

УДК 534.21

**ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ
В ПЛАВАЮЩЕЙ ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНЕ
И ПРИЛЕГАЮЩЕМ СЛОЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Д. Е. Хейсин

Исследовано распространение стационарных монохроматических плоских волн в упругой пластине конечной толщины, плавающей на поверхности слоя идеальной сжимаемой жидкости. При полном отражении от дна имеется счетное множество частот, для которых колебания в жидкости, а также продольные и изгибные колебания в пластине происходят независимо друг от друга. В некоторых случаях волноводное распространение упругих колебаний будет иметь место также при наличии скачка скорости звука в жидкости неограниченной глубины.

Рассмотрим плоскопараллельную бесконечную в плане изотропную твердую пластину с толщиной h и плотностью ρ_1 , плавающую на поверхности идеальной однородной сжимаемой жидкости; толщина слоя жидкости равна H , считая от нижней поверхности пластины, плотность жидкости $\rho_2 > \rho_1$. Координатная плоскость xy совмещена со срединной плоскостью невозмущенной пластины, а ось z направлена вертикально вниз. Силы тяжести не учитываются.

Исследуем стационарные колебания малой амплитуды, когда плоские волны с частотой ω и волновым числом k распространяются синфазно в жидкости и пластине в направлении оси x со скоростью $c = \omega / k$. С этой целью следует определить потенциалы φ_1 , $\bar{\psi}$ и φ_2 , являющиеся решениями волновых уравнений в пластине (см. работу [1])

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi_1; \quad \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{\psi}, \quad (1)$$

и в слое жидкости

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi_2. \quad (2)$$

Здесь c_l и c_t — скорости продольных и поперечных волн в пластине, c_0 — скорость звука в жидкости. Пусть $c_0 < c_l$. Векторный потенциал $\bar{\psi}$ кроме (1) должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \bar{\psi} = 0. \quad (3)$$

В качестве стационарных решений уравнений (1) и (2) примем следующие функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (A_1 \operatorname{sh} \kappa_1 z + A_2 \operatorname{ch} \kappa_1 z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi_x &= (A_3 \operatorname{sh} \kappa_2 z + A_4 \operatorname{ch} \kappa_2 z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi_y &= (A_5 \operatorname{sh} \kappa_2 z + A_6 \operatorname{ch} \kappa_2 z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi_z &= (A_7 \operatorname{sh} \kappa_2 z + A_8 \operatorname{ch} \kappa_2 z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_2 &= A_9 \operatorname{ch} \kappa_0 \left(z - \frac{h}{2} - H \right) e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где A_i — неизвестные амплитуды, а

$$\kappa_0^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right); \quad \kappa_1^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right); \quad \kappa_2^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_t^2}\right). \quad (5)$$

В формулах (4) функция φ_2 выбрана так, чтобы было удовлетворено условие непроницаемости дна, т. е. коэффициент отражения от дна был равен единице. Решения (4) должны удовлетворять также условию отсутствия касательных напряжений на верхней и нижней поверхностях пластины. Нормальные напряжения на верхней поверхности равны нулю, а на нижней — равны давлению в жидкости. Вертикальные компоненты скоростей частиц в пластине и в жидкости не должны иметь разрыва при $z = \pm h/2$. Кроме того, при $z = \pm h/2$ должно соблюдаться уравнение (3).

Используя эти девять граничных условий, мы получим характеристический определитель девятого порядка, который можно представить в виде произведения двух определителей четвертого и пятого порядка. Определитель четвертого порядка соответствует нормальным горизонтально поляризованным сдвиговым волнам (волны SH см. работы [2, 3]), распространение которых в упругих слоях хорошо изучено. Определитель пятого порядка после преобразований получает вид

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2i\kappa_1 \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} & 0 & 0 & -\gamma \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} & 0 \\ 0 & 2i\kappa_1 \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} & -\gamma \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} & -2i\kappa_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} & 0 & \frac{k}{2} \frac{c^2 \rho_2}{c_t^2 \rho_1} \operatorname{ch} \kappa_0 H \\ -\gamma \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} & 0 & 0 & -2i\kappa_2 \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} & \frac{k}{2} \frac{c^2 \rho_2}{c_t^2 \rho_1} \operatorname{ch} \kappa_0 H \\ \kappa_1 \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} & \kappa_1 \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} & ik \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} & ik \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} & \kappa_0 \operatorname{sh} \kappa_0 H \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\gamma = k(2 - c^2/c_t^2).$$

