

УДК 534.8.081.7

ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ
ПО РАЗМЕРАМ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Э. М. Агрест, Г. Н. Кузнецов

Рассматривается поступательное движение под действием градиента давления некоторого множества пульсирующих пузырьков различных размеров, равномерно распределенных по пространству в начальный момент времени. Задача решается для одномерного случая. Определяется изменение функции распределения пузырьков по размерам в зависимости от времени и координат пространства.

Получено линейное дифференциальное уравнение в частных производных, определяющее изменение функции распределения пузырьков при известных начальных и граничных условиях. Найдено решение для периодического поля давления в плоской, цилиндрической и сферической стоячих волнах. Численно и аналитически исследуется изменение во времени функции распределения пузырьков по пространству и по размерам. Показано, что концентрация пузырьков в пучности давления быстро увеличивается, причем прежде всего возрастает число наиболее крупных пузырьков.

Присутствие газовых пузырьков в жидкости влияет на протекание различных процессов, вызванных излучением в жидкость мощного ультразвука. В силу этого становятся важными сведения о распределении пузырьков по размерам в жидкости [1—5]. Известно [3], что концентрация и распределение пузырьков могут существенно изменяться во времени, например при всплытии пузырьков. Ниже проведен теоретический анализ изменения функции распределения пузырьков по размерам и по пространству в результате взаимодействия пузырьков с периодически изменяющимся по величине и по направлению градиентом давления.

Рассмотрим одномерное движение пузырьков. Пусть скорость u пузырька есть известная функция координаты и радиуса пузырька R , не зависящая от времени t , т. е. $u = u(r, R)$. Радиус пузырька определяется значением $R = R_0$ при $r = r_0$ и текущей координатой r и также не зависит явно от времени, т. е. $R = R(R_0, r)$. Взаимодействием пузырьков мы будем пренебрегать.

Обозначим через $N(R, r, t) \Delta R$ — число пузырьков, радиусы которых лежат в пределах от R до $R + \Delta R$, в единице объема в окрестности точки r в момент времени t .

Рассмотрим элементарный объем, заключенный между поверхностями $S(r)$ и $S(r + \Delta r)$. $S(r) = \text{const } r^v$, где $v = 0; 1; 2$ соответствуют плоской, цилиндрической и сферической симметрии задачи.

Поскольку радиус пузырьков $R(R_0, r)$ может изменяться по мере продвижения вдоль r , то для получения закона сохранения числа пузырьков в указанном элементарном объеме будем рассматривать те пузырьки, которые в точке $r = r_0$ имели бы радиус в интервале от R_0 до $R_0 + \Delta R_0$. В произвольной точке r интервал радиусов рассматриваемых пузырьков определяется соотношением

$\Delta R = \frac{\partial R(R_0, r)}{\partial R_0} \Delta R_0$. Через поверхность $S(r)$ за вре-

мя Δt в рассматриваемый объем попадает

$$(1) \quad u(r, R(R_0, r)) N(R(R_0, r), r, t) \frac{\partial R(R_0, r)}{\partial R_0} \Delta R_0 S(r) \Delta t$$

указанных выше пузырьков. Через поверхность $S(r+\Delta r)$ вытечет

$$(2) \quad u(r+\Delta r, R(R_0, r+\Delta r)) N(R(R_0, r+\Delta r), r+\Delta r, t) \frac{\partial R(R_0, r+\Delta r)}{\partial R_0} \Delta R_0 S(r+\Delta r) \Delta t.$$

В момент времени t в указанном объеме находилось

$$(3) \quad N(R(R_0, r), r, t) \frac{\partial R(R_0, r)}{\partial R_0} \Delta R_0 S(r) \Delta r$$

пузырьков. В момент времени $t+\Delta t$ —

$$(4) \quad N(R(R_0, r), r, t+\Delta t) \frac{\partial R(R_0, r)}{\partial R_0} \Delta R_0 S(r) \Delta r.$$

Приравнивая разность выражений (1) и (2) к разности (4) и (3) и переходя к пределу при $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение сохранения количества пузырьков, изменяющих свой размер и движущихся с различными скоростями

$$(5) \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(u N S \frac{\partial R}{\partial R_0} \right) = \frac{\partial R}{\partial R_0} \frac{\partial}{\partial t} (N \cdot S).$$

