

УДК 534.23

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

В. И. Кузнецов

Система уравнений динамики жидкости сводится во втором приближении к нелинейному уравнению для скалярного потенциала. Рассматривается связь этого уравнения с известными уравнениями нелинейной акустики. Получены приближенные решения для случая слабой нелинейности.

Система уравнений динамики вязкой теплопроводящей жидкости в общем случае нелинейна. Общих методов точных решений нелинейных уравнений не существует; поэтому единственно возможными в такой ситуации остаются приближенные методы, базирующиеся на том или ином упрощении задачи. Среди всех возможных упрощений, пожалуй, главное состоит в линеаризации уравнений.

В акустике предполагается, что звуковые возмущения гидродинамических величин обычно малы по сравнению с соответствующими величинами в невозмущенном состоянии. Для малых же возмущений уравнения называются линейными.

Следующей по сложности задачей может считаться решение уравнений, в которых сохранены члены лишь второго порядка малости. Подобные задачи уже относятся к проблемам нелинейной акустики. Обычно большинство задач нелинейной акустики рассматриваются именно во втором приближении по порядку величины возмущений, что естественно связано с чрезвычайными трудностями, возникающими при решении нелинейных задач.

Однако и в такой упрощенной постановке задач нелинейной акустики нет единого подхода. Характерно, что почти всякая работа в этой области начинается с вывода «своего» приближенного уравнения движения. В отличие от линейной теории, использующей волновое уравнение, в теории нелинейной акустики возникают дополнительные трудности, связанные с отсутствием нелинейного волнового уравнения.

Ниже будет показано, что система уравнений динамики вязкой теплопроводящей жидкости в предположении о потенциальном характере движения сводится во втором приближении к одному нелинейному волновому уравнению только для скалярного потенциала $u = -\nabla\varphi$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left[b\Delta\varphi + (\nabla\varphi)^2 + a \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

При выводе уравнения (1) сохраняются лишь члены второго порядка малости по величине возмущений и величине кинетических коэффициентов вязкости и теплопроводности. Далее рассматривается связь уравнения (1) с известными приближенными уравнениями нелинейной акустики.

Движение жидкости мы будем определять в неподвижной относительно невозмущенной среды системе координат x, y, z и t , полем скорости $u(x, y, z, t)$ и полями термодинамических характеристик среды: полем

давления $p(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$, температуры $T(x, y, z, t)$ и энтропии $s(x, y, z, t)$.

Система уравнений динамики сплошной среды состоит из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

уравнения движения

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + (\eta/3 + \zeta) \nabla \nabla \mathbf{u}, \quad (3)$$

где η и ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно, уравнения притока тепла

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla s \right) = \frac{\eta}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right]^2 + \zeta (\nabla \mathbf{u})^2 + \kappa \nabla \nabla T, \quad (4)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, и уравнения состояния среды, которое для идеального газа в переменных ρ, T имеет вид

$$p = \rho R T, \quad (5)$$

а в переменных ρ, s

$$p = \rho^\gamma R \exp[(s - s_0) / C_v], \quad (6)$$

где $\gamma = C_p / C_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, $R = C_p - C_v$ — газовая постоянная для единицы массы вещества.

Будем предполагать, что возмущения, характеризуемые полями пульсаций гидродинамических величин, малы, т. е. $(\rho - \rho_0) / \rho_0 \sim \mu$, $(p - p_0) / p_0 \sim \mu$, $u / c_0 \sim \mu$, где $\mu < 1$. Индексом 0 обозначаются невозмущенные величины.

Используя метод линеаризации уравнений (2) — (5) можно показать [1], что всевозможные движения среды распадаются в первом приближении на три не взаимодействующих между собой компоненты. Этими компонентами являются вихревая несжимаемая компонента, описываемая полем вихря $\boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t) = \nabla \times \mathbf{u}(x, y, z, t)$, энтропийная компонента $s(x, y, z, t)$ и потенциальная (или акустическая) компонента, связанная с пульсациями потенциальной части поля скорости $D(x, y, z, t) = \nabla \mathbf{u}(x, y, z, t)$ и пульсациями давления $p(x, y, z, t)$.