Характеристическое уравнение $D_1 = 0$ можно написать следующим образом:

$$P \left(Q\kappa_0 \operatorname{sh} \kappa_0 H + \delta \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} \operatorname{ch} \kappa_0 H \right) + \\ + Q \left(P\kappa_0 \operatorname{sh} \kappa_0 H + \delta \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} \operatorname{ch} \kappa_0 H \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\frac{P}{k^2} = k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)^2 \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} - 4\kappa_1 \kappa_2 \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2}, \quad (8)$$

$$\frac{Q}{k^2} = k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} - 4\kappa_1 \kappa_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2}, \quad (9)$$

$$\delta = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{c^4}{c_t^4} \kappa_1 k^4. \quad (10)$$

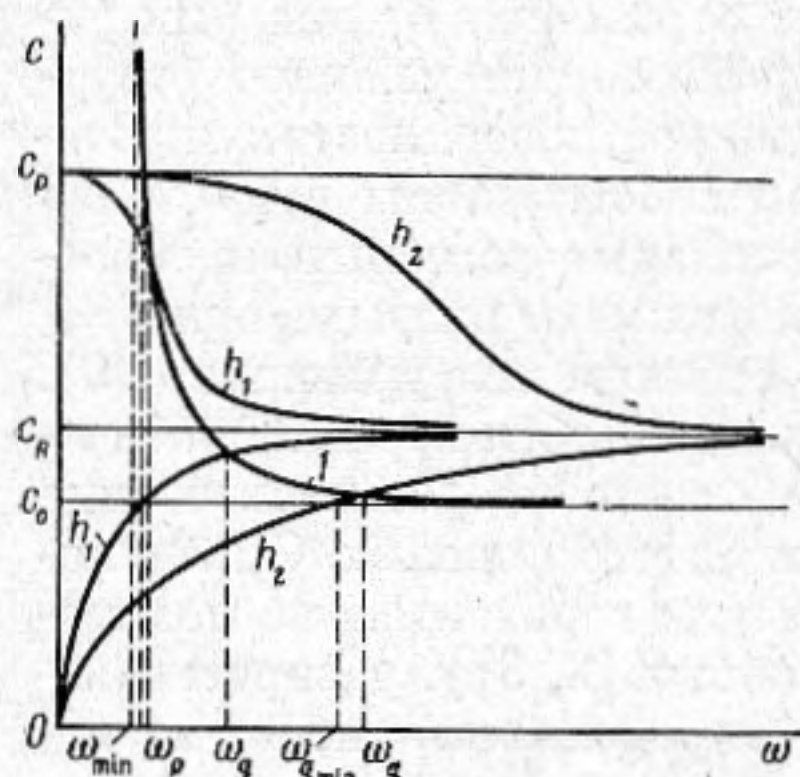
Коэффициент δ учитывает влияние жидкости. Заметим, что уравнение (7) справедливо и для несжимаемой жидкости; тогда $\kappa_0 = k$. При $H \rightarrow \infty$ это уравнение было рассмотрено Юингом и Прессом [4].

Уравнение (7) имеет по меньшей мере два действительных корня $c = c_i$ и $c = c_t$. При $h = 0$, т. е. когда твердый слой отсутствует, характеристиче-

ское уравнение принимает вид

$$\operatorname{ch} \kappa_0 H = 0. \quad (11)$$

Это уравнение имеет счетное множество действительных корней, когда κ_0 — мнимое, т. е. $c_0 < c$. В этом случае волны распространяются в слое жидкости как в волноводе с фазовой скоростью (см. [4])



Фиг. 1

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (\omega_{\min}/\omega)^2}}, \quad (12)$$

где $\omega_{\min} = \frac{c_0}{H} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$ — минимальное значение частоты распространяющихся волн.

Таким образом, без пластины слой жидкости является волноводом для всего спектра колебаний, начиная с частоты ω_{\min} . При наличии пластины волноводное распространение будет иметь место лишь для фиксированных значений частоты. В этом случае должны одновременно удовлетворяться уравнение (11) и уравнение

$P = 0$ (или $Q = 0$); уравнение (7) тогда удовлетворяется автоматически. Как известно, уравнение $P = 0$ определяет скорость продольных волн в свободной пластине, а уравнение $Q = 0$ — скорость изгибных волн

Таблица 1

Частота ω_p волноводного распространения продольных колебаний в плавающей пластине, рад/сек

$H, \text{ м}$	2	5	10	20	50	100	200
ω_{\min}	1140	456	228	114	45,6	22,8	11,4
ω_p	1250	500	250	125	50	25	12,5

(см. [5]). Последнее уравнение будет удовлетворено, если $c_0 < c_R$, где c_R — скорость волн Рэлея в пластине.

