АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА НЕРОВНОСТЯХ ПЛАСТИНЫ, ЗАНИМАЮЩИХ КОНЕЧНУЮ ПЛОЩАДЬ

И. П. Фирсов

Методом интегрального преобразования Фурье решена задача о рассеянии волны Лэмба на неровностях, занимающих конечную площадь на поверхностях пластины. Глубины неровностей и образуемые ими углы наклона считаются малыми, что позволяет ограничиться первым приближением при нахождении потенциалов рассеянных волн. Для круглой неровности (вмятины) рассчитаны характеристики направленности рассеянных симметричных лэмбовских волн.

Нормальные волны, распространяющиеся в пластине, находят широкое применение в ультразвуковой дефектоскопии, дисперсионных линиях задержки и т. д. Поэтому задача о рассеянии этих волн на неровностях поверхности пластины приобретает существенное значение. Ранее нами рассматривалось рассеяние нормальной волны на неровностях, занимающих полосу, бесконечную в поперечном направлении [1, 2]. Ниже исследуется более общая задача, когда неровности занимают некоторые конечные области на поверхностях пластины; при этом рассеянные волны уже не являются плоскими.

Рассмотрим неограниченную свободную от внешних напряжений пластину толщиной $2h$. Пусть неровности на верхней и нижней поверхностях пластины занимают некоторые области Ω_1 и Ω_2 соответственно, так что уравнения поверхностей имеют вид:

$$y = \begin{cases} \pm h, & \text{если} \quad x, z \notin \Omega_{1,2} \\ \pm h + \zeta_{1,2}(x, z), & \text{если} \quad x, z \in \Omega_{1,2}. \end{cases}$$

Задача о распространении нормальных волн в пластине, как известно, сводится к интегрированию уравнений для потенциалов

$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0, \qquad \Delta\mathbf{\Psi} + k_t^2\mathbf{\Psi} = 0 \tag{1}$$

при одновременном выполнении граничных условий и дополнительного условия $\operatorname{div}\mathbf{\Psi} = 0$. При распространении симметричной (можно рассмотреть и антисимметричную) лэмбовской волны, определяемой потенциалами

$$\varphi_0 = A_0 \operatorname{ch}\gamma_0 y \cdot \exp(ik_0 z), \qquad \Psi_0 = \Psi_x = D_0 \operatorname{sh}\beta_0 y \cdot \exp(ik_0 z),$$

где $\gamma_0^2 = k_0^2 - k_l^2$, $\beta_0^2 = k_0^2 - k_t^2$, напряжения в плоскостях $\pm h$ пластины отсутствуют всюду, исключая области Ω_1 и Ω_2, где они отличны от нуля. Напряжения в этих областях в первом приближении вычислялись в работах [1, 2] при условии, что глубины неровностей и образуемые ими углы наклона малы. Нам эти напряжения удобнее записать в виде двойных интегралов Фурье:

$$\sigma_{xy}(\pm h) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\sigma}_{yx}(\pm h, k_x, k_z)\cdot \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z,$$

$$\sigma_{yy}(\pm h) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\sigma}_{yy}(\pm h, k_x, k_z)\cdot \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z, \qquad (2)$$

$$\sigma_{yz}(\pm h) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\sigma}_{yz}(\pm h, k_x, k_z)\cdot \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z,$$

где

$$\widetilde{\sigma}_{yx}(\pm h) = (4\pi^2\mu)^{-1}\,\sigma^0_{xx}(\pm h) \iint\limits_{\Omega_{1,2}} \frac{\partial \zeta_{1,2}}{\partial x} \exp(ik_0 z - ik_x x - ik_z z)\,dx\,dz,$$

$$\widetilde{\sigma}_{yy}(\pm h) = -(4\pi^2\mu)^{-1} \left.\frac{\partial \sigma^0_{yy}}{\partial y}\right|_{\pm h} \iint\limits_{\Omega_{1,2}} \zeta_{1,2} \exp(ik_0 z - ik_x x - ik_z z)\,dx\,dz, \qquad (3)$$

$$\widetilde{\sigma}_{yz}(\pm h) = (4\pi^2\mu)^{-1} \iint\limits_{\Omega_{1,2}} \left[-\left.\frac{\partial \sigma^0_{zy}}{\partial y}\right|_{\pm h} \zeta_{1,2} + \sigma^0_{zz}(\pm h)\,\frac{\partial \zeta_{1,2}}{\partial z} \right] \exp \times$$
$$\times\,(ik_0 z - ik_x x - ik_z z)\,dx\,dz.$$

В соответствии с принятой нами формой записи граничных условий (2), решение уравнений (1) для рассеянных волн можно представить следующими интегралами:

$$\varphi = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (A \operatorname{ch}\gamma y + B \operatorname{sh}\gamma y) \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z,$$

$$\psi_x = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (C \operatorname{ch}\beta y + D \operatorname{sh}\beta y) \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z, \qquad (4)$$

$$\psi_y = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (E \operatorname{ch}\beta y + F \operatorname{sh}\beta y) \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z,$$

$$\psi_z = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (G \operatorname{ch}\beta y + H \operatorname{sh}\beta y) \exp(ik_x x + ik_z z)\,dk_x\,dk_z.$$

