

УДК 534.222

**ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ**

*О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов*

Статья представляет собой краткий обзор ряда теоретических работ по нелинейной акустике. Использована схема классификации явлений, базирующаяся на совокупности трех безразмерных чисел  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $N$ , позволяющих сравнить влияние различных факторов на искажение формы волны.

В процессе изучения нелинейных акустических явлений было получено много важных новых результатов как теоретических, так и экспериментальных. Изложению этих результатов посвящены многочисленные оригинальные работы, опубликованные в течение длительного промежутка времени; они обобщены в ряде известных обзоров и монографий. Вместе с тем представляется естественной попытка расположить имеющиеся данные в рамках единой схемы, систематизировать их с точки зрения единого методического подхода. Такой упрощенный обзор должен не столько облегчить восприятие уже решенных задач в целом, сколько выявить разделы, изученные в недостаточной степени и стимулировать дальнейшие поиски в этих направлениях.

В основу используемой в данной работе классификации положен набор из трех безразмерных чисел  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $N$ , позволяющих сравнить вклад в искажение профиля волны диссипативных, дисперсионных и дифракционных процессов по отношению к процессу нелинейного искажения профиля. Обсуждаются здесь в основном теоретические работы по нелинейной акустике, выполненные в МГУ [1-32]. Методической основой большинства работ является приближение медленно изменяющейся формы звуковой волны [1].

Распространение ограниченных звуковых пучков в нелинейной среде, обладающей в общем случае диссипативными и релаксационными свойствами, можно описать уравнением [2, 6, 18, 27]

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau'} e^{-\frac{\tau-\tau'}{T}} d\tau' \right] = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right)$$

Здесь  $\tau = t - x/c_0$ ,  $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ ,

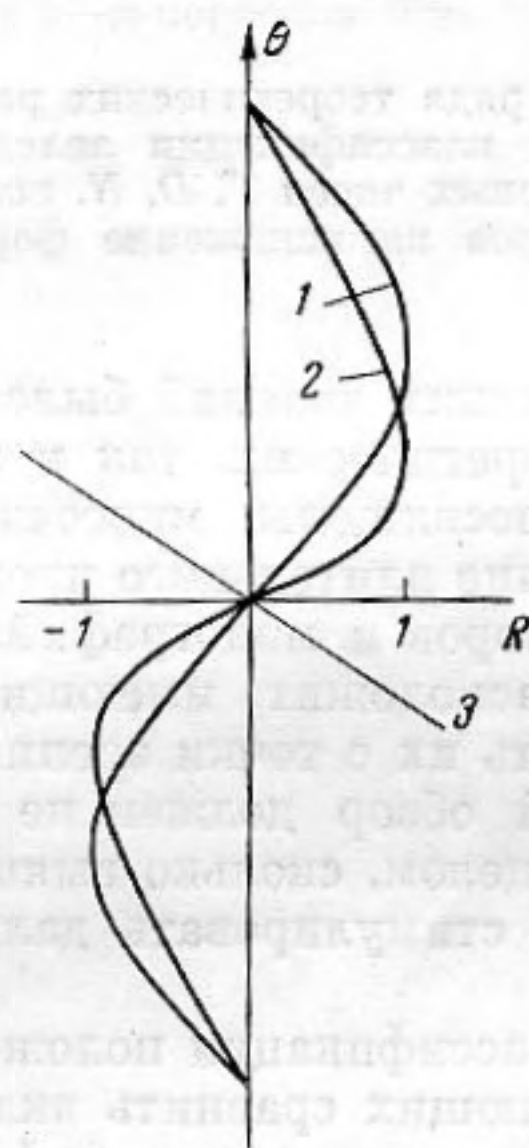
$$m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2, \quad b = \zeta + \frac{4}{3} \eta + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)$$

$\rho'$  — приращение плотности среды,  $\rho_0$  — равновесное значение плотности,  $T$  — характерное время релаксации,  $c_0$  и  $c_\infty$  — скорость распространения звука на низких и высоких частотах соответственно;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\zeta$  — коэффициент объемной вязкости,  $\eta$  — коэффициент сдвиговой вязкости,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Координата  $x$  отсчитывается

