АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

УДК 534.78

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДОВ ОСНОВНОГО ТОНА РУССКОЙ РЕЧИ

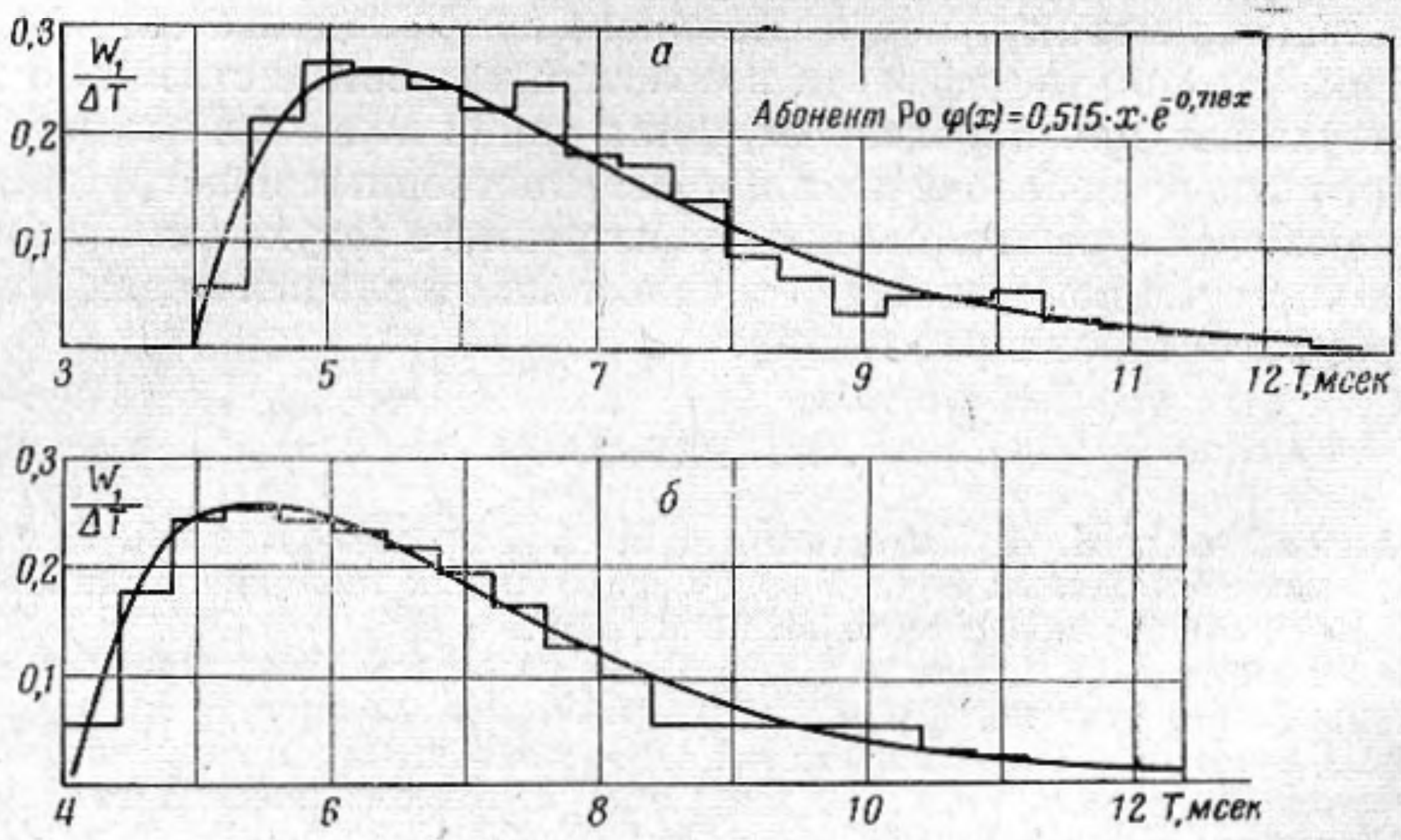
Ю. В. Михеев

Выявлен статистический закон распределения периодов основного тона русской речи, по которому плотность вероятности распределения выражается формулой

$$\varphi(T)=\frac{a^{n+1}}{n!}(T-T_{\min})^n e^{-a(T-T_{\min})} \quad \text{при } T \geqslant T_{\min}$$

Параметры теоретического распределения представлены через моменты эмпирического ряда распределения.