Величины β и γ удовлетворяют соотношениям: $\beta^2 = k^2 - k_l^2$, $\gamma^2 = k^2 - k_l^2$, $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. Коэффициенты A, B, C и т. д. являются решением системы, два уравнения которой получаются из условия $\operatorname{div}\Psi = 0$, а остальные шесть из сравнения напряжений в плоскостях $y = \pm h$ с граничными условиями (2). Коэффициенты эти определяются следующими формулами:

$$A = \Delta_A / \Delta_s,\quad B = \Delta_B / \Delta_a,\quad C = \Delta_C / (\Delta_a \delta_s), \qquad (5)$$
$$D = \Delta_D / (\Delta_s \delta_s),\quad E = \Delta_E / \delta_s,\quad F = \Delta_F / \delta_a,$$
$$G = \Delta_G / (\Delta_a \delta_a),\quad H = \Delta_H / (\Delta_s \delta_s).$$

Здесь

$$\Delta_A = d_3(\beta^2 + k^2) \operatorname{sh}\beta h - 2i\beta(k_z d_6 + k_x d_2) \operatorname{ch}\beta h,$$
$$\Delta_B = -d_4(\beta^2 + k^2) \operatorname{ch}\beta h + 2i\beta(k_z d_5 + k_x d_1) \operatorname{sh}\beta h,$$
$$\Delta_C = -\delta_a[(\beta^2 + k^2) d_5 \operatorname{sh}\gamma h + 2ik_z\gamma d_4 \operatorname{ch}\gamma h] -$$
$$-2k_x / k_l^2 \cdot (k_z d_1 - k_x d_5)\,[(\beta^2 + k^2) \operatorname{sh}\gamma h \cdot \delta_a - 2\gamma\beta \operatorname{ch}\gamma h \cdot \delta_s],$$
$$\Delta_D = \delta_s[(\beta^2 + k^2) d_6 \operatorname{ch}\gamma h + 2ik_z\gamma d_3 \operatorname{sh}\gamma h] +$$
$$+ 2k_x / k_l^2 (k_z d_2 - k_x d_6)\,[(\beta^2 + k^2) \operatorname{ch}\gamma h \cdot \delta_s - 2\gamma\beta \operatorname{sh}\gamma h \cdot \delta_a],$$
$$\Delta_E = -i(k_z d_2 - k_x d_6),\qquad \Delta_F = i(k_z d_1 - k_x d_5), \qquad (6)$$

$$\Delta_G = \delta_a[(\beta^2+k^2)d_1 \operatorname{sh}\gamma h + 2ik_x\gamma d_4 \operatorname{ch}\gamma h] -$$
$$- 2k_z/k_t^2\cdot(k_zd_1 - k_xd_5)[(\beta^2+k^2)\operatorname{sh}\gamma h\cdot\delta_a - 2\gamma\beta\operatorname{ch}\gamma h\cdot\delta_s],$$
$$\Delta_H = -\delta_s[(\beta^2+k^2)d_2 \operatorname{ch}\gamma h + 2ik_x\gamma d_3 \operatorname{sh}\gamma h] +$$
$$+ 2k_z/k_t^2\cdot(k_zd_2 - k_xd_6)\ [(\beta^2+k^2)\operatorname{ch}\gamma h\cdot\delta_s - 2\gamma\beta\operatorname{sh}\gamma h\cdot\delta_a],$$
$$\Delta_s = (\beta^2+k^2)^2 \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\beta h - 4k^2\gamma\beta \operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\beta h,$$
$$\Delta_a = (\beta^2+k^2)^2 \operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\beta h - 4k^2\gamma\beta \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\beta h,$$
$$\delta_s = k_t^2\beta \operatorname{sh}\beta h, \qquad \delta_a = k_t^2\beta\operatorname{ch}\beta h.$$

Для сокращения записи введены обозначения:

$$d_{1,2} = \frac{1}{2}[\tilde\sigma_{yx}(-h) \pm \tilde\sigma_{yx}(h)], \quad d_{3,4} = \frac{1}{2}[\tilde\sigma_{yy}(-h) \pm \tilde\sigma_{yy}(h)],$$
$$d_{5,6} = \frac{1}{2}[\tilde\sigma_{yz}(-h) \pm \tilde\sigma_{yz}(h)]. \tag{7}$$

Таким образом, выражения (4) с учетом формул (5) и (6) дают решение задачи о рассеянии плоской симметричной волны Лэмба на малых неровностях пластины, записанное в интегральной форме.

Пусть в частности неровности занимают бесконечную в направлении оси x полосу, ширина которой L, а рельеф неровностей представляется рядами Фурье: $\zeta_{1,2}(x, z) = \sum\limits_m \xi_m^{1,2}(z)\cdot\exp(img_1x)$ (такой вид неровностей рассматривался в работе [2]). В выражениях (3) и во всех последующих интегралы по переменной x заменим δ — функцией $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(img_1x - ik_xx)\,dx = 2\pi\delta(mg_1 - k_x)$. Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k_x)\,\delta(mg_1 - k_x)\,dk_x = f(mg_1)$, выполним интегрирование в (4) по переменной k_x. Оставшиеся интегралы по переменной k_z совпадут с соответствующими интегралами (12) работы [2]. Поэтому результат полностью совпадает с решением, приведенном в работе [2].

