нетурбулентным потоком жидкости, которое может быть написано в виде

$$\frac{dR}{dt} = \left[k\alpha_{sa}\frac{\alpha_0}{\alpha_{sa}}\left(p_a - p + p_d - \frac{2\sigma}{R}\right)\left(\frac{1}{R} + 0{,}46\sqrt{\frac{u}{kR}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{R}{3}\frac{dp}{dt}\right]\left(p - p_d + \frac{4\sigma}{3R}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Уравнение (1) выведено из уравнения состояния газового пузырька, диффузионный поток в который найден путем решения уравнения установившейся конвективной диффузии при $\mathrm{Re} \gg 1$, когда на поверхности пузырька образуется тонкий диффузионный слой *.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить входящие в формулу (1) величины u и k, характеризующие среднеквадратичную скорость обтекания пузырька жидкими частицами и коэффициент диффузии газа в пузырек в турбулентном потоке.

Для определения среднеквадратичной скорости относительного движения газового пузырька в турбулентном потоке воспользуемся уравнением Чена [1], описывающим перемещение частицы в жидкости, движущейся с переменной скоростью:

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = F + m\frac{dv}{dt} + m_{\text{п}}\left(\frac{dv}{dt} - \frac{dv_1}{dt}\right) + 6R^2\sqrt{\pi\mu\rho}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\frac{dv}{dt'} - \frac{dv_1}{dt'}}{\sqrt{t-t'}}\,dt' + F_e. \tag{2}$$

В этом уравнении левая часть представляет собой инерционную силу, необходимую для ускорения частицы, в правой части первый член — силу вязкостного сопротивления, второй — силу, обусловленную наличием в жидкости градиента давления, возникающего вследствие неравномерного движения самой жидкости, третий — силу, приводящую к ускорению относительно окружающей жидкости присоединенной массы частицы, пятый член — внешнюю потенциальную силу. Четвертый член — так называемая «сила Бассэ» — учитывает влияние отклонения картины течения от установившегося состояния; как показано в работе [3], при быстром ускорении частицы эта сила может стать весьма значительной.

Здесь необходимо отметить, что применительно к турбулентному движению жидкости, скорость которого изменяется во времени и в пространстве, второй член следует представлять как $\frac{m}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$; связь градиента давления $\partial p / \partial x$ со скоростью жидкости выражается при этом уравнением Навье — Стокса. При учете этого обстоятельства, уравнение движения частицы должно превратиться в нелинейное уравнение второго порядка, которое может быть приведено к виду (2), если ввести допущение о малости размера частицы и второй производной $\partial^2 v / \partial x^2$, благодаря чему можно пренебречь нелинейными членами и членом в уравнении Навье — Стокса, связанным с вязкостью. Следовательно, уравнение Чена, вообще говоря, применимо только к частицам, размеры которых малы по сравнению с внутренним масштабом турбулентности **. Для пузырьков умеренных размеров нелинейные члены можно отбросить, если $\partial v / \partial x$ считать малой величиной. Это означает, что турбулентные движения, по крайней мере, в небольших областях, должны быть сильно коррелированы.

---

* Это условие выполняется для пузырьков с радиусом, большим 10^{-5} *м*, всплывающих под действием гидростатического градиента давления.

** Мы не упоминаем здесь допущения о том, что турбулентность является однородной и стационарной, ее область имеет бесконечную протяженность, и другие, которые являются обычными при решении подобных задач.

Будем считать, что это условие выполняется и уравнение (2) применимо также для пузырьков, размер которых больше внутреннего масштаба турбулентности. Очевидно, такое допущение не является сильнее введенных ранее допущений и поэтому может считаться вполне приемлемым при нашем приближенном рассмотрении задачи.