Вывод теоретического закона распределения в общем случае требует решения следующих задач: выяснения характера теоретического распределения (типа распределения) по данному эмпирическому распределению, установления его параметров по данным эмпирического распределения и



Фиг. 1

оценки степени близости эмпирического распределения к теоретическому. Для выявления характера теоретического распределения мы использовали гистограммы распределения плотностей вероятностей периодов основного тона, полученные в результате анализа осциллограмм записей длительностью 25—30 *сек* односторонних телефонных разговоров шести абонентов мужчин и пяти абонентов женщин. Частные случаи предварительно выравненных по методу скользящей средней гистограмм двух абонентов (мужчина и женщина) приведены на фиг. 1, *а* и 2, *а* соответственно. Кривая распределения, проведенная ориентировочно по данным эмпирического распределения имеет экстремум, две точки перегиба, а также характеризуется наличием положительной асимметрии. Такому характеру кривой распределения удовлетворяет функция, имеющая вид

$$y = A \cdot x^n \cdot e^{-ax} \tag{1}$$

и характеризующаяся наличием экстремума в точке n/a и двух точек перегиба $\frac{n \pm \sqrt{n}}{a}$ при $n > 1$ и $a < 0$.

Предварительные расчеты, связанные с нахождением теоретической кривой распределения по методу средних [1] показали, что параметры A, n и a в общем случае являются дробными числами. При этом определенный интеграл от функции (1) выражается через Г-функцию и имеет вид

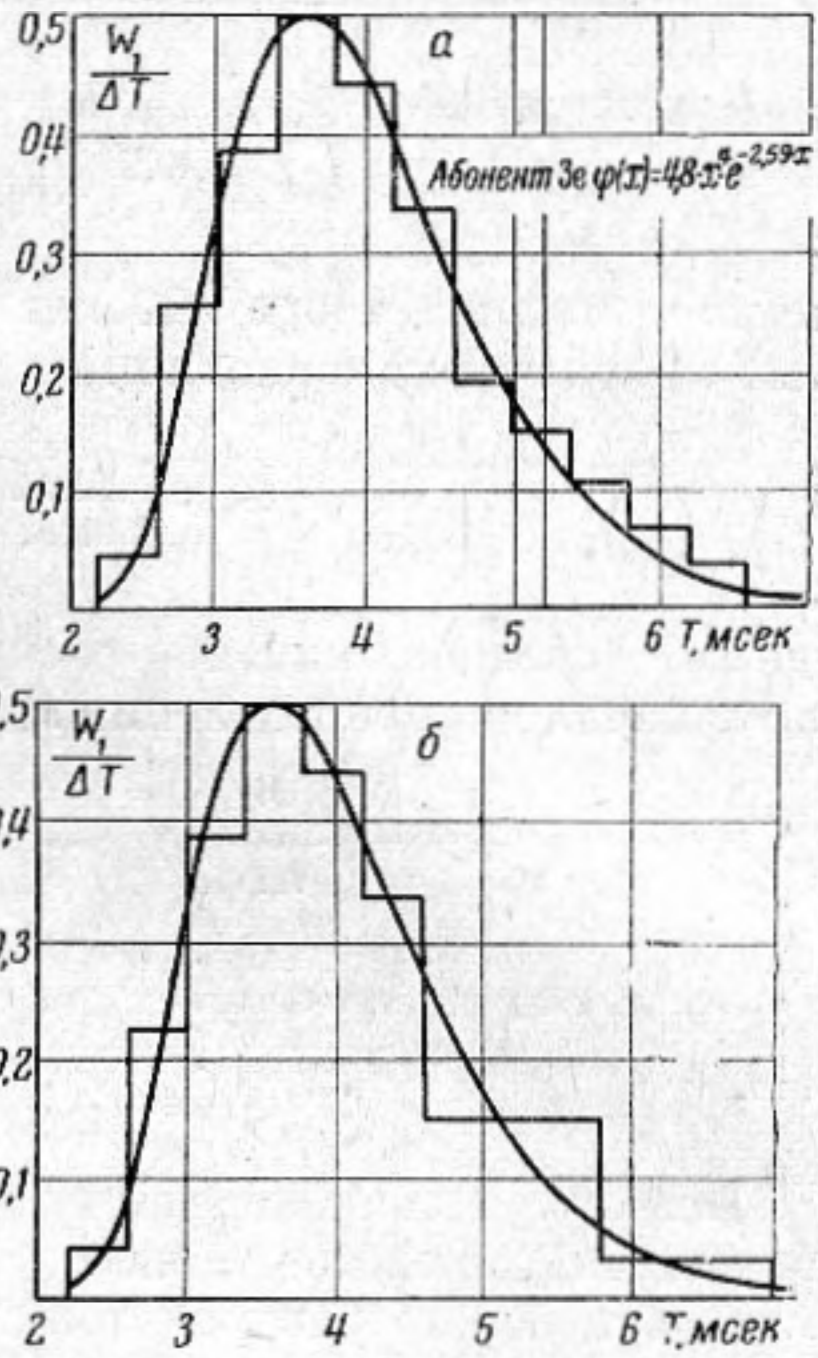
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

$$\text{при } a > 0,\ n > -1. \tag{2}$$

В частном случае при $n > 0$ целом этот интеграл равен $n!/a^{n+1}$.

