АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 3

УДК 534.26

# ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТОГО СЛОЕМ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКОГО МАТЕРИАЛА

*И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. И. Маяцкий*

Рассмотрено строгое решение задачи излучения звука бесконечным круговым цилиндрическим преобразователем, часть поверхности которого покрыта слоем акустически мягкого материала произвольной толщины, а на остальной части задана колебательная скорость. Решение основывается на применении метода собственных функций. Приведено сравнение расчетной диаграммы направленности с полученной экспериментально.

Дадим строгое решение задачи об излучении звука бесконечным круговым цилиндрическим преобразователем, часть поверхности которого, ограниченная двумя образующими, покрыта слоем акустически мягкого материала произвольной толщины.

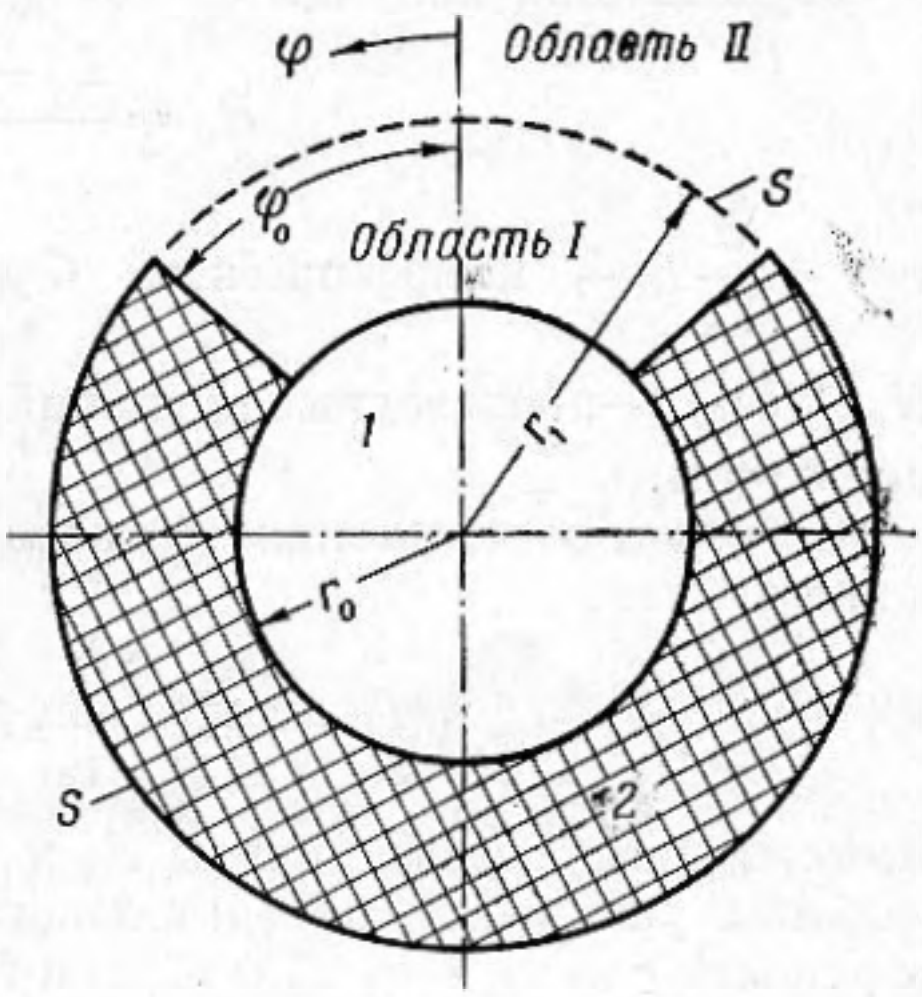
На фиг. 1 изображено нормальное сечение цилиндрического преобразователя *1* радиуса $r_0$, часть поверхности которого покрыта слоем акустически мягкого материала *2* толщиной $r_1 - r_0$. На открытой части поверхности цилиндра задано произвольное распределение нормальной составляющей колебательной скорости. Такие граничные условия можно представить в следующем виде:

$$\Phi = 0 \Big|_{\substack{r=r_1 \\ \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant -\varphi_0}}, \qquad (1)$$

$$\Phi = 0 \Big|_{\substack{r_0 \leqslant r \leqslant r_1 \\ \varphi = \pm\varphi_0}}, \qquad (2)$$

$$V = V_0 f(\varphi) \Big|_{\substack{r=r_0 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}}, \qquad (3)$$

где $\Phi$ — потенциал скорости, $V$ — нормальная составляющая колебательной скорости.




Фиг. 1

Колебательная скорость может быть представлена суперпозицией симметричного и антисимметричного распределения относительно угла $\varphi$.

С целью упрощения выкладок ограничимся рассмотрением случая симметричного распределения. Временну́ю зависимость выберем в форме $\exp(j\omega t)$. После излучения преобразователя будем искать в виде решения двух задач, которые в некоторых смежных областях могут быть точно решены по методу собственных функций [1]. В соответствии с этим, всю область существования поля разобьем на две области: внутреннюю (область *1*), определенную в ин-

тервалах $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$; $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ и внешнюю (область *2*), определенную в интервалах $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$; $r_1 \leqslant r < \infty$. Цилиндрическая поверхность $S$ радиуса $r_1$ есть граница раздела указанных областей.

Решение в областях *1* и *2* представим в следующем виде

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \sum_{q}^{\infty} [A_q I_{m_q}(kr) + B_q N_{m_q}(kr)] \cos[m_q \varphi], \tag{4}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}} = \sum_{p}^{\infty} C_p H_p^{(2)}(kr) \cos(p\varphi), \tag{5}$$

где $m_q = (q + {}^1/_2)\dfrac{\pi}{\varphi_0}$ $\quad q = 0, 1, 2, \ldots,$ $\quad p = 0, 1, 2, \ldots, I_{m_q}(kr)$, $N_{m_q}(kr)$, $H_p^{(2)}(kr)$ — функции Бесселя, Неймана и Ханкеля 2-го рода, $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda$ — длина волны, $A_q$, $B_q$, $C_p$ — комплексные амплитудные коэффициенты. Решение для внутренней области содержит две произвольные функции на поверхностях $r = r_0$, $r = r_1$, представленные в виде рядов Фурье с неопределенными коэффициентами. Решение для внешней области удовлетворяет условию Зоммерфельда и обладает достаточной степенью функционального произвола для удовлетворения произвольных граничных условий на поверхности $r = r_1$. Эти свойства потенциалов скоростей $\Phi_{\mathrm{I}}$ и $\Phi_{\mathrm{II}}$ создают предпосылки к тому, чтобы надлежащим выбором содержащихся в них произвольных постоянных выполнить все граничные условия (1), (2) и (3).

Условие (3) позволяет выразить коэффициенты $B_q$ через $A_q$ с помощью условия

$$-k\frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}{\partial (kr)} = V_0 f(\varphi) \Bigg|_{\substack{r=r_0 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}}$$

и свойства ортогональности функций $\cos[m_q\varphi]$. Опуская промежуточные преобразования, получим

$$B_q = \frac{L_q - A_q I'_{m_q}(kr_0)}{N'_{m_q}(kr_0)}, \tag{6}$$

где $= \dfrac{k}{V_0} L_q$ — коэффициенты Фурье-распределения, $V_0 f(\varphi)$, $I'_{m_q}(kr_0)$, $N_{m_q}'(kr_0)$ — производные функций Бесселя и Неймана по аргументу $kr$ при $r = r_0$.