Вводя относительную скорость пузырька в жидкости $u = v_1 - v$, принимая согласно Левичу [4] $F = 12\ \pi\mu R u$ и присоединенную массу $m_п = \dfrac{m}{2}$ (как для твердого шара) и учитывая, что плотность газа много меньше плотности жидкости, в пренебрежении потенциальными силами получим следующее уравнение, дающее связь между относительной скоростью газового пузырька в жидкости и скоростью жидкости:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9\nu}{R^2}u + \frac{1}{2}\frac{du}{dt} + \frac{9\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}R}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{du/dt'}{\sqrt{t-t'}}\,dt'. \tag{2а}$$

Положим исходный момент времени t_0 равным $-\infty$ и введем для краткости обозначение:

$$a = \frac{9\sqrt{\nu}}{2\sqrt{2}R}, \tag{3}$$

после чего уравнение (2а) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{8}{9}a^2u + \frac{1}{2}\frac{du}{dt} + a\sqrt{2/\pi}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{du/dt'}{\sqrt{t-t'}}\,dt'. \tag{2б}$$

Представим скорость жидкости и относительную скорость пузырька интегралами Фурье:

$$v = \int\limits_0^\infty(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)\,d\omega, \qquad u = \int\limits_0^\infty(\gamma\cos\omega t + \delta\sin\omega t)\,d\omega. \tag{4}$$

После подстановки выражений (4) в уравнение (2б) и изменения порядка интегрирования появятся интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin\omega t'dt'}{\sqrt{t-t'}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos\omega t'dt'}{\sqrt{t-t'}},$$

которые берутся посредством подстановки $t_1 = t - t'$, с учетом значений определенных интегралов

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin\omega t_1}{\sqrt{t_1}}\,dt' = \int\limits_0^\infty\frac{\cos\omega t_1}{\sqrt{t_1}}\,dt_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.$$

Выполняя несложные преобразования и приравнивая коэффициенты при sin и cos в левой и правой частях уравнения, получим систему двух уравнений:

$$\beta\omega = \frac{8}{9}a^2\gamma + \frac{1}{2}\delta\omega + a\sqrt{\omega}(\gamma+\delta), \quad -\alpha\omega = \frac{8}{9}a^2\delta - \frac{1}{2}\gamma\omega + a\sqrt{\omega}(\delta-\gamma).$$

Решая ее относительно γ и δ и обозначая

$$f_1 = \frac{a\omega\left(\frac{8}{9}a + \sqrt{\omega}\right)}{a^2\left(\frac{8}{9}a+\sqrt{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2}+a\sqrt{\omega}\right)^2},$$

$$f_2 = \frac{\omega\left(\frac{\omega}{2} + a\sqrt{\omega}\right)}{a^2\left(\frac{8}{9}a+\sqrt{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2}+a\sqrt{\omega}\right)^2}, \tag{5}$$

имеем

$$\gamma = f_1\beta - f_2\alpha, \quad \delta = f_1\alpha + f_2\beta. \tag{6}$$

Будем считать, что турбулентный поток характеризуется полем пульсационных скоростей со стандартным отклонением $\sqrt{\overline{v^2}}$ и коэффициентом корреляции в лагранжевом представлении R_L. Можно показать [1], что

$$\overline{v^2} = \pi^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2}{T}\, dn = \int_0^\infty F_L(n)\, dn. \tag{7}$$

Аналогично

$$\overline{u^2} = \pi^2 \int_0^\infty \frac{\gamma^2 + \delta^2}{T}\, dn = \int_0^\infty E_L(n)\, dn. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что согласно (6)

$$\gamma^2 + \delta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(f_1^2 + f_2^2) = \chi(\alpha^2 + \beta^2), \tag{9}$$

получим

$$E_L(n) = \chi F_L(n). \tag{10}$$

Интересно отметить, что при $n \to 0$ $\chi \to 0$, а при $n \to \infty$ $\chi \to 4$; следовательно, спектральная функция $E_L(n)$ имеет максимум на некоторой частоте, определяемой характером функции $F_L(n)$. Подставляя выражения (9) и (10) в формулу (8) и учитывая, что спектральная функция может быть выражена через коэффициент корреляции с помощью преобразования Фурье

$$F_L(n) = 4\overline{v^2} \int_0^\infty R_L(t) \cos 2\pi nt\, dt, \tag{11}$$

получаем окончательную формулу для среднеквадратичной скорости обтекания газового пузырька жидкими частицами в турбулентном потоке:

$$\overline{u^2} = 4\overline{v^2} \int_0^\infty \int_0^\infty R_L(t)\,[f_1^2(R, n) + f_2^2(R, n)] \cos 2\pi nt\, dn dt. \tag{12}$$

