

УДК 534.833

О КРИТЕРИЯХ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ

*Л. П. Борисов, Б. А. Канаев, С. А. Рыбак,
Б. Д. Тартаковский*

На примерах продольных и изгибных колебаний стержня и изгибных колебаний пластины показано влияние изменения массы, жесткости и коэффициента потерь при нанесении вибропоглощающего покрытия на величину среднего по структуре квадрата колебательной скорости. Рассмотрены случаи возбуждения структуры гармоническим сигналом и полосой белого шума в режиме заданной силы и заданной скорости в точке возбуждения.

При нанесении вибропоглощающих покрытий на металлические структуры (пластины, стержни) изменяется коэффициент потерь, масса и жесткость структур. Расчет этих изменений приводится в ряде работ, посвященных теории вибропоглощающих покрытий конкретного типа и слоеных демпфированных материалов [1—3]. Однако критерием оценки эффективности покрытий, наносимых с целью уменьшения локальной или средней колебательной скорости структуры, является обычно лишь изменение коэффициента потерь структуры, обусловленное покрытием [4]. Изменения массы и жесткости при этом не учитываются, хотя пренебрежение ими может привести к существенной ошибке в оценке эффективности вибропоглощения, в особенности при гармоническом возбуждении в низкочастотной области.

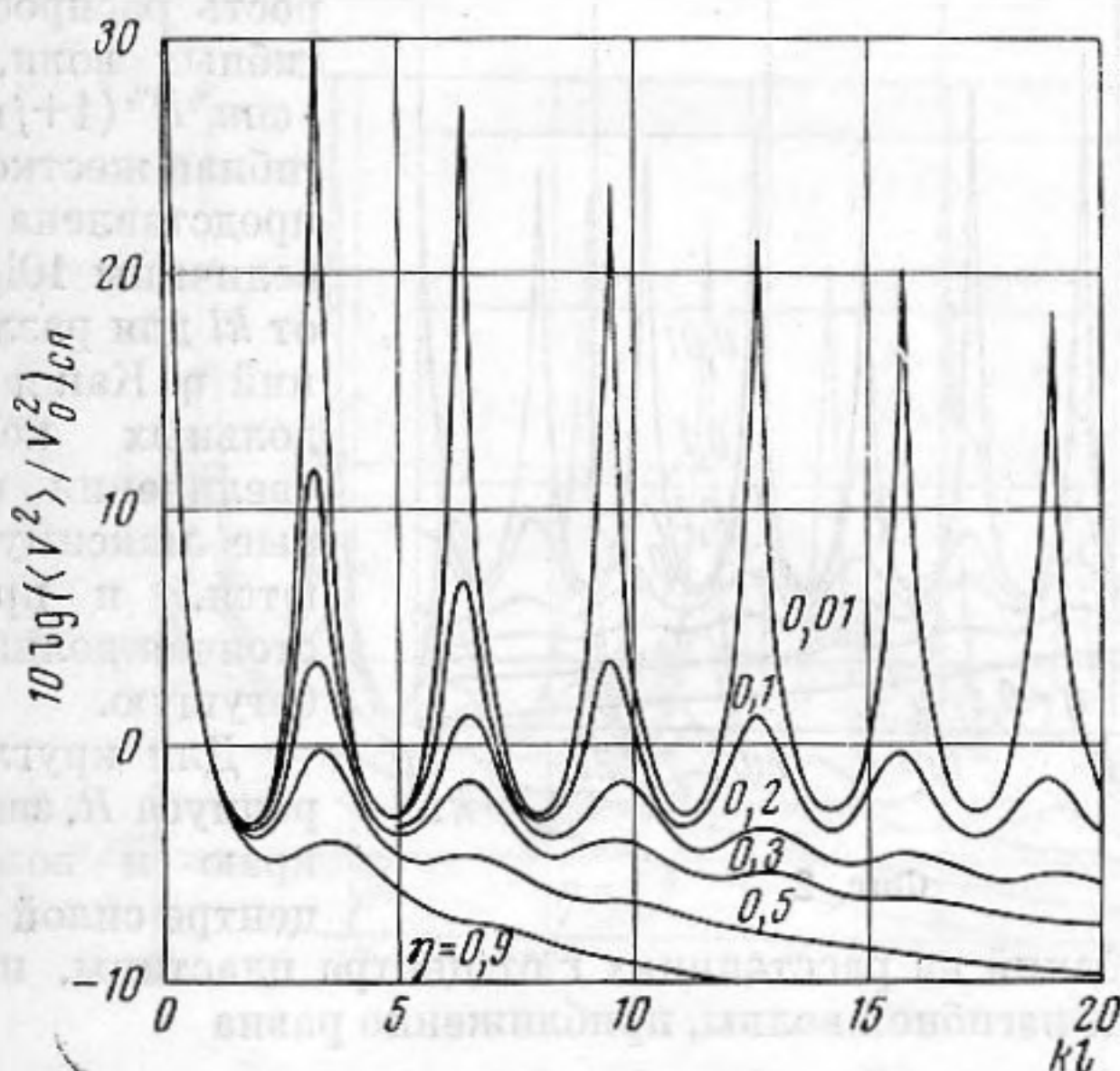
Изменения массы и жесткости зависят от параметров самого покрытия. Представляется интересным выразить через эти изменения эффективность покрытия в зависимости от типа структуры и условий возбуждения колебаний, с тем чтобы при переходе к конкретному типу покрытия определить связь эффективности покрытия с его параметрами.

