

УДК 534.25

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ ЛЮНЕБЕРГА

И. Н. Каневский, В. С. Суриков

Рассмотрен один из вариантов акустической линзы Люнеберга, сферической или цилиндрической формы, состоящей из двух слоев с постоянными показателями преломления. Исследована фазовая aberrация в раскрыве линзы, и с помощью критерия среднеквадратичной фазовой aberrации найдены оптимальные значения показателя преломления и радиуса внутреннего слоя в зависимости от показателя преломления внешнего слоя. Проведена оценка максимально достижимого отношения диаметра сферической и цилиндрической линзы к длине волны в среде.

Для формирования узкой диаграммы направленности акустических приемников и излучателей в большом секторе углов обзора в последнее время начали применяться линзы Люнеберга [1, 2], представляющие сплошную сферу (или сплошной цилиндр), изготовленную из материала, у которого показатель преломления изменяется по закону

$$n(\rho) = \sqrt{2 - (\rho/R)^2}, \quad (1)$$

где R — радиус линзы, ρ — текущая координата, отсчитываемая от центра сферы или геометрической оси цилиндра. Эти линзы обладают тем свойством, что плоская звуковая волна, приходящая к линзе с любого направления*, фокусируется на противоположной поверхности линзы, а точечный источник, расположенный на поверхности линзы, позволяет получить плоскую волну в ее раскрыве.

Основной недостаток линз Люнеберга состоит в невозможности обеспечить на практике непрерывное изменение показателя преломления по закону (1). Аппроксимация формулы (1) ступенчатой функцией, описывающей многослойную линзу, также сопряжена с трудностями. Анализ экспериментального материала [3, 4] показывает, что число слоев N , аппроксимирующее функцию (1) с погрешностью не более 20%, должно удовлетворять условию $N \geq 0,6 R/\lambda$, где λ — длина звуковой волны в среде. Например, для создания линзы с направленностью порядка одного градуса, когда $R/\lambda \geq 30$, необходимо не менее 18 слоев. Изготовить такие линзы невозможно из-за отсутствия необходимых материалов и конструктивных трудностей. Поэтому в настоящее время большое внимание уделяется конструированию линз Люнеберга с минимальным количеством слоев при минимальной фазовой aberrации.

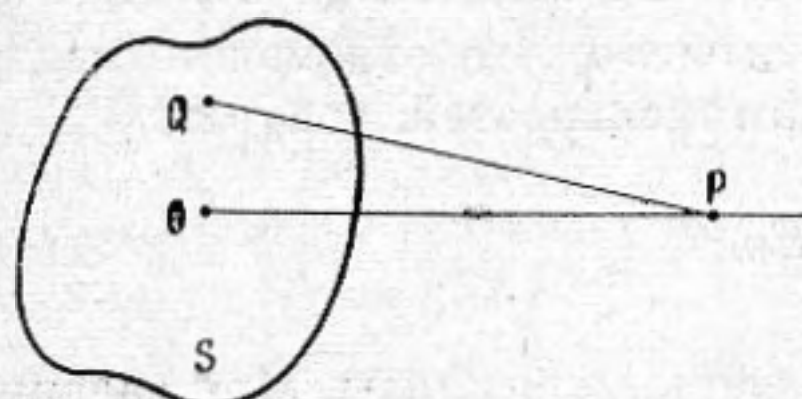
В работах [5, 6] рассмотрены модифицированные линзы, у которых внешний слой имеет постоянный показатель преломления n_1 , а внутренний — переменный $n_2 = n_2(\rho)$. В работе [6] указывается, что у таких линз при $n_1 = 3 \div 4$ показатель преломления n_2 практически постоянен, и получается двухслойная линза с малой продольной сферической aberrацией, не превышающей $1,5 \cdot 10^{-3} R$. Однако в настоящее время такие акустические линзы создать невозможно в связи с отсутствием материалов с высо-

* Для цилиндрической линзы предполагается, что волновой фронт и ось цилиндра параллельны.