Предельная величина коэффициента турбулентной диффузии, или коэффициент вихревой диффузии, как известно [1], выражается следующим образом:

$$D = \overline{v^2} \int_0^\infty R_L(t)\, dt = \overline{v^2} L_h. \tag{13}$$

Если принять во внимание соотношение (7), то этой формуле можно придать вид:

$$D = L_h \int_0^\infty F_L(n)\, dn. \tag{13a}$$

В этих выражениях коэффициент турбулентной диффузии определяется вихревыми движениями всех масштабов и характеризует перенос субстанции относительно некоторого начала, движущегося со средней скоростью, или неподвижного при отсутствии средней скорости. Применительно к газовому пузырьку использование выражений (13) было бы справедливым, если бы пузырек был неподвижен в жидкости или перемещался потоком со средней скоростью. В первом приближении это можно считать допустимым для крупных пузырьков, радиусы которых соизмеримы с интегральным масштабом турбулентного потока.

Пузырьки, размеры которых существенно меньше интегрального масштаба, совершают случайные перемещения, интенсивность которых характеризуется выражением (12). Чем меньше пузырек, тем более мелкомасштабными молями он увлекается. Это приводит к тому, что крупномасштабные вихревые движения не могут влиять на распределение концентрации растворенного газа вокруг пузырька, и их вклад в величину коэффициента турбулентной диффузии (13) необходимо исключить. Очевидно, что для пузырьков, размер которых мал по сравнению с внутренним масштабом турбулентности, турбулентная диффузия вообще не будет играть роли, и поток газа в пузырек будет определяться только молекулярной диффузией.

На основании изложенного, коэффициент турбулентной диффузии газа в пузырек умеренных размеров можно представить выражением:

$$D^* = L_h \int\limits_{n^*}^{\infty} F_L(n)\, dn, \tag{14}$$

в котором n^* — некоторое волновое число, разграничивающее вихревые движения, вносящие и не вносящие вклада в турбулентную диффузию газа в пузырек. Критерий для его определения может быть установлен на основании следующих соображений.

Если ввести лагранжев масштаб относительных перемещений газового пузырька L_h', то испытываемое им в среднем перемещение в жидкости в некотором направлении будет равно $\sqrt{\overline{u^2}}\, L_h'$. Тогда можно ожидать, что за время L_h' газовый пузырек не покинет пределы моля, размеры которого не меньше $2\sqrt{\overline{u^2}}\, L_h'$. Оценка величины L_h' с использованием приведенных выше зависимостей показывает, что она может быть приближенно принята равной L_h. Следовательно, наименьший размер молей, которые переносят пузырек, не внося вклад в диффузию газа в него, должен иметь порядок $2\sqrt{\overline{u^2}}\, L_h$.

С другой стороны, период турбулентных пульсаций связан с их масштабом соотношением [4]:

$$T_\lambda = \left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right)^{1/3}.$$

Принимая во внимание, что $T_\lambda = 1/n$, получим

$$n^* = \left(\frac{\varepsilon}{4\overline{u^2} L_h^{\,2}}\right)^{1/3}. \tag{15}$$

Заменяя в выражении (14) спектральную функцию коэффициентом корреляции, согласно формуле (11), получаем окончательную формулу для коэффициента турбулентной диффузии:

$$D^* = 4\overline{v^2} L_h \int\limits_{n^*}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} R_L(t)\cos 2\pi n t\, dt\, dn. \tag{16}$$

Найденные выражения для коэффициента турбулентной диффузии и относительной скорости пузырька в жидкости позволяют при заданном газосодержании жидкости и законе изменения давления численным интегрированием уравнения (1) определить изменение размеров газового пузырька, если положить

$$k = D_м + D^*, \quad u = \sqrt{\overline{u^2}}.$$

Рассмотрим частный случай, когда коэффициент корреляции можно представить функцией

$$R_L\left(\frac{t}{L_h}\right) = \exp\left(-\frac{t}{L_h}\right). \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в формулу (12), интегрируя по t и учитывая формулы (5) и (3), после сложных алгебраических преобразований под знаком интеграла и окончательного интегрирования мы получим следующее выражение для относительной скорости пузырька в турбулентном потоке:

$$\overline{u^2} = \frac{4\overline{v^2}}{L_h}\Big\{3A_3 - A_1 + \sqrt{2L_h}\,(A_2 + 3A_4) - (A_5 + A_7) + \\ + \frac{R\sqrt{2}}{6\sqrt{\nu}}(2A_6 + A_8) - \frac{4}{\pi}\ln\left[\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{R}\right)^{A_5+A_7}\frac{2^{A_7}}{\sqrt{L_h^{A_1+A_3}}}\right]\Big\}, \tag{18}$$

где коэффициенты $A_1, \ldots A_8$ определяются формулами:

$$A_1 = -\frac{9L_h\sqrt{\nu L_h}}{32R\Delta}\left(\frac{18\nu L_h}{R^2} + \frac{9\sqrt{\nu L_h}}{R} + 1\right); \quad A_2 = \frac{\sqrt{L_h}}{8\sqrt{2}\Delta}\left[\left(\frac{9\nu L_h}{R^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{9\sqrt{\nu L_h}}{R} + 1\right)^2\right];$$

$$A_3 = \frac{9L_h\sqrt{\nu L_h}}{32R\Delta}\left(\frac{18\nu L_h}{R^2} - \frac{9\sqrt{\nu L_h}}{R} + 1\right); \quad A_4 = \frac{\sqrt{L_h}}{8\sqrt{2}\Delta}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{9\sqrt{\nu L_h}}{R} - 1\right)^2 - \left(\frac{9\nu L_h}{R}\right)^2\right];$$

$$A_5 = \frac{27\nu L_h^2}{5R^2\Delta}\left(\frac{81\nu^2 L_h^2}{R^4} + \frac{55}{16}\right); \quad A_6 = \frac{27\sqrt{2}L_h^2\nu\sqrt{\nu}}{5R^3\Delta}\left(\frac{81\nu^2 L_h^2}{R^4} + \frac{125}{16}\right);$$

$$A_7 = -\frac{27\nu L_h^2}{5R^2\Delta}\left(\frac{81\nu^2 L_h^2}{R^4} + \frac{5}{2}\right); \quad A_8 = -\frac{54\sqrt{2}L_h^2\nu\sqrt{\nu}}{5R^3\Delta}\left(\frac{162\nu^2 L_h^2}{R^4} + \frac{55}{4}\right);$$

$$\Delta = \left(\frac{9\nu L_h}{R^2}\right)^4 - \frac{17}{16}\left(\frac{9\nu L_h}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{16}.$$

Выражение для коэффициента диффузии после подстановки выражения (17) в формулу (16) и вычисления двойного интеграла примет вид

$$D^* = \overline{v^2}L_h\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} 2\pi L_h n^*\right). \tag{19}$$

Для иллюстрации сопоставим интенсивность роста пузырька за счет диффузии газа в турбулентном и нетурбулентном потоке. В качестве исходных параметров состояния жидкости примем такие, как в экспериментальной части работы [2], и кроме того положим $\sqrt{\overline{v^2}} = 0{,}1$ *м/сек*, $L_h = 0{,}1$ *сек*, $\varepsilon = 0{,}15$ *м²/сек³*. Численное интегрирование уравнения (1) с использованием выражений (15), (18) и (19) показывает, что если неподвижный пузырек радиусом $R = 3\cdot 10^{-5}$ *м* увеличивает радиус вдвое за 380 *сек*, а пузырек, движущийся в покоящейся жидкости со скоростью 5,4 *мм/сек*,— за 35 *сек* [2], то в турбулентном потоке для этого требуется время, всего лишь немного большее 0,001 *сек*.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. О. Хинце. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
2. Ю. Н. Калашников. Влияние относительной скорости газового пузырька в жидкости на изменение его размеров. Пр. мат. и теор. физ., 1964, 3, 105—112.
3. R. R. Hughes, E. R. Gilliland. The mechanics of drop. Chem. eng. Progr., 1952, 48, 10, 497—504.
4. В. Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.

Ленинград

Поступила в редакцию
23 августа 1969 г.