С учетом соотношения (6) поле во внутренней области (4) приводится к виду

$$\Phi_1 = \sum_{q}^{\infty} \left\{ A_q \left[ I_{m_q}(kr) - \frac{I'_{m_q}(kr_0)}{N'_{m_q}(kr_0)} N_{m_q}(kr) \right] + L_q \frac{N_{m_q}(kr)}{N'_{m_q}(kr_0)} \right\} \cos[m_q\varphi]. \tag{7}$$

Амплитудные коэффициенты $A_q$ и $C_p$ определим из следующих функциональных уравнений, объединяющих условия непрерывности поля на поверхности $r = r_1$, $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ и граничное условие (1)

$$\Phi_{\mathrm{II}} = \begin{cases} 0; & r = r; \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant -\varphi_0; \\ \Phi_{\mathrm{I}}; & r = r_1; \quad -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{II}}}{\partial (kr)} = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}{\partial (kr)}; \quad -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0; \quad r = r_1. \tag{9}$$

Алгебраизация условий (8) и (9), основанная на свойствах полноты и ортогональности систем функций $\cos(p\varphi)$ на интервале $-\pi, \pi$ и

$\cos[m_q\varphi]$ на интервале $-\varphi_0$, $\varphi_0$ соответственно, приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left|\begin{aligned} & C_p^* \frac{H_p^{(2)}(kr_1)}{H_p'^{2}(kr_1)} - \frac{1}{\pi}\sum_q^\infty A_q^* N_{pq} = \frac{1}{\pi}\sum_q^\infty L_q \frac{N_{m_q}(kr_1)}{N'_{m_q}(kr_0)} N_{pq}; \\ & A_q^* \frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{1}{\varphi_0}\sum_p^\infty C_p^* N_{pq} = -L_q \frac{N'_{m_q}(kr_1)}{N'_{m_q}(kr_0)}. \end{aligned}\right. \quad (10)$$

В системе (10) приняты обозначения:

$$C_p^* = C_p H_p'^{(2)}(kr_1), \quad A_q^* = A_q\Delta, \quad N_{pq} = \frac{2(-1)^{q+1} m_q}{p^2 - m_q^2}\cos(p\varphi_0),$$

$$\Delta = I_{m_q}(kr_1) - \frac{I'_{m_q}(kr_0)}{N'_{m_q}(kr_0)} N_{m_q}(kr_1),$$

$$\Delta' = I'_{m_q}(kr_1) - \frac{I'_{m_q}(kr_0)}{N'_{m_q}(kr_0)} N'_{m_q}(kr_1),$$

где $I_{m_q}'(kr_1)$, $N_{m_q}'(kr_1)$, $H_p'^{(2)}(kr_1)$ — производные функций Бесселя, Неймана и Ханкеля 2-го рода по аргументу $kr$ при $r = r_1$.

Исследуем полученную систему (10) на квазирегулярность [2]. При этом допустимо произвести замену коэффициентов при неизвестных $C_p^*$, $A_q^*$ и правых частей системы (10) их асимптотическими представлениями при больших значениях индексов $p$ и $q$. Используя такие представления [3], систему (10) нетрудно привести к виду:

$$C_p^{**} = \frac{2p\cos^2(p\varphi_0)}{\pi}\sum_q^\infty A_p^{**}\frac{1}{p^2 - m_q^2} +$$

$$+ \frac{2p\cos^2(p\varphi_0)}{\pi\cdot kr_1}\sum_q^\infty \frac{(-1)^{q+1} m_q}{p^2 - m_q^2}\cdot\frac{N_{m_q}(kr_1)}{N'_{m_q}(kr_0)}\cdot L_q, \quad (11)$$

$$A_q^{**} = \frac{2m_q}{\varphi_0}\sum_p^\infty C_p^{**}\frac{1}{p^2 - m_q^2} - (-1)^{q+1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{m_q+1} L_q,$$