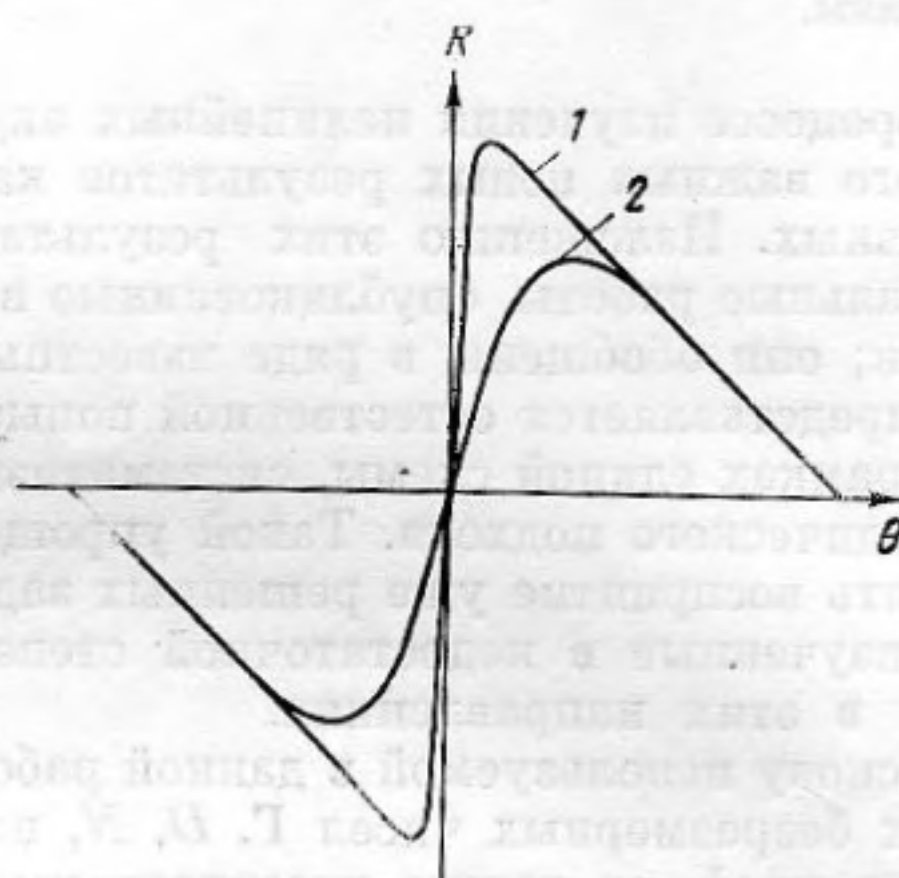
ся вдоль направления распространения звука, координата  $r$  — в направлении, перпендикулярном оси пучка. Уравнение (1) может быть получено из полной системы уравнений гидродинамики с помощью приближенного уравнения состояния

$$(2) \quad p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right) \rho'^2 + \\ + m c_0^2 \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho'}{\partial t'} e^{-\frac{t-t'}{T}} dt' - \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \operatorname{div} v,$$

(где  $p'$  — приращение давления,  $v$  — колебательная скорость,  $c_v$  и  $c_p$  — теплоемкость при постоянных объеме и давлении) и асимптотического мето-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Графический анализ искажения волны при  $\sigma < 1$ . Результирующий профиль (кривая 2) получен сложением двух функций:  $\theta = \arcsin R$  (кривая 1) и прямой  $\theta = -\sigma R$  (3)

Фиг. 2. Профиль волны в области  $\sigma > 1$ . Кривая 1 соответствует значению  $\Gamma = 0,1$ , кривая 2 —  $\Gamma = 0,5$

да, основанного на предположении о медленности изменения профиля на расстояниях порядка длины волны. Это означает, что как нелинейность, так и конкурирующие процессы — диссипация, дисперсия и дифракция — являются слабыми.

Чтобы оценить относительный вклад нелинейности и конкурирующих процессов в искажение профиля, удобно перейти к безразмерным переменным:

$$(3) \quad R = \rho' / \rho_0', \quad \sigma = \varepsilon \omega \rho_0' x / c_0 \rho_0, \quad \theta = \omega t, \quad \xi = r/a,$$

где  $\rho_0'$ ,  $\omega$ ,  $a$  — характерные амплитуда, частота и радиус пучка соответственно. Уравнение (1) в этих переменных примет вид

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} - D \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial R}{\partial \theta'} e^{-\frac{\theta-\theta'}{\omega T}} d\theta' \right] = \\ = \frac{N}{4} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right).$$

Здесь  $\Gamma^{-1} = 2\varepsilon \text{Re} = 2\varepsilon c_0 \rho_0 v_0 / b\omega$ ,  $D = m/2\varepsilon M$ ,  $N = (\lambda/a)^2 / 2\pi^2 \varepsilon M$  — набор из трех безразмерных чисел, полностью определяющих явление;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\lambda$  — длина волны в среде,  $M$  — число Маха. Рассмотрим влияние каждого характерного безразмерного числа в отдельности.