Рассмотрим решение для случая, когда области Ω_1 и Ω_2 представляют собой круги радиусов R_1 и R_2, центры которых лежат на оси y; при этом удобно перейти к полярным координатам: $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $k_x = k\sin\theta_2$, $k_z = k\cos\theta_2$.

Тогда, если неровности не зависят от угла θ, в выражениях (3) интегралы по дуговой координате θ можно вычислить, учитывая разложение $\exp(ik_0r\cos\theta) = \sum\limits_m i^m \exp(im\theta)\,J_m(k_0r)$ и формулу $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(ir\sin\theta - im\theta)\times d\theta = 2\pi J_m(r)$.

В результате мы получаем

$$\tilde\sigma_{yx}(\pm h) = \sum_m a_m^{1,2}\cdot\exp(im\theta_2), \quad \tilde\sigma_{yy}(\pm h) = \sum_m b_m^{1,2}\cdot\exp(im\theta_2),$$
$$\tilde\sigma_{yz}(\pm h) = \sum_m c_m^{1,2}\cdot\exp(im\theta_2), \tag{3'}$$

где

$$a_m^{1,2} = -(2k_0\mu\pi)^{-1} m\sigma_{xx}^0(\pm h)\int\limits_0^{R_{1,2}}\frac{d\zeta_{1,2}}{dr}J_m(k_0r)\,J_m(kr)\,dr,$$

$$b_m^{1,2} = -(2\pi\mu)^{-1} \frac{\partial \sigma_{yx}^0}{\partial y}\bigg|_{\pm h} \int\limits_0^{R_{1,2}} \zeta_{1,2} J_m(k_0 r) J_m(kr)\, r\, dr,$$

$$c_m^{1,2} = -(2\pi\mu)^{-1} \int\limits_0^{R_{1,2}} \left[\frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial y}\bigg|_{\pm h} \zeta_{1,2} J_m(k_0 r) + i\sigma_{zz}^0(\pm h) \frac{d\zeta_{1,2}}{dr} J_m'(k_0 r) \right] \times$$
$$\times J_m(kr)\, r\, dr.$$

К координатам r и θ следует перейти и в выражениях (5), (6) и (7). Выражения (4) после перехода к полярным координатам и интегрирования по θ примут вид:

$$\varphi = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int\limits_0^{\infty} [\mathrm{ch}\, \gamma y \Delta_{mA} \mid \Delta_s + \mathrm{sh}\, \gamma y \Delta_{mB} \mid \Delta_a]\, J_m(kr)\, k\, dk.$$

$$\psi_x = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int\limits_0^{\infty} [\mathrm{ch}\, \beta y \Delta_{mC}/(\Delta_a \delta_a) + \mathrm{sh}\, \beta y \Delta_{mD}/(\Delta_s \delta_s)] \times$$
$$\times J_m(kr)\, k\, dk, \tag{4'}$$

$$\psi_y = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int\limits_0^{\infty} [\mathrm{ch}\, \beta y \Delta_{mE}/\delta_s + \mathrm{sh}\, \beta y \Delta_{mF}/\delta_a]\, J_m(kr)\, k\, dk,$$

$$\psi_z = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int\limits_0^{\infty} [\mathrm{ch}\, \beta y\, \Delta_{mG}/(\Delta_a \delta_a) + \mathrm{sh}\, \beta y \Delta_{mH}/(\Delta_s \delta_s)] \times$$
$$\times J_m(kr)\, k\, dk.$$

Входящие сюда величины определяются следующими выражениями:

$$\Delta_{mA} = d_m^{(3)} (\beta^2 + k^2)\, \mathrm{sh}\, \beta h - k\beta\, \mathrm{ch}\, \beta h\, (d_{m-1}^{(2)} - d_{m+1}^{(2)} + i d_{m-1}^{(6)} + i d_{m+1}^{(6)}),$$

$$\Delta_{mB} = -d_m^{(4)} (\beta^2 + k^2)\, \mathrm{ch}\, \beta h + k\beta\, \mathrm{sh}\, \beta h\, (d_{m-1}^{(1)} - d_{m+1}^{(1)} + i d_{m-1}^{(5)} + i d_{m+1}^{(5)}),$$

$$\Delta_{mC} = -\delta_a [(\beta^2 + k^2) d_m^{(5)}\, \mathrm{sh}\, \gamma h + ik\gamma (d_{m-1}^{(4)} + d_{m+1}^{(4)})\, \mathrm{ch}\, \gamma h] -$$
$$- k^2/2k_t^2 \cdot (-i d_{m-2}^{(1)} + i d_{m+2}^{(1)} + d_{m-2}^{(5)} - 2 d_m^{(5)} + d_{m+2}^{(5)}) \times$$
$$\times [(\beta^2 + k^2)\, \mathrm{sh}\, \gamma h \cdot \delta_a - 2\gamma\beta\, \mathrm{ch}\, \gamma h \cdot \delta_s], \tag{6'}$$

$$\Delta_{mD} = \delta_s [(\beta^2 + k^2) d_m^{(6)}\, \mathrm{ch}\, \gamma h + ik\gamma (d_{m-1}^{(3)} + d_{m+1}^{(3)})\, \mathrm{sh}\, \gamma h] +$$
$$+ k^2/2k_t^2 \cdot (-i d_{m-2}^{(2)} + i d_{m+2}^{(2)} + d_{m-2}^{(6)} - 2 d_m^{(6)} + d_{m+2}^{(6)}) \times$$
$$\times [(\beta^2 + k^2)\, \mathrm{ch}\, \gamma h \cdot \delta_s - 2\gamma\beta\, \mathrm{sh}\, \gamma h \cdot \delta_a],$$