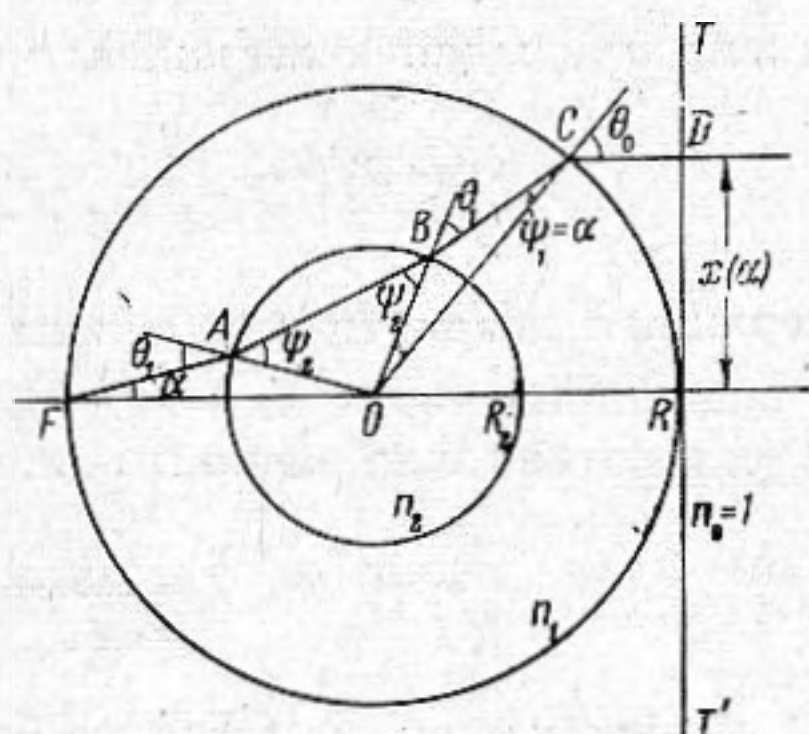
кими показателями преломления порядка $3 \div 4$. Из известных материалов наибольшим значением показателя преломления относительно воды обладает фторорганическая жидкость C_7F_{16} с $n = 2,82$ [7].

В связи с простотой конструкции двухслойной линзы по сравнению с многослойной, в настоящей работе исследуется возможность создания двухслойной линзы, у которой материал внешней оболочки имеет значения $n_1 = 2,2 \div 2,8$.

Критерием пригодности линзы является критерий среднеквадра-



Фиг. 1



Фиг. 2

точной фазовой аберрации, устанавливающий связь среднего квадрата фазовой аберрации в раскрыве линзы со снижением интенсивности звукового поля в фокусе по сравнению с интенсивностью в фокусе идеальной (безабберационной линзы). Фазовая аберрация представляет собой разность фаз между колебаниями на плоской поверхности раскрыва и на формируемом линзой волновом фронте, когда на ее поверхности расположен точечный источник, излучающий сферическую волну (для сферической линзы), или линейный источник, излучающий цилиндрическую волну (для цилиндрической линзы).

Влияние аберраций в акустической линзе можно рассмотреть так же, как это делается при оценке влияния аберраций на качество оптического изображения [8]. Пусть S (фиг. 1) — плоская синфазная излучающая поверхность с равномерным распределением амплитуды; тогда квадрат модуля потенциала поля в удаленной точке P , находящейся на направлении максимального излучения, с точностью до постоянного множителя будет

$$|\Phi_0(P)|^2 = \Phi_0(P) \Phi_0^*(P) = \iint_S \frac{e^{ikR_{PQ}}}{R_{PQ}} dS \iint_S \frac{e^{-ikR_{PQ}}}{R_{PQ}} dS,$$

где R_{PQ} — расстояние от точки наблюдения P до некоторой точки Q на поверхности S . При $R_{PQ} \rightarrow \infty$ можно считать $R_{PQ} = R$ независимым от координат точки Q . Тогда

$$|\Phi_0(P)|^2 \rightarrow \frac{S^2}{R^2}$$

Допустим, что поверхность S возбуждена несинфазно, и имеет место фазовая аберрация $\varphi(Q)$; тогда выражение для потенциала поля принимает вид

$$\Phi(P) = \frac{e^{ikR}}{R} \iint_S e^{i\varphi(Q)} dS.$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд и ограничиваясь при малых фазовых аберрациях $|\varphi| < 2$ квадратичными членами, получим

$$|\Phi(P)|^2 = \frac{1}{R^2} \iint_S \left(1 + i\varphi - \frac{1}{2} \varphi^2\right) dS \iint_S \left(1 - i\varphi - \frac{1}{2} \varphi^2\right) dS.$$

