АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 1

УДК 534.133

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СХЕМА РАДИАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ДИСКА

В. Н. Лазуткин, А. И. Михайлов

На основе электромеханических уравнений состояния и уравнения колебаний составлена многоконтурная эквивалентная схема пьезокерамического диска; получены удобные выражения для определения электромеханического коэффициента связи.

Описание пьезоэлектрических преобразователей и резонаторов с помощью эквивалентных электрических схем является эффективным способом решения большинства практических задач. В настоящее время такие схемы получены для ряда резонаторов простейшей геометрии, причем при рассмотрении поведения резонатора в широкой полосе частот используются многоконтурные эквивалентные схемы. Ниже описывается многоконтурная эквивалентная схема тонкого пьезокерамического диска на радиальной моде колебаний. Полученная схема отличается от многоконтурной эквивалентной схемы стержневых резонаторов [1, 2]. Эти отличия необходимо учитывать при составлении эквивалентных схем преобразователей, собственные частоты которых не образуют гармонического ряда.

Для составления эквивалентной схемы воспользуемся соотношениями, полученными Мэзоном для радиальных колебаний диска [3]. Анализ этих соотношений показывает, что пьезокерамический диск соответствует некоторому четырехполюснику, описываемому следующими уравнениями:

$$F_a = \left\{ \frac{Z_0 \left[J_0(ka) - \frac{1-\sigma}{ka} J_1(ka) \right]}{jJ_1(ka)} + N^2 Z_э \right\} v_a + N Z_э I, \tag{1}$$

$$U = Z_э N v_a + Z_э I. \tag{2}$$

Здесь F_a и v_a — сила и колебательная скорость поверхности радиуса a; U, I — напряжение и ток; механическое характеристическое сопротивление $Z_0 = \rho c S = \rho [1 / \rho s_{11}^E (1-\sigma^2)]^{1/2} 2\pi a d$, электрическое сопротивление $Z_э = (j\omega C_0)^{-1}$, где C_0 — емкость радиально зажатого пьезоэлемента; коэффициент электромеханической трансформации $N = 2\pi a d_{31}(1-\sigma) / s_{11}^E$, где d_{31} — пьезомодуль; коэффициент Пуассона связан с элементами матрицы упругих податливостей соотношением $\sigma = -s_{12}^E / s_{11}^E$, J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода.

Уравнениям четырехполюсника (1), (2) соответствует эквивалентная электрическая схема фиг. 1, *а*. Механический импеданц определяется из выражения:

$$Z_м = \frac{Z_0 [kaJ_0(ka) - (1-\sigma) J_1(ka)]}{jkaJ_1(ka)}.$$

При отсутствии нагрузки ($F_a = 0$) получим эквивалентную схему (фиг. 1, *б*), проводимость которой определяется выражением:

$$Y = j\omega C_0 \left[1 + \frac{K_p^2}{1-K_p^2} \frac{(1+\sigma) J_1(ka)}{kaJ_0(ka) - (1-\sigma) J_1(ka)} \right] \tag{3}$$

где K_p — радиальный (плоскостной) коэффициент связи. Для составления многоконтурной эквивалентной схемы преобразуем это выражение к виду:

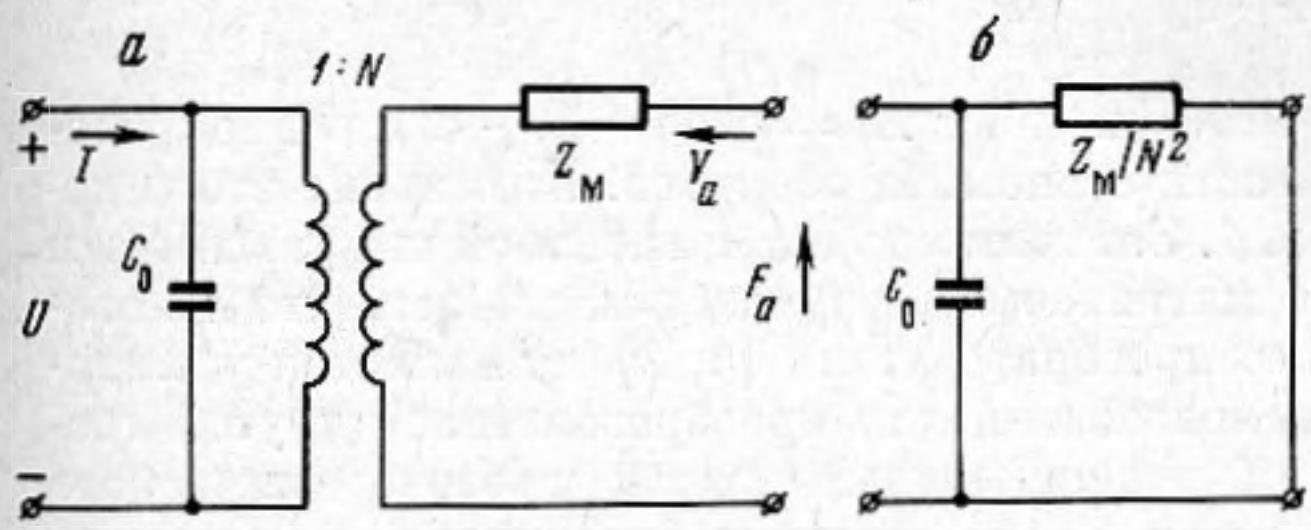
$$Y = j\omega C_0 + j\frac{K_p^2 C_0 c}{(1-K_p^2)a}\frac{(1+\sigma)kaJ_1(ka)}{kaJ_0(ka)-(1-\sigma)J_1(ka)} \tag{4}$$