$$\Delta_{mE} = -\frac{1}{2} ik\, (d_{m-1}^{(2)} + d_{m+1}^{(2)} + i d_{m-1}^{(6)} - i d_{m+1}^{(6)}),$$

$$\Delta_{mF} = \frac{1}{2} ik\, (d_{m-1}^{(1)} + d_{m+1}^{(1)} + i d_{m-1}^{(5)} - i d_{m+1}^{(5)}),$$

$$\Delta_{mG} = \delta_a [(\beta^2 + k^2) d_m^{(1)}\, \mathrm{sh}\, \gamma h + k\gamma\, (d_{m-1}^{(4)} - d_{m+1}^{(4)})\, \mathrm{ch}\, \gamma h] - k^2/2k_t^2 \cdot (d_{m-2}^{(1)} +$$
$$+ 2 d_m^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} + i d_{m-2}^{(5)} - i d_{m+2}^{(5)})\, [(\beta^2 + k^2)\, \mathrm{sh}\, \gamma h \cdot \delta_a - 2\gamma\beta\, \mathrm{ch}\, \gamma h \cdot \delta_s],$$

$$\Delta_{mH} = -\delta_s [(\beta^2 + k^2) d_m^{(2)}\, \mathrm{ch}\, \gamma h + k\gamma\, (d_{m-1}^{(3)} - d_{m+1}^{(3)})\, \mathrm{sh}\, \gamma h] +$$
$$+ k^2/2k_t^2 \cdot (d_{m-2}^{(2)} + 2 d_m^{(2)} + d_{m+2}^{(2)} + i d_{m-2}^{(6)} - i d_{m+2}^{(6)})\, [(\beta^2 + k^2)\, \mathrm{ch}\, \gamma h \cdot \delta_s -$$
$$- 2\gamma\beta\, \mathrm{sh}\, \gamma h \cdot \delta_a].$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$d_m^{1,2} = \frac{1}{2} (a_m^{(2)} \pm a_m^{(1)}),\quad d_m^{3,4} = \frac{1}{2} (b_m^{(2)} \pm b_m^{(1)}),\quad d_m^{5,6} = \frac{1}{2} (c_m^{(2)} \pm c_m^{(1)}).$$

Чтобы вычислить интегралы (4′), заменим функции Бесселя функциями Ханкеля $J_m(kr) = \frac{1}{2}[H_m^{(1)}(kr) + H_m^{(2)}(kr)]$ и разобьем каждый интеграл на два. Во вторых интегралах, содержащих функции Ханкеля второго рода, сделаем замену $k = ue^{-i\pi}$. Пользуясь равенствами $J_m(ue^{i\pi}) = (-1)^m J_m(u)$, $H_m^{(2)}(ue^{-i\pi}) = -(-1)^m (H_m^{(1)}(u)$, найдем, что подынтегральные выражения этих интегралов совпадают с соответственными выражениями первых интегралов, а пределы интегрирования будут от $-\infty$ до 0. Объединяя два интеграла в один, получим

$$\varphi = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{ch} \gamma y \Delta_{mA} | \Delta_s + \operatorname{sh} \gamma y \Delta_{mB}/\Delta_a] H_m^{(1)}(kr)\, k\, dk,$$

$$\varphi_x = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{ch} \beta y \Delta_{mC} | (\Delta_a \delta_a) + \operatorname{sh} \beta y \Delta_{mD} | (\Delta_s \delta_s)] H_m^{(1)}(kr) k dk,$$

$$\varphi_y = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{ch} \beta y \Delta_{mE} | \delta_s + \operatorname{sh} \beta y\, \Delta_{mF} | \delta_a] H_m^{(1)}(kr)\, k\, dk, \tag{8}$$

$$\varphi_t = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\theta) \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{ch} \beta y \Delta_{mG} | (\Delta_a \delta_a) + \operatorname{sh} \beta y \Delta_{mH} | (\Delta_s \delta_s)] \times$$
$$\times H_m^{(1)}(kr)\, k\, dk.$$

Подынтегральные выражения (8) являются мероморфными функциями в комплексной плоскости k, разрезанной по отрицательной полуоси абсцисс. При этом, в верхней полуплоскости они удовлетворяют лемме Жордана, если $r > R_1$ и $r > R_2$. Так как путь интегрирования проходит по верхнему краю разреза, то его можно, не пересекая линии разреза, замкнуть в верхней полуплоскости. Интегралы тогда сведутся к сумме вычетов относительно полюсов k_n, являющихся корнями дисперсионных уравнений лэмбовских ($\Delta_s = 0$, $\Delta_a = 0$) и сдвиговых ($\delta_s = 0$, $\delta_a = 0$) волн.