Учитывая, что средние значения фазовой aberrации и ее квадрата выражаются следующим образом:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{S} \iint_S \varphi(Q) dS, \quad \overline{\varphi^2} = \frac{1}{S} \iint_S \varphi^2(Q) dS,$$

представим предыдущее выражение в виде

$$|\Phi(P)|^2 = \frac{S^2}{R^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \overline{\varphi^2} \right)^2 + \overline{\varphi^2} \right].$$

Удерживая квадратичные члены и обозначая среднеквадратичную фазовую aberrацию через $E_0 = \overline{\varphi^2} - \bar{\varphi}^2$ и учитывая, что отношение квадратов модуля потенциала равно отношению интенсивностей, получим

$$\frac{I}{I_{\max}} = 1 - E_0,$$

где I_{\max} — интенсивность в фокусе безабберационной линзы. При заданном отношении интенсивностей найдем допустимое значение среднеквадратичной фазовой aberrации

$$E_0 \leq (1 - I/I_{\max}). \quad (2)$$

Вычислим величину фазовой aberrации φ в сферической и цилиндрической двухслойной линзе, поперечное сечение которой показано на фиг. 2. На этой фигуре F — фокус линзы, TT' — плоскость раскрыва, относительно которой отсчитывается фазовая aberrация, $FABCD$ — луч, выходящий из фокуса под углом α к оси линзы, претерпевающий трехкратное преломление и пересекающий плоскость раскрыва в точке D на расстоянии $x(\alpha)$ от оси. Набег фазы этого луча от фокуса до плоскости раскрыва равен $\varphi_1 = 2k_0 n_1 (FA + BC) + k_0 n_2 AB + k_0 CD$, а луча, распространяющегося вдоль акустической оси линзы — $\varphi_0 = 2k_0 n_1 (R - R_2) + 2k_0 n_2 R_2$, отсюда фазовая aberrация $\varphi(\alpha) = \varphi_1 - \varphi_0$. В дальнейшем будем рассматривать фазовую aberrацию, отнесенную к величине $k_0 R$: $\delta(\alpha) = \varphi(\alpha) / k_0 R$, и относительный радиус внутреннего слоя $r = R_2 / R$.

Используя геометрические соотношения в двухслойной линзе и закон преломления, можно вычислить входящие в выражение для фазовой aberrации отрезки

$$FA = BC = R \cos \alpha - \sqrt{R_2^2 - R^2 \sin^2 \alpha}, \quad AB = 2 \sqrt{R_2^2 n_2^2 - R^2 n_1^2 \sin^2 \alpha}, \\ CD = \frac{1 - \cos(2\psi_2 - 2\theta_1 + 2\alpha)}{\cos(2\psi_2 - 2\theta_1 + 2\alpha - \theta_0)}.$$

Опуская промежуточные выкладки, мы приведем окончательное выражение для относительной фазовой aberrации:

$$\delta(\alpha) = 2n_1 (\cos \alpha - \sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha}) + 2\sqrt{r^2 n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} - 2n_1(1-r) - 2n_2 r + \\ + \frac{1 - \cos \left[2 \arcsin \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2 r} \right) - 2 \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{r} \right) + 2\alpha \right]}{\cos \left[2 \arcsin \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2 r} \right) - 2 \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{r} \right) + 2\alpha - \arcsin(n_1 \sin \alpha) \right]} \quad (3)$$

и высоты выходящего луча над осью линзы

$$x(\alpha) = \sin 2 \left[\arcsin \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2 r} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{r} \right) + \alpha \right]. \quad (4)$$

Задача заключается в том, чтобы при заданном n_1 найти такие значения n_2 и r , которые обеспечивали бы минимум величины

$$E_0 = (k_0 R)^2 (\delta^2 - \bar{\delta}^2) = (k_0 R)^2 e_0. \quad (5)$$

Для этого достаточно решить систему уравнений:

$$\frac{\partial e_0}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial e_0}{\partial r} = 0.$$