Для отдельной моды колебаний зависимость амплитуды смещения, колебательной скорости и ускорения от изменения параметров структуры рассматривалась в работе [5]. В предположении малости изменения параметров структуры при нанесении покрытия в [6] методом теории возмущений были получены соотношения для переходной проводимости и для комплексных собственных частот демпфированной структуры.

Однако вследствие значительного увеличения коэффициента потерь при нанесении покрытия выделение отдельных мод колебаний возможно только в низкочастотной области. Кроме того, изменение параметров структуры приводит к существенному изменению в распределении амплитуд вибрации по поверхности структуры. Все это не позволяет ограничиться при оценке эффективности вибропоглощения сравнением вибрации в отдельных точках демпфированной и недемпфированной структур. Более целесообразно в таком случае использовать для оценки эффективности средние характеристики вибрационного поля и, в частности, средний по структуре квадрат колебательной скорости, характеризующий среднюю энергию вибрации структуры.

Ниже на примерах продольных колебаний стержня (СП), изгибных колебаний стержня (СИ) и пластины (ПИ) рассматривается влияние изменения массы, жесткости и коэффициента потерь на величину среднего квадрата скорости при возбуждении гармонических колебаний и белого шума в полосе частот в режиме заданной силы и заданной колебательной скорости в точке возбуждения.

Рассмотрим зависимость вибрационного поля от параметров структуры при гармоническом возбуждении.



Фиг. 1

Можно показать, что при возбуждении продольных колебаний стержня длиной l , свободного на одном конце, силой $F e^{j\omega t}$, приложенной на другом конце, усредненный по стержню квадрат колебательной скорости равен

$$(1) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{cp}} = \frac{F^2}{|\bar{Z}|^2} \frac{\frac{\text{sh } 2\beta kl}{2\beta} + \frac{\sin 2\alpha kl}{2\alpha}}{kl(\text{ch } 2\beta kl - \cos 2\alpha kl)},$$

где $\bar{k} = k(\alpha + j\beta) = \omega[\rho/E(1 + j\eta)]^{1/2}$ — комплексное волновое число, ρ — плотность, E — модуль Юнга, η — коэффициент потерь, $\bar{Z} = \bar{c}m$ — характеристический импеданс, m — масса на единицу длины стержня, $\bar{c} = [E(1 + j\eta)/\rho]^{1/2}$ — комплексная скорость распространения волны.