Ввиду того что функции $u(r, R(R_0, r))$, $\partial R / \partial R_0$ не зависят от времени, уравнение (5) можно представить в виде

$$(6) \quad -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{u(r, R(R_0, r))} \frac{\partial W}{\partial t},$$

где

$$W = u(r, R(R_0, r)) N(R(R_0, r), r, t) S(r) \frac{\partial R(R_0, r)}{\partial R_0}.$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$(7) \quad W = \Phi \left(\int \frac{dr}{u(r, R(R_0, r))} - t \right).$$

Функция Φ определяется из граничных и начальных условий.

Рассмотрим перераспределение пузырьков по размерам и по пространству в результате их миграции в периодическом поле акустического давления $p_\infty = p_0 + p_m \Phi \left(\frac{r}{L} \right) \sin 2\pi f t$, где p_0 — статическое давление; $p_m \Phi \left(\frac{r}{L} \right)$, f — соответственно амплитуда и частота переменного давления; функция $\Phi \left(\frac{r}{L} \right)$ характеризует неоднородность амплитуды; L — характерный размер неоднородности. При периодическом изменении давления нелинейно пульсирующая полость не только осциллирует в связи с изменением направле-

ния градиента давления, но и приобретает одно направленное движение. В работе [6] получено выражение для средней за период размерной скорости миграции одиночного пузырька, пульсирующего изотермично и равновесным образом, в вязкой жидкости

$$(8) \quad u = \varepsilon^2 \bar{p}_0 \frac{1}{1 + \frac{E}{\xi}} \varphi \frac{d\varphi}{d\bar{r}} \frac{216M^2 + (2\pi\xi^2)^2}{(18M)^2 + (2\pi\xi^2)^2} \frac{Lf}{18M} \xi^2.$$

Здесь

$$\bar{p}_0 = \frac{p_0}{\rho f^2 L^2}; \quad M = \frac{\mu}{2\rho f R_{\max}^2};$$

$$E = \frac{4\sigma}{3p_0 R_{\max}}; \quad \bar{r} = \frac{r}{L}; \quad \xi = \frac{R}{R_{\max}}; \quad \varepsilon = \frac{p_m}{p_0},$$

где ρ — плотность жидкости, μ — динамический коэффициент вязкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; R_{\max} — максимальное значение радиуса из совокупности рассматриваемых пузырьков для $r=r_0$. При выводе (8) не принимались во внимание диффузионные процессы и сила тяжести, а поэтому радиус пузырька будем считать постоянным, т. е. $R(R_0, r) \equiv R_0$.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ распределение пузырьков по размерам известно, причем по пространству оно равномерно. Тогда $N(R, r, 0) = G(R)$ и начальное условие для уравнения (6) примет вид

$$(9) \quad W(R, r, 0) = G(R) u(r, R) S(r).$$

Получим решение (7), удовлетворяющее условию (9) для случая

$$\varphi(\bar{r}) = \cos \frac{\pi}{2} \bar{r}$$

$$(10) \quad N = G(R) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} \bar{r} \right)}{1 + e^{2k\tau} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} \bar{r} \right)} e^{k\tau} \left[\frac{2}{\pi \bar{r}} \operatorname{arctg} \left(e^{k\tau} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \bar{r} \right) \right) \right]^v,$$

где $\tau = tf$ — безразмерное время, равное числу периодов;

$$k = \frac{u}{Lf} \frac{\pi^2}{4} \left(\varphi \frac{d\varphi}{d\bar{r}} \right)^{-1}.$$

При $e^{k\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r} \gg 1$ формула (10) оказывается неудобной для расчетов на ЭВМ. В этом случае, разлагая N в ряд по малому параметру $\alpha = e^{-k\tau} / \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r}$, с точностью до членов порядка α получим

$$(11) \quad N = \frac{G(R)}{\bar{r}^v e^{k\tau} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \bar{r} \right)}.$$

На фиг. 1 приведены рассчитанные по (10) и (11) зависимости $N(R)$ для различных τ . Кривые 1—5 соответствуют $\tau=0$; $2 \cdot 10^3$; $4 \cdot 10^3$; 10^4 и $1,6 \cdot 10^4$. Вычисления выполнены для $\varepsilon=0,4$; $\bar{r}=0,2$; $v=1$ в предположении, что $G(R) \sim R^{-3}$. Последнее принято на основании экспериментальных и теоретических результатов, приведенных в работах [2—5].