Однако в систему входят громоздкие и трудно вычисляемые интегральные выражения. Поэтому целесообразно использовать другой путь нахождения оптимальных значений n_2 и r . Потребуем, чтобы в точке раскрыва с ординатой x_0 , выходящий из линзы луч был параллелен ее оси. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство $\angle FOC = \pi - \theta_0 = 2(\theta_1 - \psi_1) + \pi - 2\psi_2$, т. е. $\psi_2 - \theta_1 = \frac{\theta_0}{2} - \psi_1$. Используя соотношения

$$\sin \theta_0 = x_0, \quad \sin \psi_1 = \frac{x_0}{n_1}, \quad \sin \theta_1 = \frac{\sin \psi_1}{r} = \frac{x_0}{n_1 r}, \quad \sin \psi_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2} = \frac{x_0}{n_2 r},$$

получим первое условие того, что выходящий из линзы луч параллелен акустической оси

$$\arcsin \frac{x_0}{n_2 r} - \arcsin \frac{x_0}{n_1 r} = \frac{1}{2} \arcsin x_0 - \arcsin \frac{x_0}{n_1} = \gamma. \quad (6)$$

Поскольку у нас есть два независимых переменных — n_2 и r , необходимо найти второе условие параллельности выходящего луча акустической оси. Оно легко получается, если устремить величину x_0 в формуле (6) к нулю. Тогда условие параллельности параксиального пучка лучей имеет вид

$$\frac{1}{n_2 r} - \frac{1}{n_1 r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}. \quad (7)$$

Решая систему уравнений (6) и (7), получим

$$r = \frac{2 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)}{n_1 - 2}, \quad (8)$$

$$n_2 = \frac{n_1}{p - \sqrt{p^2 - 1}}, \quad (9)$$

где

$$p = \frac{1 - \frac{x_0^2}{4 \sin^2 \gamma} \left(\frac{n_1 - 2}{n_1} \right)^2 \cos \gamma}{1 - \frac{x_0^2}{4 \sin^2 \gamma} \left(\frac{n_1 - 2}{n_1} \right)^2}.$$

Вычисляя значения n_2 и r по формулам (8) и (9) в интервале $0 < x_0 < 1$, найдем из выражения (3) соответствующие им относительные фазовые aberrации и их среднеквадратичные значения, которые определяются следующими формулами:

для цилиндрической линзы

$$e_{oc} = \frac{1}{x_m} \int_0^{x_m} \delta^2(x) dx - \left[\frac{1}{x_m} \int_0^{x_m} \delta(x) dx \right]^2, \quad (10)$$

для сферической линзы

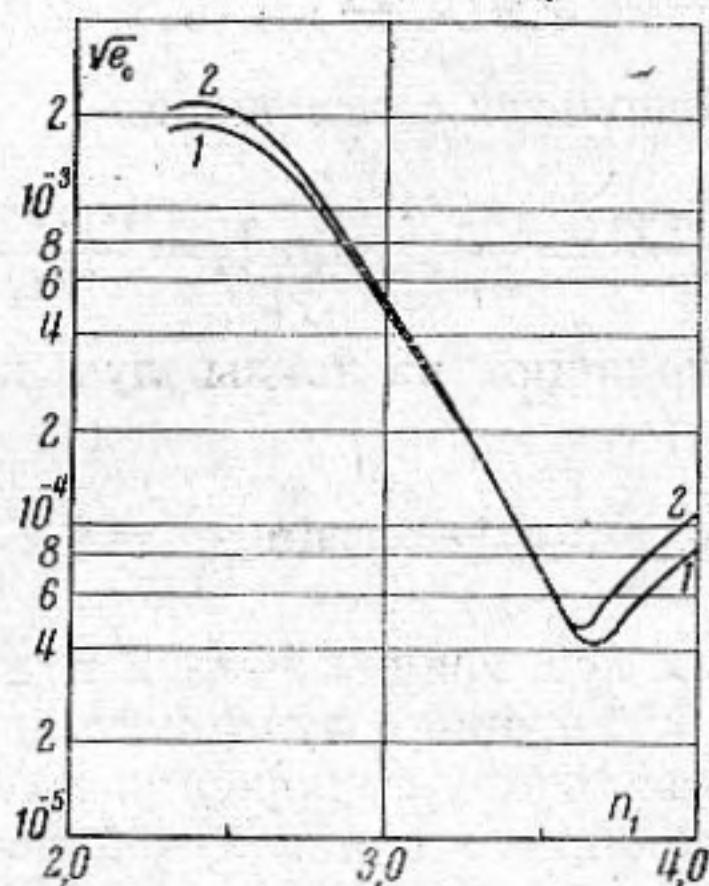
$$e_{oc} = \frac{2}{x_m^2} \int_0^{x_m} \delta^2(x) x dx - \left[\frac{2}{x_m^2} \int_0^{x_m} \delta(x) x dx \right]^2. \quad (11)$$