и напишем разложение функции

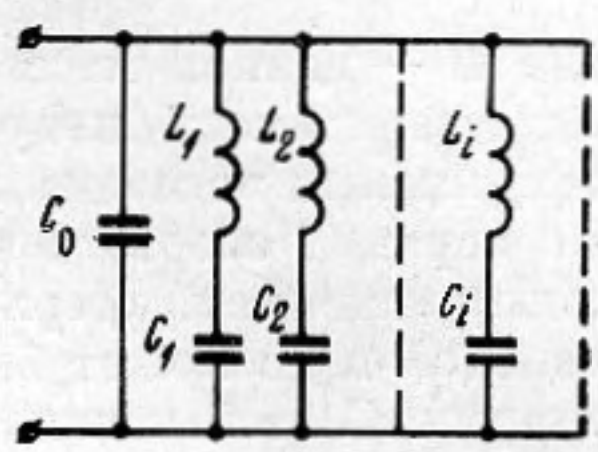
$$f(ka) = \frac{(1+\sigma)J_1(ka)ka}{kaJ_0(ka)-(1-\sigma)J_1(ka)} \tag{5}$$

на простейшие дроби по формуле: $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\left(\frac{1}{x-P_i}+\frac{1}{P_i}\right)$,

где $f(x)$ — мероморфная функция, P_i — простые полюса функции $f(x)$, b_i — вычеты в этих полюсах. Полюса функции (5) соответствуют корням



Фиг. 1



Фиг. 2

частотного уравнения $kaJ_0(ka)-(1-\sigma)J_1(ka) = 0$ и могут быть выражены через резонансные частоты: $P_i = k_i a = \omega_{p_i} a / c$. После преобразований получим

$$f(ka) = \frac{2c(1+\sigma)}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P_i^2\omega}{(P_i^2-1+\sigma^2)(\omega_{p_i}^2-\omega^2)}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) можно написать в виде

$$Y = j\omega C_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{j\omega}{\omega_{p_i}^2-\omega^2}\frac{K_p^2c^2C_0 2(1+\sigma)P_i^2}{(1-K_p^2)a^2(P_i^2-1+\sigma^2)}\right]. \tag{7}$$

Из теории цепей известно, что такому виду проводимости соответствует эквивалентная схема, представленная на фиг. 2, параметры которой определяются соотношениями:

$$L_i = \frac{(1-K_p^2)(P_i^2-1+\sigma^2)a^2}{2K_p^2(1+\sigma)c^2C_0}, \tag{8}$$

$$C_i = \frac{K_p^2}{1-K_p^2}C_0\frac{2(1+\sigma)}{P_i^2-1+\sigma^2}. \tag{9}$$

С учетом приведенных выше обозначений выражение для проводимости (7) можно переписать в более компактном виде:

$$Y = j\omega C_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{j\omega}{(\omega_{p_i}^2-\omega^2)L_i}. \tag{10}$$

Таблица 1

Значения коэффициента A_i при $\sigma = 0{,}27$

i	1	2	3	4	5	∞
A_i	0,775	0,968	0,987	0,993	0,996	1,000

Полученная схема отличается от многоконтурной эквивалентной схемы пьезоэлектрического стержня [1, 2] зависимостью эквивалентной индуктивности L_i от порядка обертона.

Если записать индуктивность i-й цепочки в виде

$$L_i = \frac{(1-K_p^2)a^2}{2K_p^2c^2C_0(1+\sigma)}\frac{P_i^2-1+\sigma^2}{P_i^2} = L\ A_i = \frac{M}{N^2}A_i, \qquad (11)$$

где M — полная масса, то коэффициент $A_i = (P_i^2 - 1 + \sigma^2)\,/\,P_i^2$ определяет зависимость индуктивности от номера обертона. Изменение этого коэффициента показано в табл. 1. Зависимость эквивалентной индуктивности от порядка обертона в рассматриваемом случае показывает, что многоконтурная схема стержневого преобразователя [1, 2] не является универсальной и не может быть использована для преобразователей другой геометрии. С этой точки зрения эквивалентные схемы пьезокерамического диска, использованные в работах [2, 4], должны быть уточнены.