где

$$A_q^{**} = A_q^*(-1)^{q+1}\frac{m_q}{kr_1},$$

$$C_p^{**} = C_p^*\cos(p\,\varphi_0).$$

Поскольку коэффициенты $\frac{1}{p^2 - m_q^2}$ изменяют знак в каждой строке системы (11), дальнейший анализ последней затруднителен. В связи с этим поступим следующим образом. Исключим неизвестное $A_q^{**}$ и преобразуем систему (11) к следующему виду:

$$C_p^{**} = \frac{4p\cos^2(p\varphi_0)}{\pi\cdot\varphi_0}\sum_n^\infty C_n^{**}\cdot a_{np} + b_p, \quad (12)$$

где

$$a_{np} = \sum_q^\infty \frac{m_q}{(n^2 - m_q^2)(p^2 - m_q^2)},$$

$$b_p = \frac{2\cdot p\cdot\cos^2(p\varphi_0)}{\pi\cdot kr_1}\cdot\sum_q^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}\cdot L_q}{(p^2-m_q^2)}\left[m_q\frac{N_{m_q}(kr_1)}{N'_{m_q}(kr_0)}-kr_1\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{m_q+1}\right],$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Используя представление сумме бесконечных рядов в конечной форме по методу А. Вилона [4], находим, что для наиболее неблагоприятного случая, когда $\varphi_0 = \pi$, коэффициенты $a_{np}$ имеют значение

$$a_{np} = \frac{1}{p^2-n^2}\left[\psi(^1/_2+p)-\psi(^1/_2+n)\right]; \tag{13}$$

здесь $\psi(^1/_2+p)$, $\psi(^1/_2+n)$ — пси-функции. Свойства пси-функций дают возможность установить важную особенность коэффициентов $a_{np}$, а именно, постоянство их знака. Это обстоятельство существенно упрощает вычисление суммы модулей коэффициентов $a_{np}$ в системе (12).

Имея в виду исследование квазирегулярности системы (12), для $a_{np}$ можно принять следующее асимптотическое выражение

$$a_{np} = \frac{\ln p/n}{p^2-n^2}-\frac{B_2}{4n^2p^2}, \tag{14}$$

дающее значение их с точностью до величины $\sim\frac{1}{p^4}$ в сравнении с единицей [3]. Здесь $B_2$ — число Бернулли.

С учетом выражения (14) для исследования квазирегулярности системы (12) имеем следующую оценку

$$F_p = \frac{4p}{\pi^2}\sum_{n=N}^{\infty}a_{np} \leqslant \frac{4p}{\pi^2}\sum_{n=N}^{\infty}\left[\frac{\ln p/n}{p^2-n^2}-\frac{B_2}{4n^2p^2}\right]+O\left(\frac{1}{p^4}\right), \tag{15}$$

где $N$ — значение индекса функции Ханкеля в (10), начиная с которого допустима замена этих функций их асимптотическими выражениями.

При больших $p$ значение ряда в формуле (15) можно найти с помощью методов суммирования, развитых в работе [5], и получить оценку