В рассеянном поле, таким образом, присутствуют компоненты потенциалов обоих типов волн, которые могут быть написаны раздельно в виде следующих двойных сумм:

Симметричные волны Лэмба

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} A_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{ch} \gamma_n y \cdot \cos m\theta, \\ \varphi_x &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} D_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{sh} \beta_n y \cdot \cos m\theta, \\ \varphi_z &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} H_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{sh} \beta_n y \cdot \sin m\theta; \end{aligned} \tag{9}$$

антисимметричные волны Лэмба

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} B_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{sh} \gamma_n y \cdot \cos m\theta, \\ \varphi_x &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} C_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{ch} \beta_n y \cdot \cos m\theta, \\ \psi_z &= \sum_{m,\,n} i^{m+1} G_{mn}^{\Lambda} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{ch} \beta_n y \cdot \sin m\theta; \end{aligned} \tag{10}$$

симметричные сдвиговые волны

$$\varphi_x = \sum_{m,\,n} i^{m+1} D_{mn}^{c} H_m^{(1)}(k_n r) \operatorname{sh} \beta_n y \cdot \cos m\theta,$$

$$\varphi_y = \sum_{m,\,n} i^{m+1} E^{c}_{mn} H^{(1)}_m (k_n r) \operatorname{ch} \beta_n y \cdot \sin m\theta, \tag{11}$$

$$\varphi_z = \sum_{m,\,n} i^{m+1} H^{c}_{mn} H^{(1)}_m (k_n r) \operatorname{sh} \beta_n y \cdot \sin m\theta;$$

антисимметричные сдвиговые волны

$$\varphi_x = \sum_{m,\,n} i^{m+1} C^{c}_{mn} H^{(1)}_m (k_n r) \operatorname{ch} \beta_n y \cdot \cos m\theta,$$

$$\psi_y = \sum_{m,\,n} i^{m+1} F^{c}_{mn} H^{(1)}_m (k_n r) \operatorname{sh} \beta_n y \cdot \sin m\theta, \tag{12}$$

$$\varphi_z = \sum_{m,\,n} i^{m+1} G^{c}_{mn} H^{(1)}_m (k_n r) \operatorname{ch} \beta_n y \cdot \sin m\theta.$$

Величины, входящие в формулы (9) — (12), выражаются так:

$$A^{\Lambda}_{mn} = 4\pi^2 k \varepsilon_m \Delta_{mA} \mid \Delta_s{}', \quad B^{\Lambda}_{mn} = 4\pi^2 k \varepsilon_m \Delta_{mB} \mid \Delta_a{}',$$
$$E^{c}_{mn} = 4\pi^2 k i \varepsilon_m \Delta_{mE} \mid \delta_s{}', \quad F^{c}_{mn} = 4\pi^2 k i \varepsilon_m \Delta_{mF} \mid \delta_a{}', \tag{13}$$
$$\varepsilon_m = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ если } m = 0, \\ 1, \text{ если } m \neq 0. \end{cases}$$

В выражениях (13) k есть n-ый корень соответственного дисперсионного уравнения, индекс n опущен для сокращения записи. Штрих означает производную по переменной k. Выражения Δ_{mA}, Δ_{mB}, Δ_{mE}, Δ_{mF} даются формулами (6′). Остальные коэффициенты не приводятся, так как ниже будет показано, что они выражаются через приведенные коэффициенты A, B, E и F.

Найдем компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$. Для этого удобно предварительно выразить проекции векторного потенциала ψ_r, ψ_θ, ψ_y через ψ_x, ψ_y, ψ_z по формулам:

$$\psi_r = \psi_z \cos\theta + \psi_x \sin\theta, \quad \psi_\theta = -\psi_z \sin\theta + \psi_x \cos\theta, \quad \psi_y = \psi_y.$$

Воспользовавшись теперь соотношением $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\Psi$ получим

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_y}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial y}\sin\theta - \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\cos\theta,$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\sin\theta - \frac{\partial\psi_y}{\partial r}, \tag{14}$$

$$u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}\right)\sin\theta.$$

Для дальнего поля, заменяя функции Ханкеля в (9) их асимптотическими значениями $H^{(1)}_m(kr) = 2(2\pi kr)^{-1/2}(-i)^m \exp(ikr - i\pi/4)$ и оставляя члены только порядка $r^{-1/2}$, получим в частности для n-ой симметричной лэмбовской волны

$$u_r = u(r) \sum_{m=0}^{\infty} [2ik \operatorname{ch}\gamma y \cdot A_m{}^{\Lambda} - \beta \operatorname{ch}\beta y (D^{\Lambda}_{m-1} + D^{\Lambda}_{m+1} - H^{\Lambda}_{m-1} + H^{\Lambda}_{m+1})] \cos m\theta,$$

$$u_\theta = u(r)\beta \operatorname{ch}\beta y \sum_{m=0}^{\infty} (D^{\Lambda}_{m-1} - D^{\Lambda}_{m+1} + H^{\Lambda}_{m-1} + H^{\Lambda}_{m+1}) \sin m\theta, \tag{15}$$

$$u_y = u(r) \sum_{m=0}^{\infty} [2\gamma \operatorname{sh}\gamma y \cdot A_m{}^{\Lambda} + ik \operatorname{sh}\beta y (D^{\Lambda}_{m-1} + D_{m+1} - H^{\Lambda}_{m-1} + H^{\Lambda}_{m+1})] \cos m\theta,$$

$$u(r) = (2\pi kr)^{-1/2} \exp(ikr + i\pi/4).$$

Индекс n опущен для сокращения записи. Коэффициенты A_m^Λ, D_m^Λ и H_m^λ связаны между собой некоторыми соотношениями, которые можно получить из граничных условий $\sigma_{yy}(\pm h) = \sigma_{y\theta}(\pm h) = \sigma_{yr}(\pm h) = 0$. Пользуясь формулой $\sigma_{ik} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu u_{ik}$ и (15), найдем