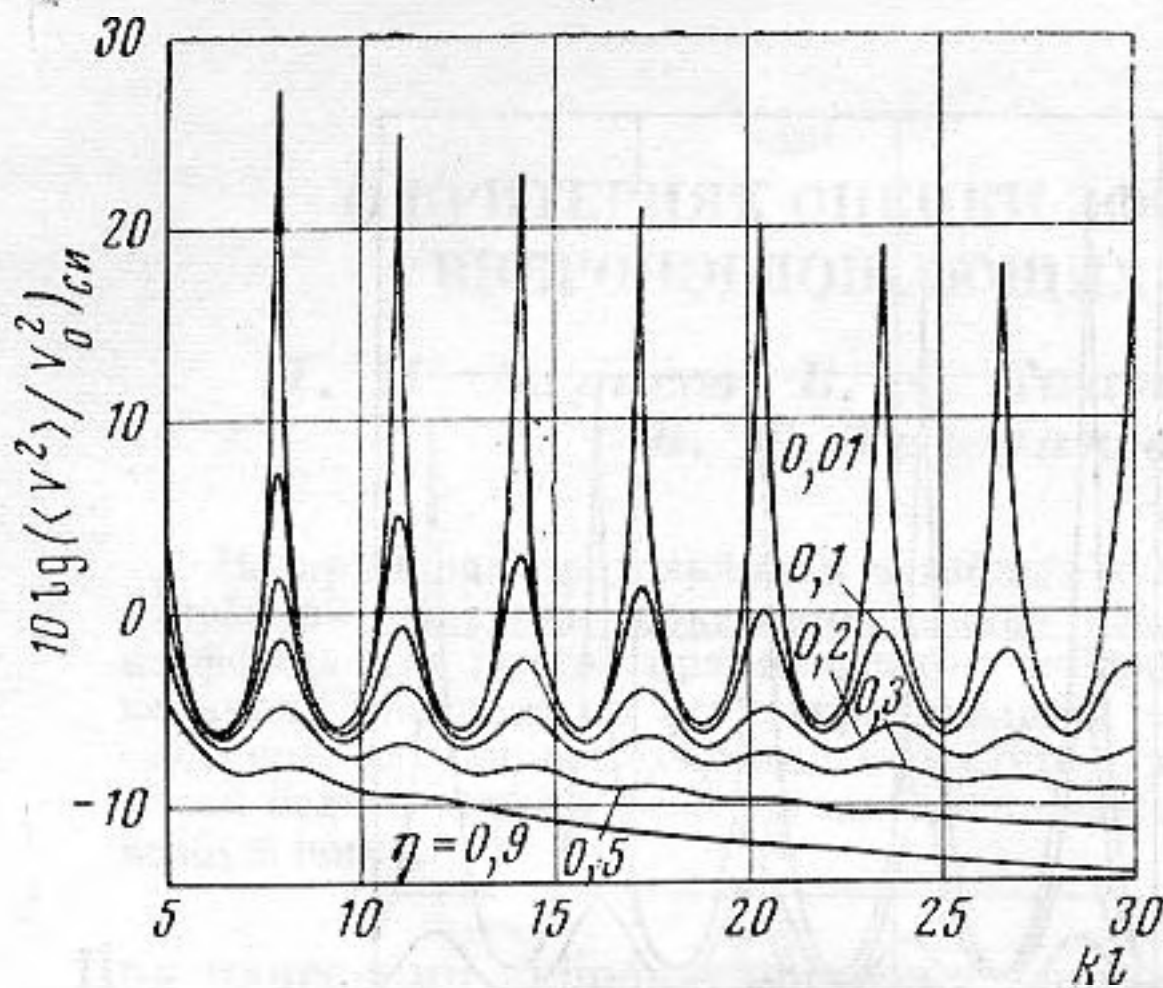
Зависимость величины $10 \lg (\langle V^2 \rangle / V_0^2)_{\text{cp}}$, где $V_0^2 = F^2 / |\bar{Z}|^2$ от kl при различных значениях η показана на фиг. 1. При $\eta kl < 1$ и малых η стержень имеет резко выраженные резонансные свойства. С увеличением номера моды (при возрастании частоты, возбуждающей стержень) уменьшаются максимальные (резонансные) значения $\langle V^2 \rangle$ и почти не изменяются минимальные (антирезонансные) значения $\langle V^2 \rangle$. С увеличением потерь резко понижаются резонансные максимумы. При дальнейшем увеличении длины стержня, потерь и частоты ($(\eta kl/2) > 1$) устанавливается бегущая затухающая волна, в которой с ростом kl величина $\langle V^2 \rangle$ уменьшается монотонно.