Трансформацию функции распределения пузырьков во времени и по пространству удобно проследить, введя отношение

$$\bar{N} = \frac{N(R, \bar{r}, \tau)}{N(R, \bar{r}, 0)}, \text{ где } N(R, \bar{r}, 0) = G(R).$$

На фиг. 2 и 3 для значений $\nu=1$ и $\nu=2$ приведены зависимости \bar{N} от τ при $f=10$ кгц; $\epsilon=0,4$; $R=8 \cdot 10^{-5}$ м. Штрихпунктирные линии соответствуют начальному распределению ($\bar{N}=1$). Кривые 1-4, полученные при $\tau=2 \cdot 10^3$; $4 \cdot 10^3$; $6 \cdot 10^3$; 10^4 , характеризуют изменение функции распределения пузырьков по пространству и свидетельствуют о значительном увеличении концентрации пузырьков в окрестности $\bar{r}=0$ за время $t \sim 1$ сек ($\tau \sim 10^4$). Повышение концентрации заметно ускоряется с увеличением ν .

Выполнив предельный переход в выражении (10) при $\bar{r} \rightarrow 0$, получим выражение для $N(R, 0, \tau)$, которым можно пользоваться для расчета функции распределения в пучности давления

$$(12) \quad N(R, 0, \tau) = G(R) e^{k\tau(1+\nu)}.$$

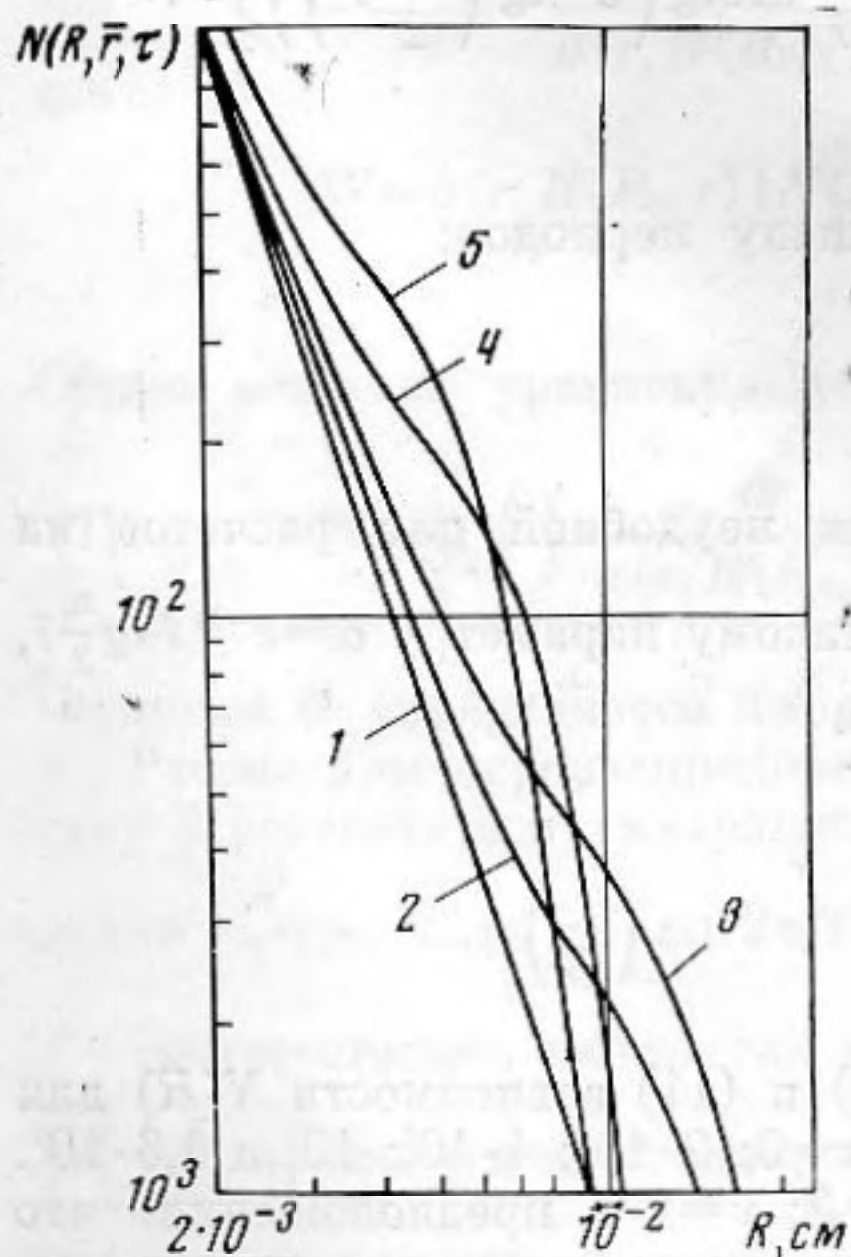
На фиг. 4 приведены зависимости $N(R, 0, \tau)$, рассчитанные по формуле (12) для $\tau=0$; $2,5 \cdot 10^3$; $5 \cdot 10^3$; 10^4 (кривые 1-4), при условии, что $G(R) \sim R^{-3}$ и $f=10$ кгц; $\epsilon=0,4$; $\nu=1$.