Определение частоты, при которой происходит волноводное распространение колебаний, показано на фиг. 1. Для каждой формы колебаний ($n = 1, 3, 5, \dots$) имеется две частоты ω_p и ω_q , соответствующие точкам пересечения дисперсионной кривой, определяемой уравнением (12) (кривая I), с дисперсионными кривыми фазовых скоростей продольных и изгибных волн в свободной пластине.

При $\omega = \omega_q$ колебания распространяются в слое жидкости как в волноводе, не испытывая влияния пластины, а изгибные волны распространяются в пластине без затухания, хотя их скорость превосходит скорость звука в жидкости. При $\omega = \omega_p$, наряду с колебаниями жидкости, в пластине распространяются незатухающие продольные волны.

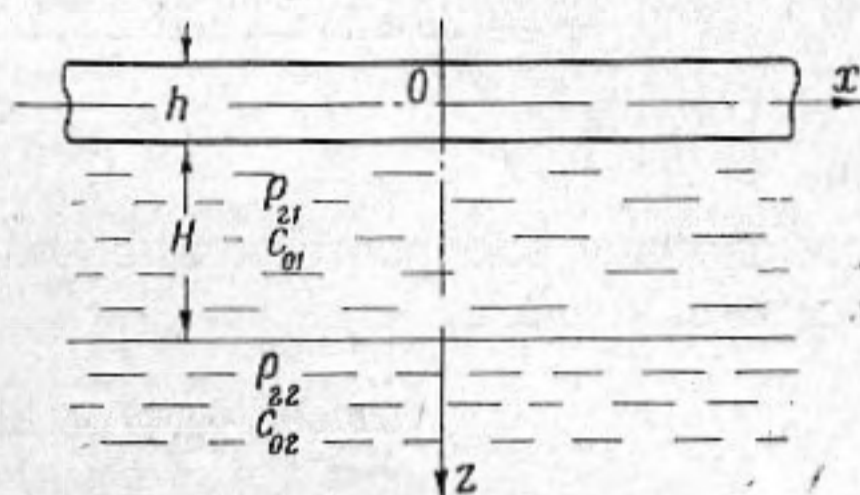
При уменьшении толщины пластины частота ω_q увеличивается, а частота ω_p убывает (см. фиг. 1, где $h_1 > h_2$). Для больших значений H величина ω_q стремится к нижнему пределу $\omega = \omega_{q \min}$, который можно определить, если в уравнении $Q = 0$ положить $c = c_0$. При $H \rightarrow \infty$ частота ω_p стремится к нулю. Для высших форм колебаний, или для малых значений H частоты ω_p и ω_q близки друг к другу.

В качестве примера на ЦВМ были вычислены частоты ω_p и ω_q для различных значений h и H при $n = 1$ (табл. 1 и 2). При расчете принято: $c_l = 4010$, $c_t = 2020$, $c_0 = 1450$, $c_p = 3490$, $c_R = 1883$ м/сек, $\rho_2 / \rho_1 = 1,00$,

коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$. Расчет показал, что величина ω_p мало зависит от толщины пластины и может быть определена из уравнения (12), полагая в последнем $c = c_p$ (см. табл. 1); здесь c_p — скорость длинных продольных волн в пластине. Значения ω_q приведены в табл. 2. Начиная с $H = 10$ м величина ω_q практически совпадает с $\omega_{q \min}$. Скорость соответственных изгибных волн в пластине незначительно превосходит скорость звука в жидкости.

Таким образом, при распространении волны в двуслойной системе, включающей твердую пластину, плавающую на поверхности слоя конечной глубины, имеется счетное множество частот, при которых колебания в жидкости, а также продольные и изгибные колебания пластины происходят независимо друг от друга.

Если глубина жидкости не ограничена, то волновое распространение звука будет наблюдаться лишь при наличии скачка скорости звука. Пусть жидкость разделяется на две зоны (см. фиг. 2). Верхний слой толщиной H примыкает к нижней поверхности пластины, а снизу граничит с однородным жидким полупространством. Плотность и скорость звука в верхней зоне положим соответственно ρ_{21} и c_{01} , в нижней — ρ_{22} и c_{02} . Решение для потенциалов φ_1 и φ следует



Фиг. 2

Таблица 2

Частота ω_q волнового распространения изгибных колебаний в плавающей пластине, рад/сек

h, м	H, м			$\omega_q \min$
	2,0	5,0	10,0	
0,5	7390	7120	7080	7070
1,0	4100	3640	3560	3536
1,5	3150	2500	2400	2360
2,0	2690	1950	1820	1770
2,5	2420	1640	1480	1420