Рассмотрим изгибные колебания стержня. Для стержня, возбуждаемого на одном конце силой $F e^{j\omega t}$ и свободного на другом конце, пренебрегая

неоднородной волной на концах стержня ($kl \gg 1$), получим

$$(2) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} = \frac{F^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{2|\bar{Z}|^2} \frac{\frac{\text{sh } 2\beta kl}{2\beta} - \frac{1 - \cos 2\alpha kl}{2\alpha}}{kl (\text{ch } 2\beta kl + \cos 2\alpha kl)},$$

где $k(\alpha + j\beta) = \omega/\bar{c}$ — комплексное волновое число для изгибных волн в стержне, $\bar{c} = \omega^{1/2} [B(1+j\eta)/m]^{1/4}$ — комплексная скорость распространения изгибных волн, $|\bar{Z}|^2 = (1/2) \cdot \omega m^{1/2} B^{1/2} (1+j\eta)^{1/4}$, B — изгибная жесткость. На фиг. 2



Фиг. 2

представлена зависимость величины $10 \lg (\langle V^2 \rangle / V_0^2)_{\text{сн}}$ от kl для различных значений η . Как и в случае продольных колебаний, при увеличении ηkl резонансные максимумы уменьшаются, и при $(\eta kl/4) > 1$ стоячая волна переходит в бегущую.

Для круглой пластины радиуса R , заземленной по краю и возбуждаемой в центре силой $F e^{j\omega t}$, скорость

$$\bar{V}_{\text{пл}} = -j \frac{F \sqrt{2} \cos[\bar{k}(R-r) + \pi/4]}{\bar{Z} \sqrt{\pi \bar{k} r} \sin \bar{k} R},$$

где $\bar{Z} = 8[B(1+j\eta)m]^{1/2}$, $\bar{k} = \omega^{1/2} [m/B(1+j\eta)]^{1/4}$ — комплексное волновое число для изгибных волн, B — изгибная жесткость пластины без потерь, m — масса на единицу поверхности пластины. В этом случае

$$(3) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{пл}} = \frac{4F^2}{\pi |\bar{Z}|^2 \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) (1 + \eta^2)}} \frac{\frac{\text{sh } 2\beta kR}{2\beta} + \frac{1 - \cos 2\alpha kR}{2\alpha}}{k^2 R^2 (\text{ch } 2\beta kR - \cos 2\alpha kR)},$$

где α и β определяются из соотношения $\alpha + j\beta = (1 + j\eta)^{-1/4}$. Резонансные свойства пластины, резко выраженные при $(\eta kR/2) < 1$ и $\eta \ll 1$, с увеличением частоты и коэффициента потерь исчезают, и при $(\eta kR/4) > 1$ в пластине существует лишь затухающая цилиндрическая волна (фиг. 3).

Поскольку в резонансной области средний квадрат скорости является сильно осциллирующей функцией частоты, то его изменение на данной фиксированной частоте при нанесении покрытия может быть обусловлено смещением резонансных частот структуры. В этом случае оценку эффективности покрытия целесообразно проводить, сопоставляя средние квадраты скорости резонансных мод колебаний одного и того же номера для структуры без покрытия и с покрытием.