Поскольку при $\bar{r} \rightarrow 0$ стремится к нулю и скорость поступательного движения пузырька, то для расчета $N(R, 0, \tau)$ может быть также использовано выражение

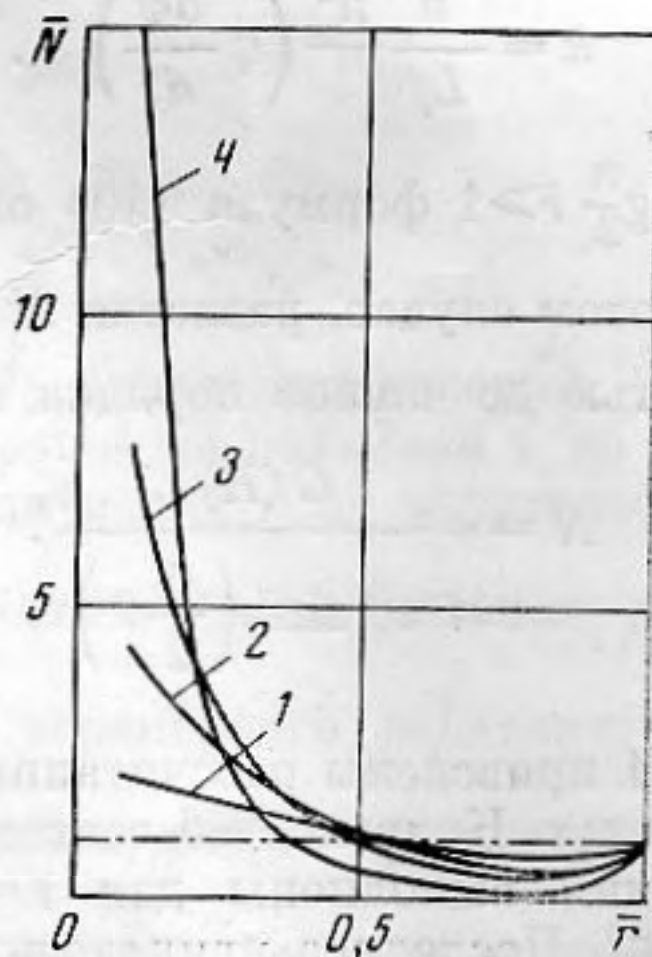
$$(12a) \quad N = \frac{\nu+1}{\bar{r}_0^{\nu+1}} \int_0^{\bar{r}_0} N(R, r, \tau) \bar{r}^\nu d\bar{r},$$

которое получено путем усреднения $N(R, \bar{r}, \tau)$ в окрестности $\bar{r}=0$ при достаточно малом \bar{r}_0 (например, $r_0 \approx 10R_{\max}$). Расчеты показывают, что для одинаковых R и τ значения N , вычисленные по (12a) несколько меньше величин N , определенных по (12), однако качественный ход кривых аналогичен.