Величины e_{oc} и e_{oc} были рассчитаны для случая, когда показатель преломления внешнего слоя имеет значения $n_1 = 2,2 \div 4,0$. Интегралы в формулах (10) и (11) определялись численным интегрированием. По результа-

там расчета были найдены значения x_0 , n_2 и r , соответствующие минимуму относительных среднеквадратичных фазовых aberrаций $e_{оц}$ и $e_{ос}$.

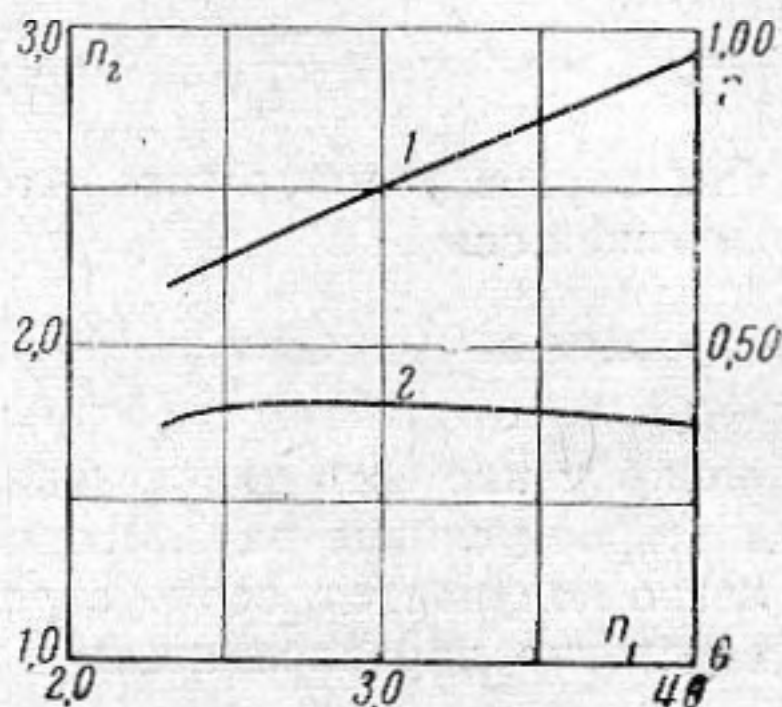
На фиг. 3 представлены зависимости $\sqrt{e_{оц}}$ (кривая 1) и $\sqrt{e_{ос}}$ (кривая 2) от n_1 . Мы видим, что область минимальных значений этих величин соответствует $n_1 = 3,4 \div 4,0$, что совпадает с результатами работы [6].

На фиг. 4 показаны оптимальные значения показателя преломления n_2 (кривая 1) и относительного радиуса r (кривая 2) внутреннего слоя в зависимости от показателя преломления n_1 внешнего слоя. Числовые значения n_2 и r , соответствующие $n_1 = 3,4$ и $3,6$, совпадают с приве-