Из всей совокупности возможных движений, описываемых системой уравнений (2) — (5), мы будем рассматривать лишь потенциальные (акустические) движения, т. е. удовлетворяющие условию $\nabla \times \mathbf{u}(x, y, z, t) = 0$. Тем самым вихревая компонента и ее взаимодействия с другими компонентами опускаются. При этом условии уравнение (3) может быть написано в виде

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 \right) = -\nabla p + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \mathbf{u}. \quad (7)$$

Дальнейшее упрощение уравнений может быть достигнуто, если ввести еще одну малую величину δ , связанную с коэффициентами вязкости и теплопроводности. Действительно, если предположить, что все поля являются периодическими функциями пространственных координат с заданным волновым вектором \mathbf{k} , то в линеаризованных уравнениях будут фигурировать следующие безразмерные величины:

$$\delta = \frac{k}{c_0 \rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \equiv \frac{k}{c_0 \rho_0} b_1; \quad \pi = \frac{c_p}{\kappa} b_1.$$

Величина π является аналогом обычного числа Прандтля и имеет поряд-

док величины для воздуха ~ 1 . Величина δ имеет тот же порядок, что и отношение длины свободного пробега в газе l к длине возмущения $\lambda = 2\pi/k$ (поскольку $b_1 \sim c_0 \rho_0 l$). Поэтому во всех случаях, когда движения среды могут быть описаны с помощью обычных гидродинамических уравнений $\delta \ll 1$; в частности, для воздуха при нормальных условиях $b_1 / \rho_0 c_0 \sim l \sim 0,5 \cdot 10^{-5}$ см.

Таким образом, при выводе уравнения (1) мы будем учитывать, помимо членов первого порядка μ , все величины, имеющие второй порядок малости μ^2 и $\mu\delta$, и пренебрегать членами более высокого порядка малости.

В уравнении притока тепла (4) опустим член $\mathbf{u} \nabla s$, учитывающий рассеяние звука на температурных неоднородностях, и члены с коэффициентами вязкости, имеющие третий порядок малости $\delta \mu^2$. Если исключить температуру с помощью (5), уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\kappa}{p} \Delta (p/\rho). \quad (8)$$

Для малых изменений состояния можно ограничиться следующими членами разложения (6):

$$p - p_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0} c_0^2 (\rho - \rho_0)^2 + c_0^2 \frac{\rho_0}{\gamma C_v} (s - s_0) + \dots, \quad (9)$$

где $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ — адиабатическая скорость звука. Изменение энтропии s , как следует из формулы (8), имеет второй порядок малости $\delta \mu$.

Теперь исключим из уравнений (7) и (8) давление $p(x, y, z, t)$, сохраняя в них лишь члены второго порядка μ^2 и $\delta \mu$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla u^2 - \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \left[(\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 2}{2\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \frac{\rho_0}{\gamma C_v} (s - s_0) \right] + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \mathbf{u}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\kappa (\gamma - 1)}{\rho_0^2} \Delta \rho. \quad (11)$$

Дифференцируя уравнение (10) по времени и подставляя в него выражение (11), получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \nabla \frac{\partial}{\partial t} u^2 - \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma - 2}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \rho_0)^2 + \frac{\kappa}{\rho_0} \times \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \Delta \rho \right] + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{u}. \quad (12)$$

Вводя скалярный потенциал $\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\nabla \varphi(x, y, z, t)$, уравнение (12) можно привести к виду:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0^2 \frac{\gamma - 2}{2\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \rho_0)^2 + \frac{c_0^2 \kappa}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \Delta \rho + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi. \quad (13)$$

В результате, используя уравнение неразрывности (2) и уравнение (3), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left[b \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2 + a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

где

$$a \equiv \frac{\gamma - 1}{2c_0^2}, \quad b \equiv \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \right].$$

Теперь рассмотрим каким образом из уравнения (1) получаются известные уравнения нелинейной акустики.

В случае одномерных плоских полей уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Пренебрежение правой частью в этом уравнении (членами второго порядка) приводит к волновому уравнению, допускающему решения в виде плоских бегущих волн:

$$\varphi_0(x, t) = e^{-i\omega(t-x/c_0)}. \quad (15)$$

Нелинейность среды и диссипативные процессы вызывают изменения формы волны вдоль направления распространения. Поэтому в слабонелинейных и слабопоглощающих средах естественно искать решение в виде $\varphi(t - x/c_0 \equiv \tau, \quad vx \equiv x')$, где $v < 1$. Выполняя замену переменных в уравнении (14) и сохраняя при этом лишь члены второго порядка, получим

$$2c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{b}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2. \quad (16)$$

Возвращаясь к скорости $u(x, t) = -\partial \varphi / \partial x$, получим известное уравнение, описывающее распространение плоских волн конечной амплитуды в диссипативных средах [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = b' \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (17)$$

где $\alpha \equiv \frac{\gamma + 1}{2c_0^2}$, $b' \equiv b/2c_0^3$.

Аналогичные преобразования в случае сферически-симметричных полей приводят к уравнению [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{nr} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = b' \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (18)$$

где $n=1$ для сферических полей, $n=2$ для цилиндрических. При выводе уравнения (18) предполагалось, что $kr \gg 1$.