принять в виде (4), а потенциалы φ_{21} и φ_{22} написать следующим образом:

$$\varphi_{21} = \left[A_9 \operatorname{sh} \kappa_{01} \left(z - \frac{h}{2} \right) + A_{10} \operatorname{ch} \kappa_{01} \left(z - \frac{h}{2} \right) \right] e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\varphi_{22} = A_{11} e^{-\kappa_{02} \left(z - \frac{h}{2} - H \right)} e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\text{где } \kappa_{01}^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{01}^2} \right); \quad \kappa_{02}^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{02}^2} \right).$$

На границе раздела жидкостей должны соблюдаться условия непрерывности давлений и вертикальных компонент скорости. Граничные условия на верхней и нижней поверхностях пластины сохраняются теми же, что и в предыдущей задаче. Удовлетворяя граничным условиям и исключая горизонтально поляризованные волны сдвига, мы получим в результате преобразований характеристический определитель пятого порядка, отличающийся от D_1 только последним столбцом. Этот определитель можно написать

в виде

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & \vartheta \\ x & 0 & 0 & x & \vartheta \\ x & x & x & x & -\kappa_{01} \end{vmatrix},$$

где

$$\vartheta = -\frac{k}{2} \frac{c^2}{c_t^2} \frac{\rho_{21}}{\rho_1} \frac{\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}} \operatorname{sh} \kappa_{01} H + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} \operatorname{ch} \kappa_{01} H}{\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}} \operatorname{ch} \kappa_{01} H + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} \operatorname{sh} \kappa_{01} H}.$$

Волноводное распространение колебаний в жидкости и пластине будет иметь место, когда

$$\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}} \operatorname{sh} \kappa_{01} H + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} \operatorname{ch} \kappa_{01} H = 0, \quad (13)$$

а также либо $P = 0$, либо $Q = 0$.

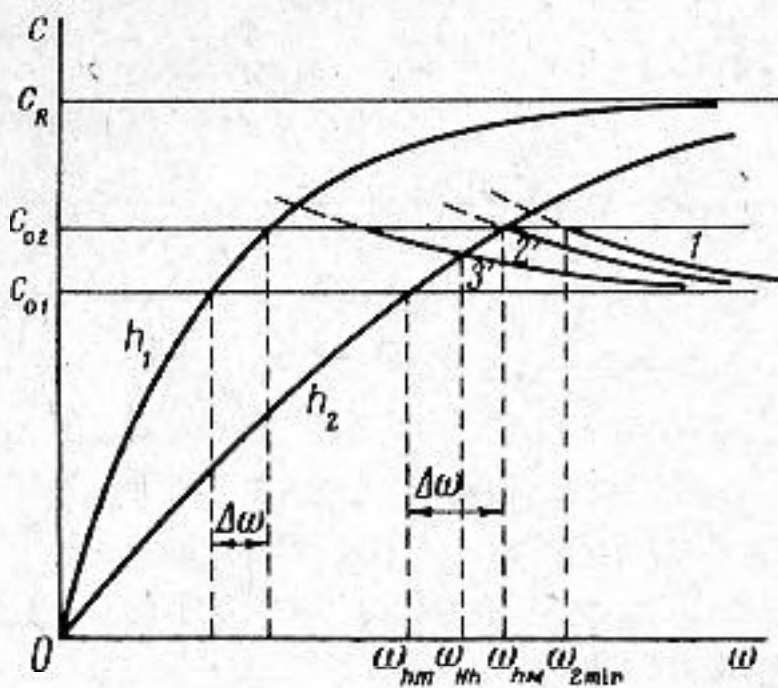
Уравнение (13) имеет действительные корни, если κ_{02} — действительная величина, а κ_{01} — мнимая. Тогда фазовая скорость распространяющихся волн должна удовлетворять обычному неравенству:

$$c_{01} < c < c_{02}. \quad (14)$$

Если $c_{02} < c_R$, то решения уравнения $P = 0$ не удовлетворяют условию (14), так что следует принимать лишь одно уравнение $Q = 0$. В этом случае фазовые скорости и частоты волн, распространяющихся в пластине и слое жидкости как в волноводе, определяются из системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}^*} \sin \kappa_{01}^* H + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} \cos \kappa_{01}^* H &= 0, \\ k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa_2 h}{2} - 4\kappa_1 \kappa_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa_2 h}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\kappa_{01}^* = -i\kappa_{01}$. Так как $c_R > c_{02}$, то существуют диапазоны частот, для которых система (15) не имеет действительных решений. Верхнюю границу для частоты ω_{hm} можно определить из уравнения $Q = 0$, полагая $c = c_{02}$ (см. фиг. 3). Для больших частот решения этого уравнения не будут удовлетворять условию (14). Нижняя граница для частоты ω_{hm} определяется из уравнения $Q = 0$ при $c = c_{01}$. Волны меньшей частоты движутся со скоростью $c < c_{01}$, т. е. в жидкости нет распространяющихся нормальных волн. Как видно из фиг. 3, ширина полосы частот $\Delta\omega$ увеличивается при уменьшении толщины пластины.



Фиг. 3

Данная фигура отвечает случаю $h_1 > h_2$.

Первое из уравнений (15) можно разрешить относительно частоты ω и написать в виде (см. работу [1])

$$\frac{\omega H}{c_{01}} = \frac{n\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\rho_{22} c_{02}}{\rho_{21} c_{01}} \sqrt{\frac{c^2 - c_{01}^2}{c_{02}^2 - c^2}} \right)}{\sqrt{1 - c_{01}^2/c^2}},$$

где n — номер нормальной волны (формы колебаний). При $c \rightarrow c_{01}$ имеем $\omega \rightarrow \infty$. Если $c = c_{02}$, то частота определится по формуле

$$\omega_2 = \frac{c_{01}}{H} \frac{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{1 - (c_{01}/c_{02})^2}}.$$

Минимальное значение частоты $\omega_2 = \omega_{2 \min}$ будет при первой форме колебаний ($n = 1$). Волны меньшей частоты не распространяются в слое жидкости как в волноводе, поскольку их фазовая скорость вдоль слоя превосходит c_{02} .

Таблица 3

Определение ширины полосы частот волноводного распространения при отражении от слоя скачка

$h, \text{ м}$	$c_{01} = 1450 \text{ м/сек}$		$c_{02} = 1500 \text{ м/сек}$		$\Delta\omega, \text{ рад/сек}$	$\Delta f, \text{ гц}$	$H_{\min}, \text{ м}$
	ω_{hm}	f_{hm}	ω_{hM}	f_{hM}			
0,5	7070	1125	8020	1277	950	152	1,11
1,0	3536	563	4010	638	470	75	2,22
1,5	2360	376	2680	427	340	51	3,32
2,0	1770	282	2005	319	235	37	4,45
2,5	1420	226	1610	256	190	30	5,54

Таким образом, при заданных значениях толщины пластины h и толщины слоя жидкости H следует рассмотреть два возможных случая. В первом случае, соответствующем кривой 1 фиг. 3, $\omega_{2 \min} > \omega_{hM}$, и волноводного распространения колебаний не может быть. Во втором случае (кривые 2 и 3) $\omega_{2 \min} \leq \omega_{hM}$, так что имеется значение частоты $\omega = \omega_{hM}$, при которой будет иметь место волноводное распространение колебаний. Если $\omega_2 < \omega_{hM}$ до некоторого номера n , то имеется n частот, при которых происходит волноводное распространение колебаний.

Для заданной толщины пластины h можно определить минимальную толщину слоя жидкости H_{\min} , при которой возможно волноводное распространение. С этой целью из уравнения $Q(c_{02}) = 0$ нужно вычислить значение ω_{hM} , а затем определить H_{\min} по формуле

$$H_{\min} = \frac{c_{01}}{\omega_{hM}} \frac{\pi}{2\sqrt{1 - c_{01}^2/c_{02}^2}}.$$

Для распространения второй формы ($n = 2$) необходима толщина $H = 3H_{\min}$; при $n = 3$ нужно иметь $H = 5H_{\min}$ и т. д. Значения ω_{hm} , ω_{hM} и H_{\min} , а также величина ширины полосы частот, вычисленные с помощью ЦВМ, приведены в табл. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. К. Е. Буллен. Введение в теоретическую сейсмологию. М., «Мир», 1966.
3. Т. Микер, А. Мейтцлер. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Сб. «Физ. акустика», 1, ч. А, М., «Мир», 1966.
4. F. Press, M. Ewing. Propagation of elastic waves in a floating ice sheet. Trans. Amer. Geophys. Union., 1951, 32, 5, 673—678.
5. H. Lamb. On waves in an elastic plate. Proc. Roy. Soc. (A), 1917, 93, 114—128.

Арктический и антарктический н.-и.
институт
Ленинград

Поступила в редакцию
15 сентября 1968 г.