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\beta^2 + k^2) \operatorname{ch} \gamma h \cdot A_m{}^\Lambda + ik\beta \operatorname{ch} \beta h (D_{m-1}^\Lambda + D_{m+1}^\Lambda - H_{m-1}^\Lambda + \\ + H_{m+1}^\Lambda)] \cos m\theta = 0, \tag{16}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^\Lambda - D_{m+1}^\Lambda + H_{m-1}^\Lambda + H_{m+1}^\Lambda) \sin m\theta = 0.$$

Равенство $\sigma_{yr}(h) = 0$ сводится к первому. Из сравнения формул (16) и (15) видно, что компонента u_θ обращается в нуль, а u_r и u_y можно написать в виде

$$u_r = u(r)\, i\, [2k \operatorname{ch} \gamma y - \operatorname{ch} \gamma h \cdot \operatorname{ch} \beta y\, (k^2 + \beta^2)/(k \operatorname{ch} \beta h)] \sum_{m=0}^{\infty} A_m{}^\Lambda \cos m\theta, \tag{17}$$

$$u_y = u(r)\, [2\gamma \operatorname{sh} \gamma y - \operatorname{ch} \gamma h \cdot \operatorname{sh} \beta y\, (k^2 + \beta^2)/(\beta \operatorname{ch} \beta h)] \sum_{m=0}^{\infty} A_m{}^\Lambda \cos m\theta,$$

т. е. вектор смещения $\mathbf{u}$ для дальнего поля лежит в радиальной плоскости.

Компоненты вектора смещения для дальнего поля n-й симметричной сдвиговой волны получим из формул (11) и (14).

$$u_r = -u(r)\, \beta \operatorname{ch} \beta y \sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^c + D_{m+1}^c - H_{m-1}^c + H_{m+1}^c) \cos m\theta, \tag{18}$$

$$u_\theta = u(r) \beta \operatorname{ch} \beta\, y \sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^c - D_{m+1}^c + H_{m-1}^c + H_{m+1}^c - \frac{ik}{\beta} E_m^c) \sin m\,\theta,$$

$$u_y = u(r)\, ik \operatorname{sh} \beta y \sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^c + D_{m+1} - H_{m-1}^c + H_{m+1}^c) \cos m\theta.$$

Из условия $\sigma_{yy}(h) = 0$ на поверхности пластины и $\operatorname{div} \psi = 0$ следует

$$\sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^c + D_{m+1}^c - H_{m-1}^c + H_{m+1}^c) \cos m\theta = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (D_{m-1}^c - D_{m+1}^c + H_{m-1}^c + H_{m+1}^c - i\beta E_m{}^c/k) \sin m\theta = 0.$$

Напряжения $\sigma_{y\theta}(h)$, $\sigma_{yr}(h)$ обращаются в нуль тождественно при любых коэффициентах $D_m{}^c$, $H_m{}^c$, $E_m{}^c$. Подставляя выражение (19) в формулу (18), найдем, что в дальнем поле сдвиговой симметричной волны компоненты u_r и u_y отсутствуют, а компонента u_θ имеет вид

$$u_\theta = -u(r)\, ik_t{}^2 \operatorname{ch} \beta y/k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} E_m{}^c \sin m\theta.$$

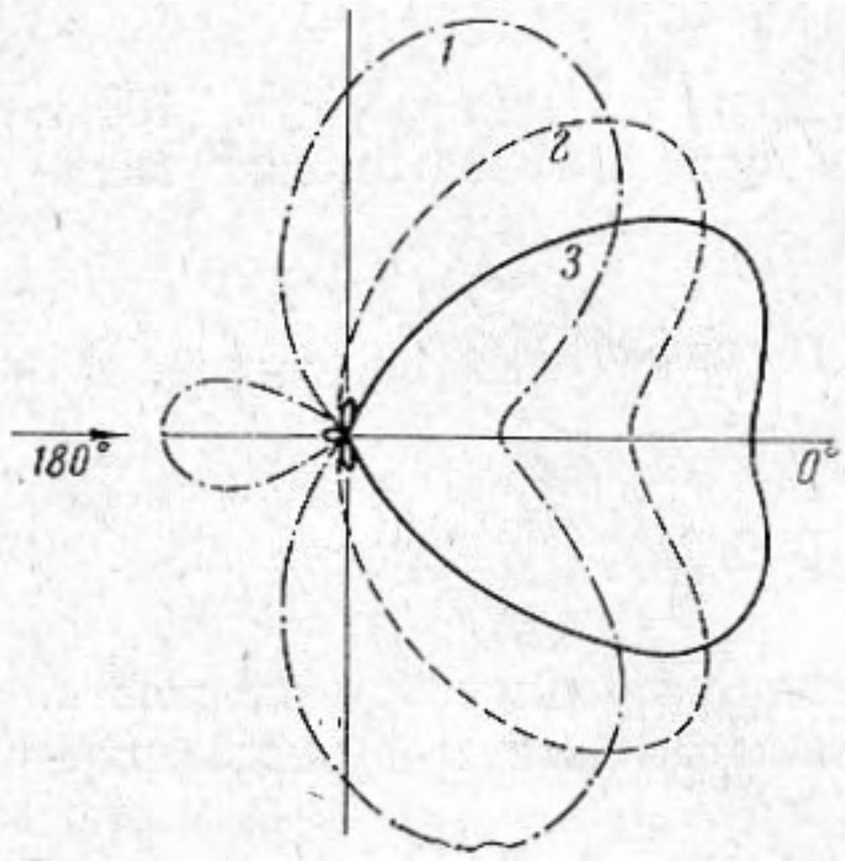
Аналогичные соотношения можно получить и для антисимметричных лэмбовских и сдвиговых волн.