Процесс распространения одномерных волн конечной амплитуды в диссипативных средах изучен в настоящее время достаточно хорошо. Практический интерес начинают представлять двух- и трехмерные нелинейные задачи [4]. В работе [4] проведен теоретический анализ распространения квазиплоской волны конечной амплитуды в слабо нелинейной среде без поглощения, на основе приближенного уравнения. Это уравнение получается из уравнений гидродинамики в предположении, что форма волны медленно изменяется как вдоль направления распространения, так и поперек. Покажем, что аналогичное уравнение в том же приближении, но для среды с поглощением, может быть получено непосредственно из уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) в форме приблизительно плоской волны $\varphi(\tau \equiv t - x/c_0, \quad x' \equiv vx, \quad y' \equiv \sqrt{vy}, \quad z' \equiv \sqrt{vz})$, где $v < 1$, считая, что изменения формы волны малы. Выполняя замену переменных в урав-

нении (1) и ограничиваясь лишь членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial x} - \frac{c_0}{2} \Delta_{y,z} \varphi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[b' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \right], \quad (19)$$

где $\Delta_{y,z}$ — оператор Лапласа по переменным y, z , $b' \equiv b / 2c_0^3$, $\alpha \equiv (\gamma + 1) / 2c_0^2$.

Перейдем к новой переменной $\Phi(x, y, z, t) = \partial \varphi / \partial \tau$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial x} - \frac{c_0}{2} \Delta_{y,z} \Phi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[b' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi^2 \right]. \quad (20)$$

Уравнение (20) без диссипативного члена совпадает с приближенным уравнением, полученным в работе [4] для плотности $\rho(x, y, z, t)$ в квази-плоской нелинейной волне. При отсутствии нелинейного члена уравнение (20) сводится к уравнению теории дифракции в диффузионном приближении [5].

Далее, рассмотрим кратко следующую процедуру получения приближенных решений уравнения (20). Для простоты ограничимся случаем недиссипативной среды. При этом для плоской волны уравнение (20) допускает точное решение, имеющее физический смысл лишь до образования разрывов

$$\Phi = f(\tau + \alpha x \Phi). \quad (21)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (20) без диссипативного члена в следующей форме:

$$\Phi(s \equiv \tau + \alpha x \Phi, \quad x' \equiv vx, \quad y' \equiv \sqrt{v}y, \quad z' \equiv \sqrt{v}z), \quad v < 1. \quad (22)$$

Выполняя замену переменных и ограничиваясь, как обычно, лишь членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial x} = \frac{c_0}{2} \left(1 - \alpha x \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \Delta_{y,z} \Phi, \quad (23)$$

а при условии $1 > \alpha x \frac{\partial \Phi}{\partial s}$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial x} = \frac{c_0}{2} \Delta_{y,z} \Phi. \quad (24)$$

Таким образом, все результаты теории дифракции в диффузионном приближении могут быть легко обобщены на случай слабой нелинейности ($1 > \alpha x \partial \Phi / \partial s$).

Аналогично могут быть получены приближенные решения уравнений (17) и (18). Например, уравнение (17) после замены переменных принимает вид

$$\left[1 - \alpha x \frac{\partial u}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial u}{\partial x} = b' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad (25)$$

или, при условии $1 > \alpha x \frac{\partial u}{\partial s}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \quad (26)$$

Бегущая волна конечной амплитуды при гармоническом источнике $u = u_0 \sin \omega t$ (при $x = 0$) в этом приближении имеет вид

$$u(x, t) = u_0 e^{-b' \omega^2 x} \sin \omega(\tau + \alpha x u) \quad (27)$$

или несколько точнее

$$u(x, t) = u_0 \exp \left\{ - \frac{b' \omega^2 x}{[1 - \alpha x \omega u_0 \cos \omega (\tau + \alpha x u)]^2} \right\} \sin \omega (\tau + \alpha x u). \quad (28)$$

Автор благодарит Р. В. Хохлова, Е. А. Заболотскую и С. А. Рыбака за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boa-Teh Chu, L. S. Kovásznay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.*, 1958, 3, 5, 494—514.
2. R. V. Khokhlov, S. I. Soluyan. Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media. *Acustica*, 1964, 14, 5, 241—247.
3. R. V. Khokhlov, K. A. Naugolnych, S. I. Soluyan. Waves of moderate amplitudes in absorbing media. *Acustica*, 1964, 14, 5, 248—253.
4. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. *Акуст. ж.*, 1969, 15, 1, 40—47.
5. Г. Д. М а л ю ж и н е ц. Развитие представлений о явлениях дифракции. *Усп. физ. наук*, 1959, 69, 2, 321—334.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 августа 1969 г.