Используя решение (10), исследуем характер изменения \bar{N} . Из условия экстремальности по времени $N(R, \bar{r}, \tau)$ получаем уравнение, опреде-



Фиг. 1



Фиг. 2

ляющее соотношение между $k\tau$ и \bar{r} , при котором $\bar{N} = \frac{N(R, \bar{r}, \tau)}{G(R)}$ максимумно

$$(13) \quad \frac{ve^{k\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r}}{\operatorname{arctg} \left(e^{k\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r} \right)} + 1 - e^{2k\tau} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \bar{r} = 0.$$

Отсюда

$$(14) \quad e^{k\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r} = k_0(v).$$

Величина $k_0(v)$ определяется численным методом и равна 1; 1,608; 2,202 при $v=0$; 1; 2. Можно показать, что уравнение (14) при любых k (и, следовательно, R) и τ имеет решение только в интервале

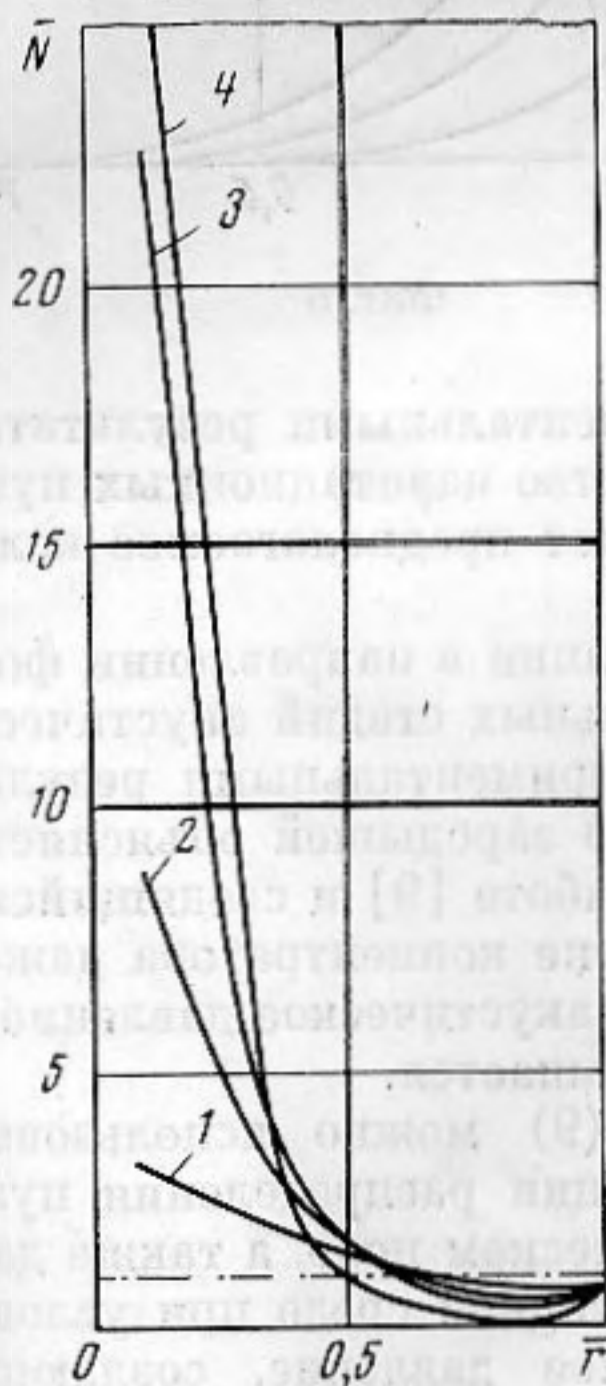
$$(15) \quad 0 < \bar{r} < \bar{r}_{\max}(v) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} k_0(v),$$

где $\bar{r}_{\max}(v) = 0,5$; 0,65; 0,73; соответственно при $v=0$; 1; 2.