Фиг. 3

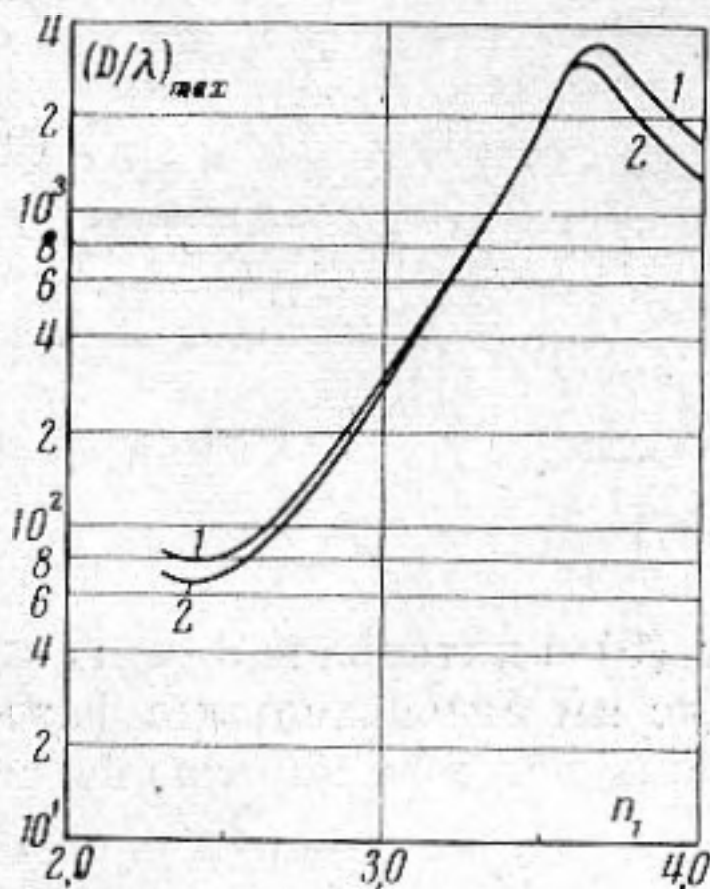
денными в работе [6] с точностью до третьего знака после запятой.



Фиг. 4

денными в работе [6] с точностью до третьего знака после запятой.

В заключение проведем оценку максимально достижимого отношения диаметра двухслойной линзы к длине волны в среде. Из формул (2) и (5) следует, что



Фиг. 5

$$\left(\frac{D}{\lambda}\right)_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1 - I/I_{\max}}{e_0}} \quad (12)$$

На фиг. 5 показаны рассчитанные с помощью формул (10), (11) и (12) зависимости $(D/\lambda)_{\max}$ для цилиндрической (кривая 1) и сферической (кривая 2) линзы от n_1 , когда $I/I_{\max} = 0,8$.

Проведенные расчеты показывают, что двухслойная линза в случае использования существующих материалов с показателями преломления $n_1 \leq 2,8$ обладает малой фазовой aberrацией — меньшей 26° — при достаточно большом отношении диаметра к длине волны в среде. Так, например, цилиндрическая линза с $n_1 = 2,82$ и оптимальными значениями $n_2 = 2,42$ и $r = 0,42$ может иметь отношение $D/\lambda = 160$, что позволяет сформировать диа-

грамму направленности шириной порядка 23 угловых минут. Узкая диаграмма направленности в сочетании с простой конструкцией (по сравнению с многослойными линзами Люнеберга) говорят о возможности применения двухслойных линз в системах с большим углом обзора.

В заключение авторы считают своим долгом отметить, что разработка изложенного круга вопросов была предпринята по предложению покойного Л. Д. Розенберга, который уделял много внимания проблеме фокусирования акустических волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. J. Toulis. Acoustic focusing with spherical structures. J. Acoust. Soc. America, 1963, 35, 3, 286—292.
2. F. Mechel, P. Wille. Experimentelle Untersuchungen aspektunabhängiger Sonarreflectoren nach dem Prinzip inhomogener Linzen. Acustica, 1965—1966, 16, 305—311.
3. G. P. M. Peeler, H. P. Coleman. Microwave stepped-index Luneberg lenses. IRE Trans. anten. prop., 1958, AP-6, 2, 202—207.
4. R. E. Webster. Radiation patterns of a spherical Luneberg lens with simple feeds. IRE Trans. anten. prop., 1958, AP-6, 3, 301—302.
5. S. P. Morgan. General solution of the Luneberg lens problem. J. Appl. Phys., 1958, 29, 9, 1358—1368.
6. G. T. di Francia. Spherical lenses for infrared and microwaves. J. Appl. Phys., 1961, 32, 10, 2051.
7. C. A. Boyles. Theory of focusing plane waves by spherical liquid lenses. J. Acoust. Soc. America, 1965, 38, 3, 393—405.
8. А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. М., «Мир», 1964, 155—156.

Государственный н.-и. и проектный институт
редкометаллической промышленности
Москва

Поступила в редакцию
9 июля 1969 г.