**Диссипативная среда.** Пусть  $D = N = 0$ ;  $\Gamma \neq 0$ . В этом случае (4) перейдет в уравнение Бюргера [33, 1–3]:

$$(5) \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2}.$$

Для уравнения (5) найдено общее решение [34, 35], которое хорошо исследовано. Остановимся коротко на самом интересном случае — когда значение  $\Gamma$  мало (соответствующее акустическое число Рейнольдса  $\text{Re}$  — велико) [2]. Точное решение показывает, что в этом случае на небольших расстояниях  $0 < \sigma < 1$  можно пренебречь диссипативными эффектами и описывать искажение синусоидальной на входе волны выражением [2, 36]

$$(6) \quad R = \sin(\theta + \sigma R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin n\theta.$$

Графический анализ решения (6) дан на фиг. 1. На больших расстояниях  $1 < \sigma < 4\varepsilon \text{Re} = 2\Gamma$  решение (5) можно представить в форме [2, 37]:

$$(7) \quad R = \frac{1}{1+\sigma} \left[ -\theta + \pi \operatorname{th} \frac{\pi\theta}{2\Gamma(1+\sigma)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2\Gamma \frac{\sin n\theta}{\operatorname{sh} n\Gamma(1+\sigma)},$$

показанной на фиг. 2. Нетрудно видеть (поскольку  $\sigma$  входит под знак «th»), что фронт постепенно расплывается из-за действия вязкости и теплопроводности, и профиль волны вновь становится синусоидальным. Интересно заметить, что на расстоянии  $\sigma = 2/\Gamma$  амплитуда волны не зависит от своего значения на входе (при  $\sigma = 0$ ).

Такая интерпретация точного решения уравнения Бюргера для больших чисел Рейнольдса иллюстрирует метод приближенного анализа общего уравнения (1), пригодный для малых значений параметров  $\Gamma$  и  $D$ . На малых расстояниях  $\sigma < 1$  можно пренебречь конкурирующими процессами и следить только за нелинейным искажением волны. На больших расстояниях  $\sigma > 1$  можно также не учитывать эти процессы всюду, за исключением области профиля, прилегающей к разрыву. В этой области решение можно получить сшиванием ступенчатого скачка, характерного для недиссипативной среды, и стационарного решения (слагаемое «th» в формуле (7)). Такое простое аналитическое решение позволяет исследовать многие нелинейные эффекты, проявляющиеся в области существования развитого ударного фронта. Обсуждение этих эффектов проводится в следующих разделах.

**Среда с релаксацией.** Рассмотрим теперь случай  $\Gamma = N = 0$ ,  $D \neq 0$ , т. е. случай, когда дифракция и поглощение, обусловленные вязкостью и теплопроводностью, отсутствуют, но учитывается дисперсия и поглощение из-за релаксационных процессов. Соответствующее уравнение в общем виде не решено, однако качественное исследование проведено весьма полно. Стационарное решение, дающее структуру слабой ударной волны, имеет вид [7]:

$$(8) \quad \frac{\theta + \theta_0}{\omega T} = \ln \frac{(1+R)^{D-1}}{(1-R)^{D+1}}$$

и показано на фиг. 3. В предельном случае  $\omega T \ll 1$  волна будет искажаться несимметричным образом, как показано на фиг. 4. В этом случае уравнение

(4) сводится к уравнению Кортвега — де Вриза — Бюргерса:

$$(9) \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} = D \left[ \omega T \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} - (\omega T)^2 \frac{\partial^3 R}{\partial \theta^3} \right].$$