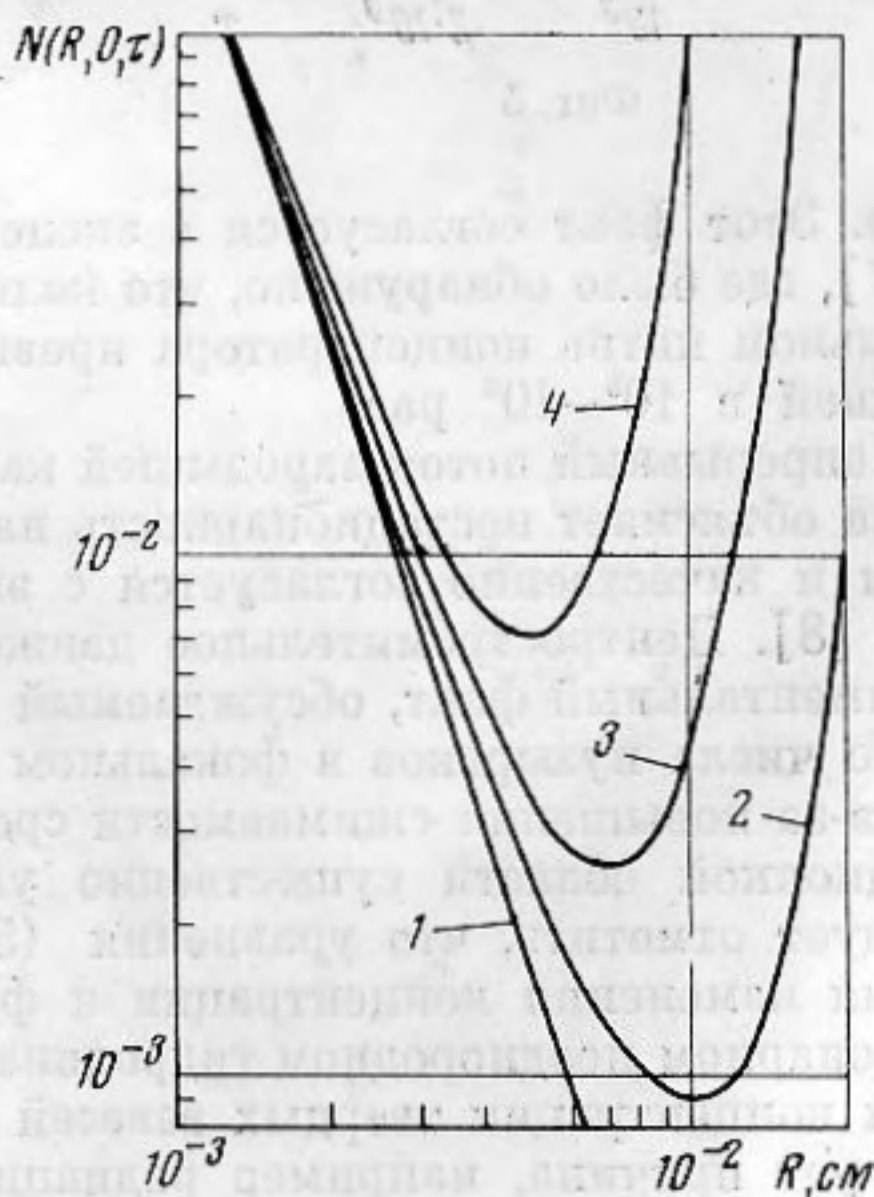
При $\bar{r} > \bar{r}_{\max}(v)$ функция $\bar{N}(R, \bar{r}, \tau)$ не имеет экстремума, и монотонно убывает (фиг. 2, 3). При выполнении условия (15) число пузырьков радиуса R возрастает до некоторого значения, соответствующего \bar{N}_{\max} , и затем убывает до нуля. Максимальное значение $\bar{N}(R, \bar{r}, \tau)$ равно

$$(16) \quad \bar{N}_{\max} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \bar{r}}{1 + k_0^2} \frac{k_0}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r}} \left(\frac{2}{\pi \bar{r}} \operatorname{arctg} k_0 \right)^v.$$

Зависимость \bar{N} от τ для $f=10^4$ гц; $\varepsilon=0,4$; $\bar{r}=0,2$; $v=1$, рассчитанная по формуле (10), приведена на фиг. 5. Кривые 1-5 соответствуют $R=0,04$;



Фиг. 3



Фиг. 4

0,03; 0,02; 0,01; 0,005 см. Величина \bar{N}_{\max} зависит только от \bar{r} и ν , но достигается в различные моменты времени τ_{\max} в зависимости от R .