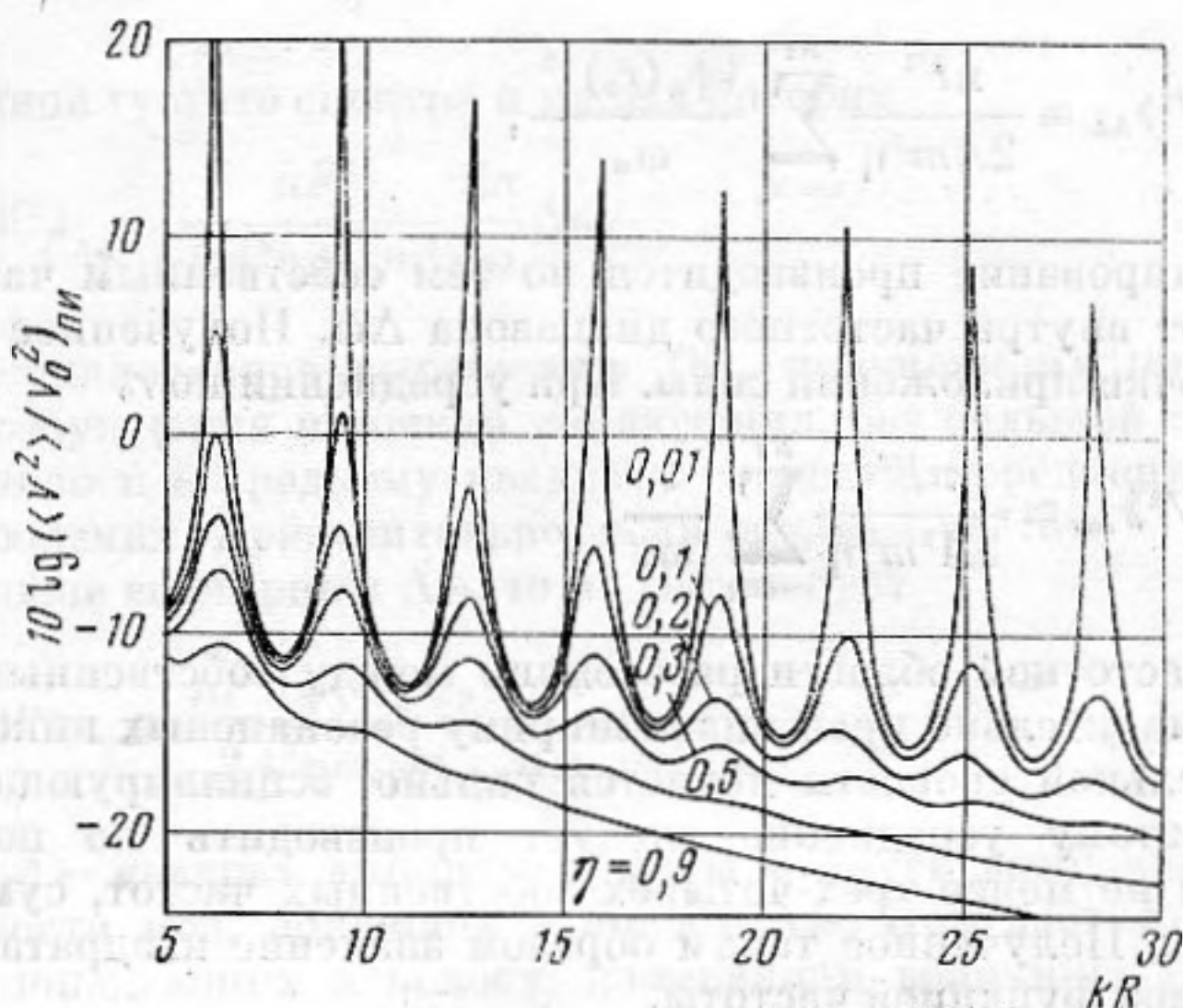
Из выражений (1) — (3) при малых потерях с точностью до η^2 получим на резонансных частотах ω_n :

$$(4a) \quad \begin{aligned} \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong 2F^2 / |\bar{Z}|^2 \eta^2 k^2 l^2 \sim 1/\omega_n^2 \eta^2 m^2 \sim 1/\eta^2 mB, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong 4F^2 / |\bar{Z}|^2 \eta^2 k^2 l^2 \sim 1/\omega_n^2 \eta^2 m^2 \sim 1/\eta^2 mB, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{пл}} &\cong 32F^2 / \pi |\bar{Z}|^2 \eta^2 k^3 R^3 \sim 1/\omega_n^2 \eta^2 m^{1/2} B^{1/4} \sim 1/\eta^2 mB, \end{aligned}$$

на антирезонансных частотах ω_m :

$$(46) \quad \begin{aligned} \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong F^2/2|\bar{Z}|^2 \sim 1/mB, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong F^2/4|\bar{Z}|^2 \sim 1/\omega_m m^{1/2} B^{1/2} \sim 1/mB, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{пн}} &\cong 2F^2/\pi|\bar{Z}|^2 kR \sim 1/\omega_m^{1/2} m^{1/4} B^{1/4} \sim 1/mB. \end{aligned}$$

Отметим, что для продольных колебаний стержня $B=ES$, где S — площадь поперечного сечения стержня.



Фиг. 3

При сопоставлении средних квадратов скорости резонансной моды для структуры с покрытием и без покрытия эффективность определяется величиной $\eta^2 mB$; на антирезонансах уменьшение среднего квадрата скорости обусловлено изменением массы и жесткости. Следует отметить, что средний квадрат скорости стержней одинаковым образом зависит от характеристического импеданца, волнового числа и коэффициента потерь; в случае пластины степень волнового числа в знаменателе выражений для $\langle V^2 \rangle$ на порядок выше, что объясняется двумерностью пластины.