Изменения в эквивалентной схеме пьезокерамического диска требуют также уточнения выражений для определения коэффициента электромеханической связи, полученных в работах [2, 4]. Воспользуемся определением статического коэффициента связи в форме

$$K_p^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i}{C_0 + \sum\limits_{i=1} C_i}. \qquad (12)$$

Условия резонанса и антирезонанса в эквивалентной схеме фиг. 2 будут

$$L_iC_i = \frac{1}{\omega_{p_i}^2}, \qquad (13)$$

$$C_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[(\omega_{p_i}^2 - \omega_{a_j}^2)L_i\right]^{-1} = 0, \qquad (14)$$

где ω_{a_j} — любая антирезонансная частота (в дальнейшем примем $j = 1$). Совместное решение уравнений (12) — (14) дает

$$K_p^2 = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(f_{p_i}^2A_j)^{-1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[f_{p_i}^2A_i\left(1-\frac{f_{p_i}^2}{f_{a_1}^2}\right)\right]^{-1}}. \qquad (15)$$

Таблица 2

Расчет K_p по соотношению	Количество членов ряда						
	1	2	3	4	5	6	∞
(17)	0,5420	0,5437	0,5439	0,5440	—	—	0,5440
(20)	0,4827	0,5196	0,5320	0,5394	0,5431	0,5458	0,5613

Выражение (15) может быть представлено в более удобной форме при использовании соотношений $f_{p_i} = P_i c / 2\pi a$ и $P_i / P_1 = f_{p_i} / f_{p_1}$. После преобразований получим

$$K_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (P_i - 1 + \sigma^2)^{-1}}{\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (P_i^2 - 1 + \sigma^2) \left[1 - \left(\frac{f_{p_1} P_i}{f_{a_1} P_1} \right)^2 \right] \right\}^{-1}}. \qquad (16)$$

Можно показать, что сумма в числителе равна $[2(1+\sigma)]^{-1}$. Тогда выражение (16) сводится к следующему:

$$K_p^2 = \left\{ 2(1+\sigma) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(P_i^2 - 1 + \sigma^2) \left[1 - \left(\frac{f_{p_1}}{f_{a_1}} \frac{P_i}{P_1} \right)^2 \right]} \right\}^{-1} \qquad (17)$$

Члены ряда в знаменателе быстро убывают по величине. Если ограничиться первым членом ряда ($i = 1$), то выражение для коэффициента связи получим в виде

$$K_p^2 = \frac{P_1^2 - 1 + \sigma^2}{2(1+\sigma)} \left(\frac{f_{a_1}^2 - f_{p_1}^2}{f_{a_1}^2} \right). \qquad (18)$$

Оценку точности соотношений (17), (18) можно провести при сравнении с точным выражением для коэффициента связи, которое может быть получено непосредственно из выражения (3)

$$\frac{K_p^2}{1 - K_p^2} = \frac{(1-\sigma) J_1 \left[P_1 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_p} \right) \right] - P_1 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_p} \right) J_0 \left[P_1 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_p} \right) \right]}{(1+\sigma) J_1 \left[P_1 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_p} \right) \right]}, \qquad (19)$$

где $\Delta f = f_a - f_p$.

Для сравнения величину коэффициента связи можно также определить с помощью выражения, полученного из анализа эквивалентной схемы с $L_i = \text{const}$ [2]

$$K_p^2 = \frac{\sum_{i=1} (1/f_{p_i}^2)}{\sum_{i=1} [f_{p_i}^2 (1 - f_{p_i}^2 / f_{a_1}^2)]^{-1}}. \qquad (20)$$

В табл. 2 проведено сравнение величин коэффициента связи, определенных из выражений (17) и (20) при $\sigma = 0{,}27$ и $\Delta f / f_p = 0{,}142$. Соответствующее точное значение K_p, вычисленное из выражения (19) при $\sigma = 0{,}27$ и $\Delta f / f_p = 0{,}142$, составляет 0,544, т. е. совпадает с предельным значением, вычисленным с помощью выражения (17), а не (20). Полученное выше уточнение эквивалентной схемы существенно сказывается при расчете проводимости пьезоэлектрического диска в диапазоне частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Marutake. Approximate method of calculating electromechanical coupling factor. Proc. IRE, 1961, 49, 5, 967.
2. A. Mahammed. Expression for the electromechanical coupling factor in terms of critical frequencies. J. Acoust. Soc. America, 1966, 39, 2, 289—293.
3. У. Мэзон. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М. ИЛ, 1952.
4. D. S. Campbell, A. M. McSwan. The coupling factor of piezoelectric ceramic disks. Brit. J. Appl. Phys., 1961, 12, 4, 188.

Москва

Поступила в редакцию
25 июня 1970 г.