Рассчитаем характеристику направленности рассеянной лэмбовской симметричной волны для частного случая круглой неровности $\zeta = {}^1/_2 \zeta_0 (1 + \cos gr)$, $0 \leqslant r \leqslant R$, где R — радиус неровности, а $g = \pi / R$. Так как большинство приборов, возбуждающих и регистрирующих лэмбовские волны, реагируют только на нормальную компоненту вектора смещения u_y на поверхности пластины, то характеристики рассчитаем для этой компоненты. Из формулы (17) мы имеем

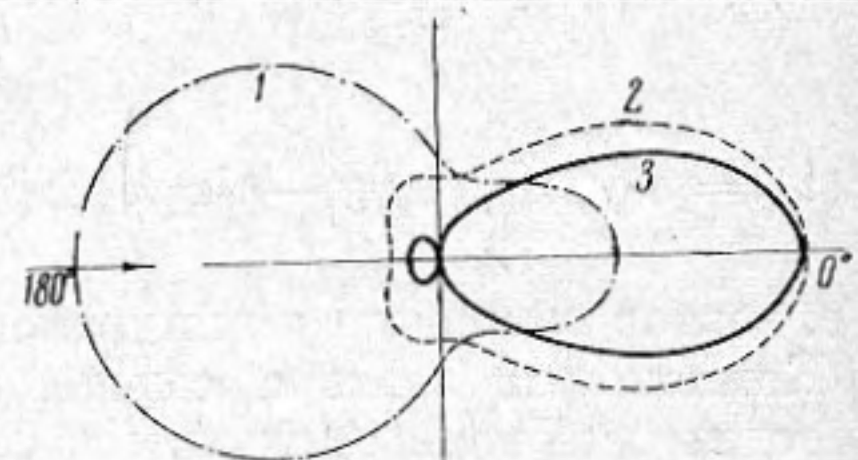
$$\Phi(\theta) = u_y(h, \theta)/u_y(h, \theta)_{\max} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos m\theta,$$

где $\alpha_m = A_m \Big/ \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta \right)_{\max}$.

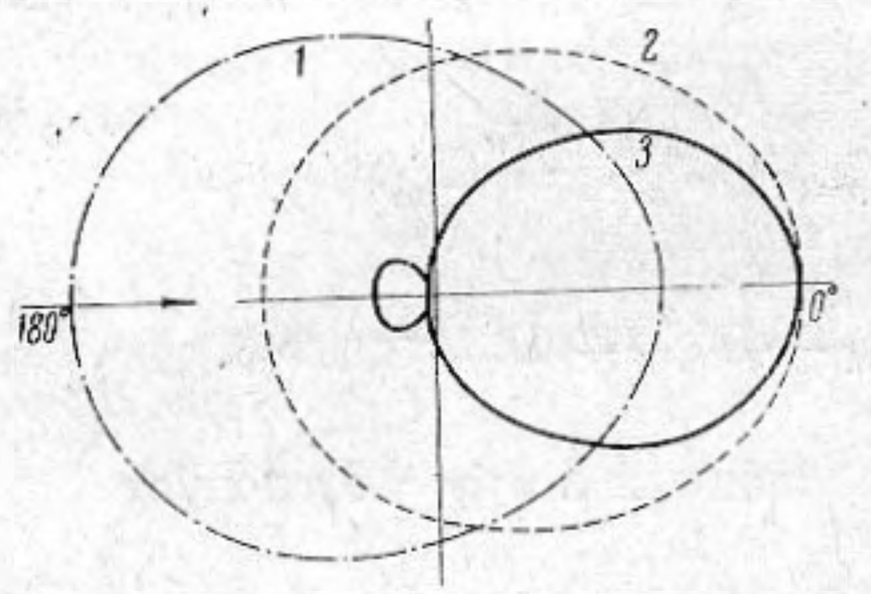
Можно показать, что характеристика рассеяния для нормальной компоненты u_y качественно совпадает с характеристикой рассеяния для интен-