С увеличением потерь и частоты выделение отдельных мод структуры становится затруднительным, а при очень большом увеличении потерь или частоты в структуре существует лишь бегущая затухающая волна. В этом случае из выражений (1)–(3) на произвольной частоте возбуждения с точностью до η получим:

$$(4в) \quad \begin{aligned} \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong F^2/|\bar{Z}|^2 \eta k l \sim 1/\omega \eta m^{1/2} B^{1/2}, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{сн}} &\cong F^2/|\bar{Z}|^2 \eta k l \sim 1/\omega^{1/2} \eta m^{1/4} B^{1/4}, \\ \langle V^2 \rangle_{\text{пн}} &\cong 8F^2/\pi|\bar{Z}|^2 \eta k^2 R^2 \sim 1/\omega \eta m^{1/2} B^{1/2}. \end{aligned}$$

Часто бывает необходимым снизить вибрацию структуры не на отдельных частотах, а в некоторой области частот. В этом случае целесообразно исследовать вибрации структуры при возбуждении полосой белого шума. Представив решение в виде ряда по собственным функциям структуры

$$\langle V^2 \rangle = \frac{F^2}{Am^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 |\psi_n(r_0)|^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_n^4},$$

где $|\psi_n(r_0)|$ — значение модуля нормированной собственной функции структуры без потерь в точке приложения силы с координатой r_0 , ω_n — собственная частота, $A=S$ — площадь поверхности пластины или $A=l$ — длина стержня, получим при возбуждении полосой частот $\Delta\omega$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{F^2}{Am^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(r_0)|^2 \int_{\Delta\omega} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^4}.$$

Если выбрать достаточно широкую полосу частот $\Delta\omega$, то

$$(5) \quad \langle V^2 \rangle_{\Delta\omega} \cong \frac{\pi F^2}{2Am^2\eta} \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{|\psi_n(r_0)|^2}{\omega_n},$$

причем суммирование производится по тем собственным частотам, которые попадают внутрь частотного диапазона $\Delta\omega$. Полученное соотношение зависит от точки приложения силы. При усреднении по r_0

$$(6) \quad \langle\langle V^2 \rangle\rangle_{\Delta\omega} \cong \frac{\pi F^2}{2A^2 m^2 \eta} \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{\omega_n}.$$

В низкочастотной области расстояние между собственными частотами структуры значительно превышает ширину резонансных пиков $\delta\omega$, и квадрат колебательной скорости является сильно осциллирующей функцией частоты. Поэтому усреднение следует производить по полосе частот, включающей не менее трех-четырех собственных частот, суммируя вклад каждой моды. Полученное таким образом значение квадрата скорости будет монотонной функцией частоты.

Граничную частоту ω_1 этого диапазона можно определить как такую частоту, для которой разность частот соседних резонансов равна ширине резонансной кривой, или $dn/d\omega = 1/\delta\omega$, где $dn/d\omega$ — число резонансов, приходящихся на единицу частоты

$$(7) \quad \omega_1 = \frac{1}{\eta \frac{dn}{d\omega}}.$$

Подставляя в (7) значения $dn/d\omega$, равные для стержней и пластины соответственно

$$\left(\frac{dn}{d\omega}\right)_{\text{сп}} = \frac{l}{\pi} \left(\frac{m}{B}\right)^{1/2}, \quad \left(\frac{dn}{d\omega}\right)_{\text{ст}} = \frac{l}{2\pi\sqrt{\omega}} \left(\frac{m}{B}\right)^{1/4},$$

$$\left(\frac{dn}{d\omega}\right)_{\text{пл}} = \frac{S}{4\pi} \left(\frac{m}{B}\right)^{1/2},$$

получим

$$\omega_{1, \text{сп}} = \frac{\pi}{\eta l} \left(\frac{B}{m}\right)^{1/2}, \quad \omega_{1, \text{ст}} = \frac{4\pi^2}{\eta^2 l^2} \left(\frac{B}{m}\right)^{1/4}, \quad \omega_{1, \text{пл}} = \frac{4\pi}{S\eta} \left(\frac{B}{m}\right)^{1/2}.$$

С ростом частоты число мод, приходящихся на ширину резонансной кривой, увеличивается. Вместе с тем в суммарном вибрационном поле структуры увеличивается доля волны, бегущей от источника. Граничную частоту ω_2 , выше которой в вибрационном поле преобладает бегущая затухающая волна, определим из соотношения

$$e^{-2\beta kL} = e^{-1},$$

соответствующего случаю, когда из-за потерь в структуре энергия волны на расстоянии L от источника до границы структуры падает в e раз.