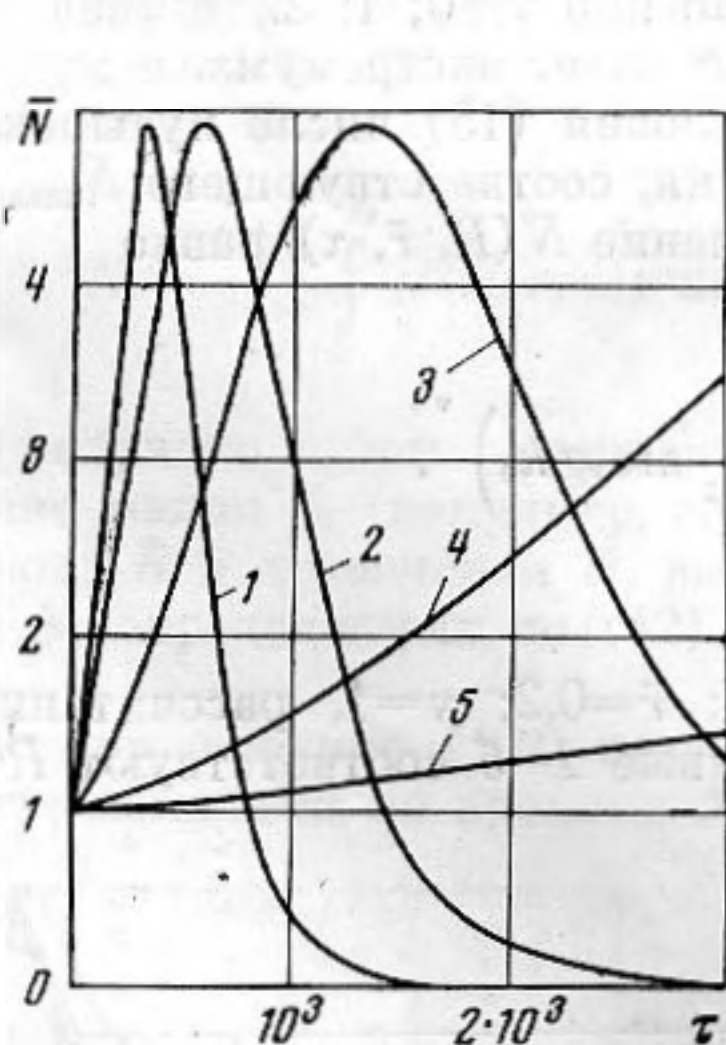
$$(17) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{k} \ln \frac{k_0}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \bar{r}}.$$

На фиг. 6 приведены зависимости \bar{N}_{\max} от \bar{r} для различных значений ν . Кривые 1—3 соответствуют $\nu=0; 1; 2$.

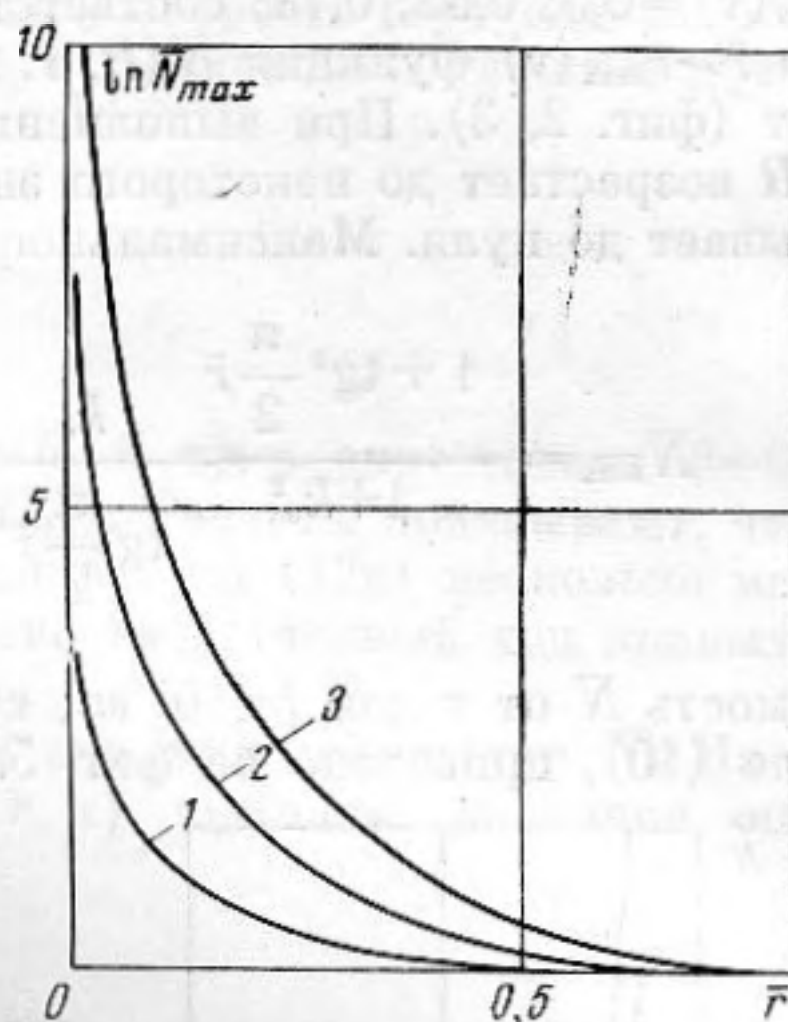
На основании проведенных расчетов можно сделать выводы, изложенные ниже.