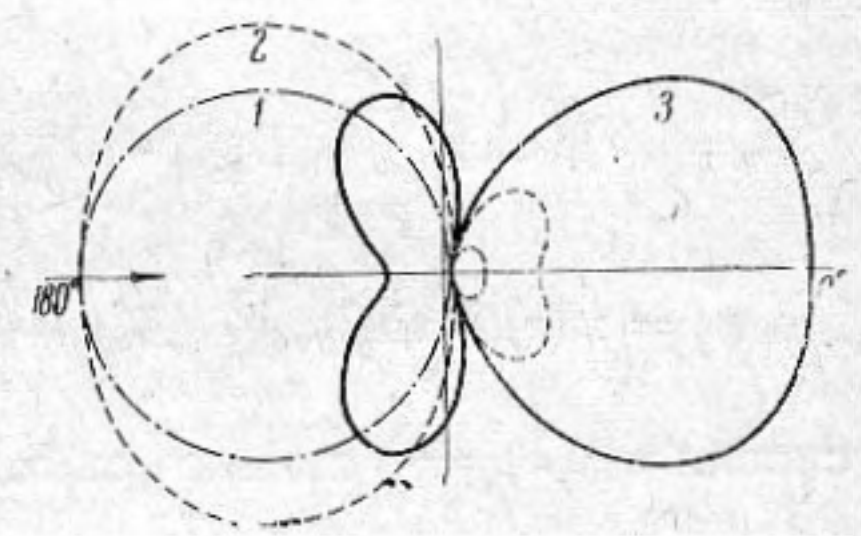
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

сивности соответствующей волны. Действительно, интенсивность потока энергии в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$ находится по формуле: $W_r = -(\dot{u}_r \sigma_{rr} + \dot{u}_y \sigma_{ry})$, где

$$\dot{u}_r = u_r^0(r, y) \cos(kr + \pi/4 - \omega t) \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\Lambda} \cos m\theta,$$

$$\sigma_{rr} = -\sigma_r^0(r, y) \cos(kr + \pi/4 - \omega t) \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\Lambda} \cos m\theta,$$

$$\dot{u}_y = u_y^0(r, y) \sin(kr + \pi/4 - \omega t) \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\Lambda} \cos m\theta,$$

$$\sigma_{ry} = -\sigma_y^0(r, y) \sin(kr + \pi/4 - \omega t) \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\Lambda} \cos m\theta,$$

$$u_r^0(r, y) = \omega(2\pi kr)^{-1/2}[2k \operatorname{ch} \gamma y - (\beta^2 + k^2) \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{ch} \beta y / (k \operatorname{ch} \beta h)],$$

$$\sigma_r^0(r,\ y) = \mu(2\pi kr)^{-1/2}[2(2\gamma^2 + k_t^2)\operatorname{ch}\gamma y - (\beta^2 + k^2)\operatorname{ch}\gamma h \operatorname{ch}\beta y / \operatorname{ch}\beta h],$$
$$u_y^0(r,\ y) = \omega(2\pi kr)^{-1/2}[2\gamma \operatorname{sh}\gamma y - (\beta^2 + k^2)\operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\beta y / (\beta \operatorname{ch}\beta h)],$$
$$\sigma_y^0(r,\ y) = \mu(2\pi kr)^{-1/2}[4k\gamma \operatorname{sh}\gamma y - (\beta^2 + k^2)^2 \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\beta y / (k\beta \operatorname{ch}\beta h)].$$

Усредняя поток энергии по времени и по толщине пластины, получим

$$W_{\text{ср}} = {}^1/_4\, h \int\limits_{-h}^{h} W_r\, dy = W_r^0(r,\ h)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} A_m{}^{\Lambda} \cos m\theta\Big)^2,$$

где $W_r^0(r,\ h) = {}^1/_4\, h \int\limits_{-h}^{h} (u_r^0\sigma_r^0 + u_y^0\sigma_y^0)\, dy$, а характеристика рассеяния по интенсивности будет $\Phi(\theta) = \Big(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos m\theta\Big)^2$, т. е. получается из соответствующей характеристики для нормальной компоненты u_y возведением в квадрат.

На фигурах 1—4 показаны полярные характеристики направленности рассеянных симметричных лэмбовских волн для трех разных радиусов круглой неровности: $R = 0{,}5h$; h; $1{,}5h$. Графики на каждой фигуре пронумерованы в порядке возрастания радиуса неровности. Значение параметра $k_t h$ равно 4, при этом существует три симметричные распространяющиеся волны — нулевая, первая и вторая, длины которых соответственно равны $1{,}51h$; $2{,}86h$; $5{,}4h$. На фигурах 1—3 даны характеристики рассеяния нулевой, первой и второй симметричных волн при симметричной нулевой падающей, а на фигуре 4 — характеристика рассеяния первой симметричной при первой падающей.

Характеристики рассеяния качественно совпадают с характеристиками рассеяния (по интенсивности) звуковой волны на жесткой сфере или цилиндре [3]. Так же, как и для звуковой волны, при малом параметре kR рассеяние преобладает навстречу падающей волне. С ростом параметра растет и доля рассеяния в сторону падающей волны и характеристика направленности приобретает сложный характер с рядом лепестков.

Из расчета следует, что при фиксированном параметре kR характеристика рассеяния зависит от моды падающей (рассеянной) волны. Однако характеристика i-й рассеянной волны при j-й падающей совпадает с характеристикой j-й рассеянной при i-й падающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Меркулов, И. П. Фирсов. Рассеяние симметричной волны Лэмба в пластине с неровными поверхностями. Дефектоскопия, 1968, 5, 22—29.
2. Л. Г. Меркулов, И. П. Фирсов. Рассеяние упругих нормальных волн в пластине с двумерным распределением поверхностных неровностей. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 110—115.
3. С. Н. Ржевкин. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию 15 декабря 1969 г.