Для стержней с точностью до постоянного коэффициента ω_2 совпадает с ω_1 . Для пластины $\omega_2 = (4/\eta^2 R^2)(B/m)^{1/2}$, отношение $\omega_2/\omega_1 \sim 1/\eta$, и при достаточно малом значении η диапазон $\omega_1 \div \omega_2$ может быть большим. В этом диапазоне даже в узкой полосе возбуждается много собственных мод, в связи с чем суммирование по модам можно заменить интегрированием:

$$\langle V^2 \rangle_{\Delta\omega} = \frac{F^2 \omega^2}{A^2 m^2} \int_{\omega_{N_1}}^{\omega_{N_2}} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n} \frac{d\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_n^4}; \quad (11)$$

при достаточной густоте спектра и малых потерях

$$(8) \quad \langle V^2 \rangle_{\Delta\omega} \cong \frac{\pi F^2}{2A^2 \eta \omega_{cp} m^2} \frac{dn}{d\omega} \Delta\omega.$$

Выражение, аналогичное выражению (8), полученному при усреднении по точкам возбуждения и точкам наблюдения, без большой ошибки может быть применено и к среднему квадрату скорости, усредненному лишь по точкам наблюдения. Действительно, если средняя частота ω_{cp} полосы значительно больше ее ширины $\Delta\omega$, то из (5) следует

$$(9) \quad \langle V^2 \rangle_{\Delta\omega} \cong \frac{\pi F^2 |\psi(r_0)|_{cp}^2}{2A^2 \eta \omega_{cp} m^2} \frac{dn}{d\omega} \Delta\omega,$$

где $|\psi(r_0)|_{cp}^2$ — квадрат амплитуды моды в точке возбуждения, средний по совокупности мод, попавших в полосу $\Delta\omega$. При достаточно большом числе мод, попадающих в полосу, изменением величины $|\psi(r_0)|_{cp}^2$, обусловленным смещением собственных частот и изменением плотности спектра мод, можно пренебречь и при сопоставлении структур с покрытием и без покрытия считать величину $|\psi(r_0)|_{cp}^2$ постоянной.

Подставляя в (9) соответствующие значения $dn/d\omega$, находим

$$(10) \quad \langle V^2 \rangle_{\Delta\omega, \text{сп}} \cong \frac{F^2 \Delta\omega |\psi(r_0)|_{cp}^2}{2\omega_{cp} \eta m^{3/2} B^{1/2} l}, \quad \langle V^2 \rangle_{\Delta\omega, \text{си}} \cong \frac{F^2 \Delta\omega |\psi(r_0)|_{cp}^2}{4\omega_{cp}^{3/2} \eta m^{7/4} B^{1/4} l},$$

$$\langle V^2 \rangle_{\Delta\omega, \text{пи}} \cong \frac{F^2 \Delta\omega |\psi(r_0)|_{cp}^2}{2\omega_{cp} \eta m^{3/2} B^{1/2} S}.$$

Для частот $\omega > \omega_2$ зависимость среднего квадрата скорости от параметров структуры также описывается выражением (10), причем с увеличением ω полоса частот $\Delta\omega$ может быть уменьшена пропорционально $1/\omega$.

Во всех рассмотренных выше случаях к механической структуре прикладывалась сосредоточенная сила, величина которой не зависела от частоты. Практический интерес представляет также случай, когда постоянной поддерживается колебательная скорость в точке возбуждения. Зависимость $\langle V^2 \rangle$ от параметров структуры при возбуждении последней заданной скоростью можно получить, если в выражениях (4) заменить величину $F^2/|\bar{Z}|^2$, зависящую от параметров структуры, постоянной величиной квадрата скорости в точке возбуждения. В этом случае на резонансных частотах

$$(11a) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{сп}} \sim 1/\eta^2 k^2 = B/\omega_n^2 \eta^2 m \sim 1/\eta^2,$$

$$\langle V^2 \rangle_{\text{си}} \sim 1/\eta^2 k^2 = B^{1/2}/\omega_n \eta^2 m^{1/2} \sim 1/\eta^2,$$

$$\langle V^2 \rangle_{\text{пи}} \sim 1/\eta^2 k^3 = B^{3/4}/\omega_n^{3/2} \eta^2 m^{3/4} \sim 1/\eta^2,$$

а на антирезонансных

$$(11a) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{ср}} \sim 1, \quad \langle V^2 \rangle_{\text{ср}} \sim 1,$$

$$\langle V^2 \rangle_{\text{пл}} \sim 1/k = B^{1/2} / \omega^{1/2} m^{1/2} \sim 1;$$