Интеграл вероятностей от функции (1) при этом принимает вид

$$\frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot dx = 1. \tag{3}$$



Фиг. 2

Этот случай является наиболее интересным, так как возможность представления n целым числом в выражении (1) предполагаемого теоретического распределения существенно упрощает вычисление параметров n и a по методу моментов.

Как показали расчеты, значение n сильно зависит от выбора начала распределения $x_{нач}$, которое в общем случае является неопределенным. Имея дело с малыми вероятностями появления основного тона в начале распределения, значение $x_{нач}$ можно варьировать в небольших пределах достаточно произвольно, но таким образом, чтобы сделать n целым числом. На основе вышеизложенных соображений дальнейшие расчеты были проведены для целого n.

Параметры A, n и a теоретического распределения могут быть найдены достаточно просто по методу моментов из полученных эмпирических распределений по вычисленным первым трем моментам эмпирического ряда распределения. В целях общности текущая координата T, представленная на фиг. 1, *а* и 2, *а* по оси абсцисс, в расчетных формулах обозначена через x.

В табл. 1 приведены расчетные данные для первых трех моментов распределения: $\bar{x}$ — среднего значения распределения $(\bar{T})$, σ^2 — дисперсии распределения, μ_3 — центрального момента третьего порядка, характеризующего асимметрию распределения.

Расчеты производились для случая интервального ряда при использовании известных формул математической статистики [2]. Имея выражение для плотности теоретического распределения в виде

$$\varphi(x) = \frac{a^{n+1}}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-ax} \tag{4}$$

Таблица 1

Абоненты мужчины	Кр	Бу	Ми	Ма	Ро	Ко
$\bar{x}$	9,44	6,6	9,66	7	6,77	8,57
σ_2	6,38	3,36	4,01	5,3	3,84	3,36
μ_3	16,5	10,75	3,1	12,9	7,17	3,16

Абоненты женщины	Об	Ст	Та	Ге	Зе
$\bar{x}$	4	4,44	3,34	4	4
σ^2	0,99	0,98	0,925	1,3	0,75
μ_3	0,645	0,463	1,095	0,96	0,42

легко вычислить теоретические значения моментов распределения, связанные с параметрами, входящими в выражение (4):

$$\bar{x}_0 = \frac{a^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty x\cdot\varphi(x)\cdot dx = \frac{n+1}{a}, \tag{5}$$

где $\bar{x}_0$ — среднее значение распределения при совмещении начала координат с началом распределения $x_{\text{нач}}$. ($\tau_{\text{нач}}$)

$$\sigma^2 = \frac{a^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty (x-\bar{x}_0)^2\cdot\varphi(x)\,dx = \frac{\bar{x}_0}{a} = \frac{n+1}{a^2}, \tag{6}$$

$$\mu_3 = \frac{a^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty (x-\bar{x}_0)^3\cdot\varphi(x)\,dx = \frac{2\bar{x}_0}{a^2} = \frac{2\cdot(n+1)}{a^3}. \tag{7}$$

Используя значения вычисленных моментов эмпирических рядов распределений, представленные в табл. 1, вычислим значения параметров a и n теоретического распределения. Так как параметр A теоретического распределения (1) в выражении для плотности распределения (4) представлен через параметры a и n, то использование эмпирических данных по моментам третьего порядка нежелательно, поскольку точность вычисления моментов по данным эмпирического ряда понижается с увеличением их порядка. Из формул (5) и (6) имеем

$$n = \frac{\bar{x}_0^{\,2}}{\sigma^2} - 1, \tag{8}$$

$$a = \frac{\bar{x}_0}{\sigma^2}. \tag{9}$$

Значения $\bar{x}_0$ вычисляются следующим образом:

$$\bar{x}_0 = \bar{x} - x_{\text{нач}}, \tag{10}$$

где $\bar{x}$ — среднее значение эмпирического ряда распределения, вычисленное по отношению к началу координат и представленные в табл. 1, $x_{\text{нач}}$ — координата начала распределения. В соответствии с изложенным величину $\bar{x}_{\text{нач}}$ можно варьировать для получения целого n в пределах интервала с нулевой плотностью вероятности, соседнего с начальным.

В табл. 2 представлены значения параметров теоретического распределения, вычисленные по формулам (8) и (9). Примеры соответственных уравнений и теоретических кривых приведены на фиг. 1, a и 2, a.