1. Функция распределения пузырьков по размерам и по пространству необратимо изменяется в каждой точке исследуемого объема жидкости под воздействием градиентов давления в неоднородном акустическом поле. Это означает, что под действием ультразвука происходит обработка жидкости, приводящая, в частности, к изменению ее кавитационных параметров.

2. В области пучности давления в результате воздействия звукового поля концентрируется число пузырьков, существенно превышающее на-



Фиг. 5



Фиг. 6

чальное. Этот факт согласуется с экспериментальными результатами работы [7], где было обнаружено, что количество кавитационных пузырьков в фокальном пятне концентратора превышает предполагаемое количество зародышей в 10^5-10^6 раз.

3. Непрерывный поток зародышей кавитации в направлении фокального пятна объясняет нестационарность начальных стадий акустической кавитации и качественно согласуется с экспериментальными результатами работы [8]. Центростремительное движение зародышей объясняет также экспериментальный факт, обсуждаемый в работе [9] и сводящийся к увеличению числа пузырьков в фокальном пятне концентратора даже тогда, когда из-за повышения сжимаемости среды акустическое давление внутри кавитационной области существенно уменьшается.

Следует отметить, что уравнения (5)–(9) можно использовать для описания изменения концентрации и функции распределения пузырьков в стационарном неоднородном гидродинамическом поле, а также для определения концентрации твердых взвесей в жидкой среде при условии, что существует причина, например радиационное давление, создающая направленное движение твердых частиц со скоростью $u(r, R)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. E. Ripken, J. M. Killen.* Gas Bubbles, their Occurrence, Measurement and Influence in Cavitation Testing. Symposium on Cavitation and Hydraulic Machinery. Sendai, Japan, 1962.
2. Физические основы подводной акустики. Пер. с англ. под ред. В. И. Мясничева. М., «Сов. радио», 1955.
3. *Л. Р. Гаврилов.* О распределении газовых пузырьков в воде по их размерам. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 25.
4. *О. А. Капустина.* Дегазация жидкостей. Гл. IV монографии «Физические основы ультразвуковой технологии», под ред. Л. Д. Розенберга. М., «Наука», 1970.
5. *G. Jernetti.* Pulsed Ultrasonic Cavitation, part 1: Cavitation noise. luminescence thresholds, nuclei. Acustica, 1970, 23, 4, 186—207.
6. *Э. М. Агрест, Г. Н. Кузнецов.* Дрейф газовых каверн в неоднородном звуковом поле. Акуст. ж., 1972, 18, 2, 168—174.
7. *М. Г. Сиротюк.* Об энергетике и динамике кавитационной области. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 265—269.
8. *В. А. Акуличев.* Экспериментальное исследование элементарной кавитационной области. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 337—343.
9. *Л. Д. Розенберг.* Воздействие ультразвука высокой интенсивности на вещество. Вестн. АН СССР, 1968, 9, 147—155.

Акустический институт
Академии наук СССР
Сухумский филиал

Поступила
15 февраля 1972 г.