для полосы частот и бегущей волны

$$(11b) \quad \langle V^2 \rangle_{\text{ср}} \sim 1/\eta k = B^{1/2} / \omega \eta m^{1/2}, \quad \langle V^2 \rangle_{\text{ср}} \sim 1/\eta k = B^{1/2} / \omega^{1/2} \eta m^{1/2},$$

$$\langle V^2 \rangle_{\text{пл}} \sim 1/\eta k^2 = B^{1/2} / \omega \eta m^{1/2}.$$

Из сравнения (4) и (11) следует, что если на структуру, возбуждаемую силой, наносится вибропоглощающее покрытие, то эффективность покрытия растет с ростом жесткости, в то время как при возбуждении структуры в режиме заданной скорости более эффективными оказываются «мягкие» покрытия. Покрытия с меньшей жесткостью оказываются более эффективными и в том случае, когда по структуре распространяется бегущая волна и рассматривается задача о снижении вибраций, передаваемых из одной части структуры в другую. Тогда $|V^2| \sim e^{-2\beta x}$, и покрытие становится тем эффективнее, чем больше η и меньше B .

Эффективность вибропоглощения при нанесении покрытия можно оценивать величиной

$$(12) \quad ВП(\text{дб}) = 10 \lg \frac{\langle V_0^2 \rangle}{\langle V^2 \rangle} = P \lg \frac{\eta}{\eta_0} + M \lg \frac{m}{m_0} + N \lg \frac{B}{B_0},$$

где параметры с индексом «0» относятся к структуре без покрытия, а без индекса — к структуре с покрытием. Величины P , M и N зависят от частотного диапазона и режима возбуждения.

Поскольку сильное увеличение массы структуры при нанесении покрытия в большинстве случаев нежелательно, то при сравнении различных покрытий предпочтение следует отдавать тем из них, которые позволяют получить большее уменьшение среднего квадрата скорости, обусловленное лишь изменением коэффициента потерь и жесткости. В таком случае эффективность покрытия следует оценивать величиной

$$(13) \quad ЭП(\text{дб}) = P \lg \frac{\eta}{\eta_0} + N \lg \frac{B}{B_0}.$$

Для рассмотренных структур и способов возбуждения соответствующие значения коэффициентов P , M и N , полученные из соотношений (4), (10) и (11), приведены в таблице. Поскольку выражения (4), (10) и (11) справедливы при условии малости коэффициента потерь, нулевые значения коэффициентов P , M и N в таблице следует рассматривать как признак слабой зависимости эффективности от соответствующих параметров.

	Режим возбуждения	Продольные колебания стержня			Изгибные колебания стержня			Изгибные колебания пластины		
		P	M	N	P	M	N	P	M	N
Резонанс	F	20	10	10	20	10	10	20	10	10
	V	20	0	0	20	0	0	20	0	0
Антирезонанс	F	0	10	10	0	10	10	0	10	10
	V	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Бегущая волна Полоса белого шума	F	10	15	5	10	17,5	2,5	10	15	5
	V	10	5	-5	10	2,5	-2,5	10	5	-5

Используя соотношения (12) и (13) и данные таблицы, можно оценить эффективность данного покрытия при возбуждении структуры гармоническим сигналом и полосой белого шума. Полученные результаты позволяют также выбрать наиболее эффективный тип покрытия и рассчитать его параметры (например, соотношение толщин слоев многослойного покрытия), позволяющие получить наибольший эффект при заданном весе покрытия или достичь необходимого снижения вибрации при минимальном весе покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Oberst.* Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch Festaf-tende Belage. Akust. Beich., 1952, 2, H. 4, 181.
2. *E. Kerwin.* Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layers. J. Aco-ust. Soc. Amer., 1959, 31, 7, 952.
3. *D. Ross, E. Ungar, E. Kerwin.* Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Vis-coelastic Laminae. Structural Damping, Pergamon Press, 1960.
4. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.
5. *D. J. Mead.* Criteria for Comparing the Effectiveness of Damping Treatments. Noise Control (Shock and Vibration), 1961, 7, 3, 27.
6. *С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский.* Расчет эффективности вибропоглощающих покры-тий, наносимых на конструкции. VI. Всес. акуст. конф., MIV2, М., 1968.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
10 июля 1973 г.