В табл. 3 приведены теоретические значения моментов третьего порядка, вычисленные по выражению (7). В этой же таблице для сравнения по-

Таблица 2

Абоненты мужчины	Кр	Бу	Ми	Ма	Ро	Ко
$A = \frac{a^{n+1}}{n!}$	0,315	0,6	0,167	0,215	0,515	0,1125
n	1	1	3	2	1	4
a	0,56	0,775	1	0,755	0,718	1,22

Абоненты женщины	Об	Ст	Та	Ге	Зе
A	2,77	2,77	2,95	1,58	4,84
n	3	3	2	3	4
a	2,02	2,02	1,81	1,755	2,59

Таблица 3

Абоненты мужчины	Кр	Бу	Ми	Ма	Ро	Ко
$\mu_{3\text{теор}}$	22,8	8,6	7,15	14	10,8	5,5
$\mu_{3\text{эмпир}}$	16,5	10,75	3,1	12,9	7,17	3,16

Абоненты женщины	Об	Ст	Та	Ге	Зе
$\mu_{3\text{теор}}$	0,97	0,97	1,01	1,48	0,575
$\mu_{3\text{эмпир}}$	0,645	0,463	1,095	0,96	0,42

Таблица 4

Абоненты мужчины	Кр	Бу	Ми	Ма	Ро	Ко
χ^2	1,53	4,6	7,15	6	3,28	14,4
r	12	13	7	8	14	11

Абоненты женщины	Об	Ст	Та	Ге	Зе
χ^2	4,5	4,55	12,9	7,65	10,1
r	3	3	5	5	5

мещены значения моментов третьего порядка, вычисленные по данным эмпирических рядов распределений.

Как видно из табл. 3, теоретические и эмпирические значения моментов достаточно близки друг к другу. Исключение составляют данные по абоненту Ми. Это можно объяснить монотонностью произнесения абонентом разговорного текста и отсутствием характерной разговорной интонации, что делает характер распределения периодов основного тона в значительной степени отличным от нормального закона распределения.

Оценка степени близости теоретического распределения данному эмпирическому была произведена с помощью критерия χ^2. Для вычисления χ^2 использовались данные распределений, пример которых приведен на фиг. 1, *б* и 2, *б*. Эти распределения были получены в результате обработки гистограмм, изображенных на фиг. 1, *а* и 2, *а* путем повторного сглаживания их по методу скользящей средней и укрупнения интервалов при наличии провалов в распределении. Вычисленные значения χ^2 приведены в табл. 4.

Пользуясь таблицей χ^2 в зависимости от r и $P_r(\chi)$ при r, равном числу степеней свободы до 30 [2], можно было оценить полученные значения. В табл. 5 даны табличные значения χ^2 для значений r, приведенных в табл. 4.

Таблица 5

r	$P_r(\chi)$			r	$P_r(\chi)$		
	$P=0{,}05$	0,01	0,001		$P=0{,}05$	0,01	0,001
3	7,81	11,34	16,27	11	19,67	24,72	31,26
5	11,07	15,09	20,52	12	21,03	26,22	32,91
7	14,07	18,47	24,32	13	22,37	27,69	34,53
8	15,51	20,09	26,12	14	23,68	29,14	36,12

Вычисленные показатели χ^2 в большинстве случаев значительно меньше любого из его табличных значений, соответствующих данному r. Это показывает, что нет различия между сравниваемыми распределениями (теоретическим, представленным в форме (4), и экспериментальным).

Выводы

На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

1. Характер распределения периодов основного тона русской речи резко отличается от нормального закона распределения. Выявлено, что теоретические кривые распределений подчиняются закону

$$\varphi(x) = \frac{a^{n+1}}{n!} x^n \cdot e^{-ax}.$$

С учетом смещения распределения по оси абсцисс и заменой обозначения переменной x на T теоретическое распределение может быть представлено в виде

$$\varphi(T) = \frac{a^{n+1}}{n!} (T - T_{\min})^n \cdot e^{-a(T-T_{\min})}$$

$$\text{при } T \leqslant T_{\min}$$

2. Формулы, связывающие параметры теоретического распределения с моментами эмпирического ряда распределения, представляются в виде

$$\bar{x}_0 = \frac{n+1}{a}, \qquad \sigma^2 = \frac{n+1}{a^2}, \qquad \mu_3 = \frac{2\cdot(n+1)}{a^3}.$$

3. Применение критерия согласия χ^2 показало, что теоретические кривые, представленные в форме (4), хорошо согласуются с соответственными эмпирическими распределениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Семендяев. Эмпирические формулы. М., ГТТИ, 1933.
2. А. М. Длин. Математическая статистика в технике. М., Изд-во АН СССР, 1958.

Москва

Поступила в редакцию
6 января 1969 г.