$$F_p \leqslant 1-\frac{1}{36p}.$$

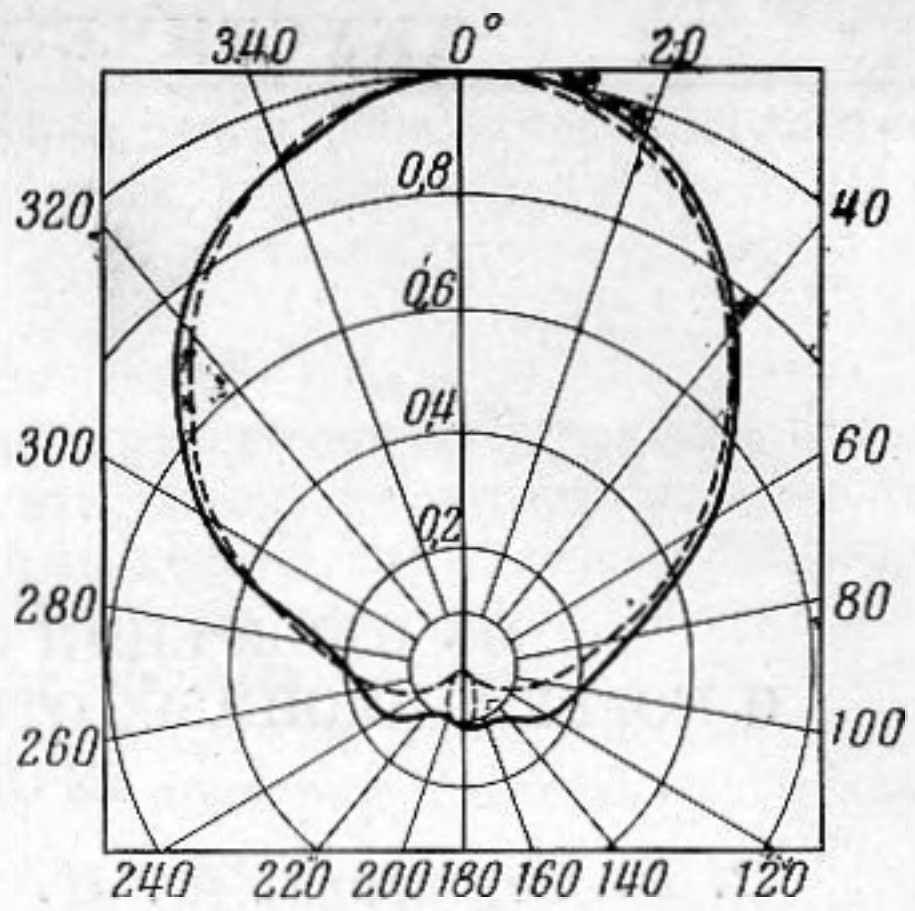
Последнее соотношение свидетельствует о квазирегулярности системы (12), что с учетом характера поведения свободных членов служит основой использования метода редукции при отыскании ее решения.

Число неизвестных, которое необходимо удержать при замене системы (10) конечной системой, зависит от волновых размеров преобразователя и характера поставленной задачи, т. е. от того, в какой зоне мы интересуемся полем.

В данной работе речь будет идти лишь о характеристиках дальнего поля. Естественно предположить, что главные значения имеют первые коэффициенты $C_p^*$. Количественная оценка эффективности такого предположения может быть получена при рассмотрении конкретных случаев геометрии преобразователя и функции распределения скорости в условии (3).

В качестве примера приведем результаты расчета диаграммы направленности преобразователя, имеющего следующие характеристики: $r_0 = 0{,}5\,\lambda$; $r_1 = 0{,}68\,\lambda$; $\varphi_0 = \pi/2$; $V = V_0 = \text{const}$. При этом в системе (10) было удержано по 4 коэффициента $C_p^*$; $A_q^*$. Сравнение расчетной диаг-

граммы направленности (штриховая кривая, фиг. 2) с экспериментальной (сплошная кривая) показывает их хорошее совпадение, что подтверждает высказанное выше предположение.




Фиг. 2

В заключение отметим, что рассмотренный преобразователь представляет интерес для практики, так как, варьируя толщину слоя и угол экранировки поверхности преобразователя, можно простым путем эффективно изменять направленность преобразователя.

Особый интерес представляет случай, когда толщина слоя становится сравнимой с длиной волны и рассматриваемый преобразователь приобретает свойства рупорной антенны. Однако в этом случае, как показывают расчеты и эксперименты, необходимо увеличить количество привлекаемых к рассмотрению неизвестных в системе (10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II. М., ИЛ, 1958.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., Гос. изд-во техн.-теоретич. лит., 1949.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
4. К. Д. Ж. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике. М., Гос. изд-во техн.-теоретич. лит., 1956.
5. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, т. 1. М., Гостехиздат, 1965.

г. Киев

Поступила в редакцию
30 марта 1971 г.