Решение этого уравнения в некоторых случаях может иметь осциллирующий характер. В другом предельном случае  $\omega T \gg 1$  получается уравнение первого порядка [1, 7]

$$(10) \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{D}{\omega T} R.$$

Это уравнение сводится к следующему:  $\partial R / \partial Z - R \partial R / \partial \theta = 0$ , в котором роль приведенного расстояния играет  $Z$ :

$$(11) \quad Z = \frac{\omega T}{D} (1 - e^{-\frac{D\sigma}{\omega T}}).$$

Следует заметить, что при  $\sigma \rightarrow \infty$   $Z$  стремится к  $Z_\infty = \omega T / D$ . Поэтому, если амплитуда на входе достаточно мала, разрыв может не сформироваться вовсе. Если же разрыв сформировался, то при дальнейшем распространении волны он лишь уменьшается по величине, не расплываясь в противоположность тому, что имело место в случае диссипации, обусловленной вязкостью и теплопроводностью.

**Ограниченные звуковые пучки.** Рассмотрим, как влияет дифракция на нелинейное распространение волны, т. е. случай  $\Gamma = D = 0$ ,  $N \neq 0$ . Уравнение (4) примет вид [18]:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \theta \partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right).$$

Общее аналитическое решение этого уравнения найти не удастся, но предельные случаи малых и больших чисел  $N$  можно проанализировать на основе приближенных решений. При малых  $N$  анализ показывает, что из-за нелинейности радиус пучка в фазе сжатия несколько увеличивается, а в фазе разрежения — уменьшается. Однако в среднем за период радиус пучка остается неизменным до тех пор, пока в волне не сформируется разрыв. С момента образования разрыва ситуация изменяется [29]. Поскольку амплитуда волны на оси больше, разрыв здесь образуется раньше, что приводит к уменьшению амплитуды и выравниванию ее радиального распределения (фиг. 5). Такое увеличение характерной ширины пучка, которое можно интерпретировать как дополнительную нелинейную дифракционную расходимость, наблюдалось в эксперименте [38]. Процесс генерации гармоник в пучке также происходит иначе, чем в плоской волне. Здесь радиальное распределение амплитуд гармоник не совпадает с исходным; с повышением номера гармоники амплитуда по мере удаления от оси пучка спадает быстрее. Отметим в заключение, что дифракция в отличие от диссипативных эффектов не может воспрепятствовать образованию разрыва, а лишь уменьшает темпы накопления нелинейных искажений.

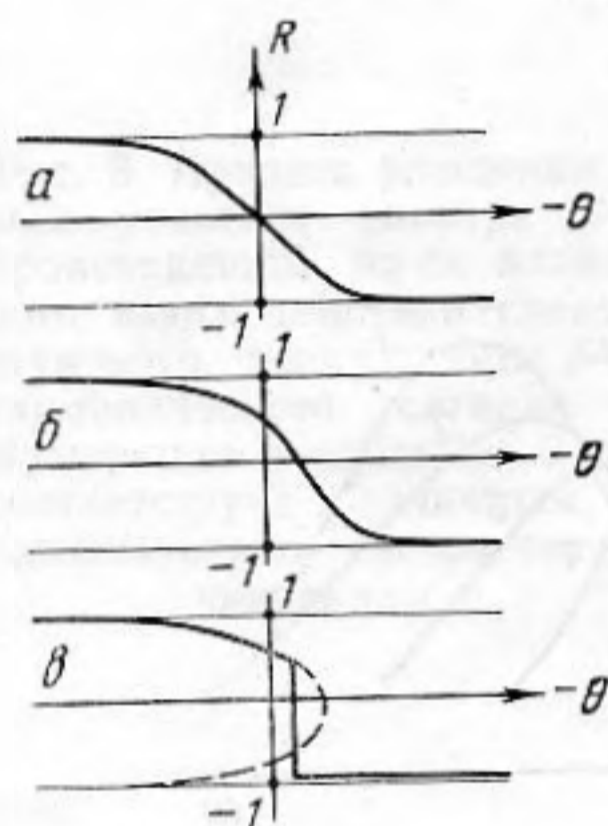
**Сферические и цилиндрические волны.** Все сказанное выше относилось к квазиплоским волнам, однако аналогичные результаты получены для сферически- и цилиндрически-симметричных волн. Для простейшего случая, когда релаксационные эффекты и дифракция не учитываются, аналог уравнения (5) имеет вид [5, 8]

$$(13) \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma} + \frac{n}{2\sigma} R - R \frac{\partial R}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2}.$$

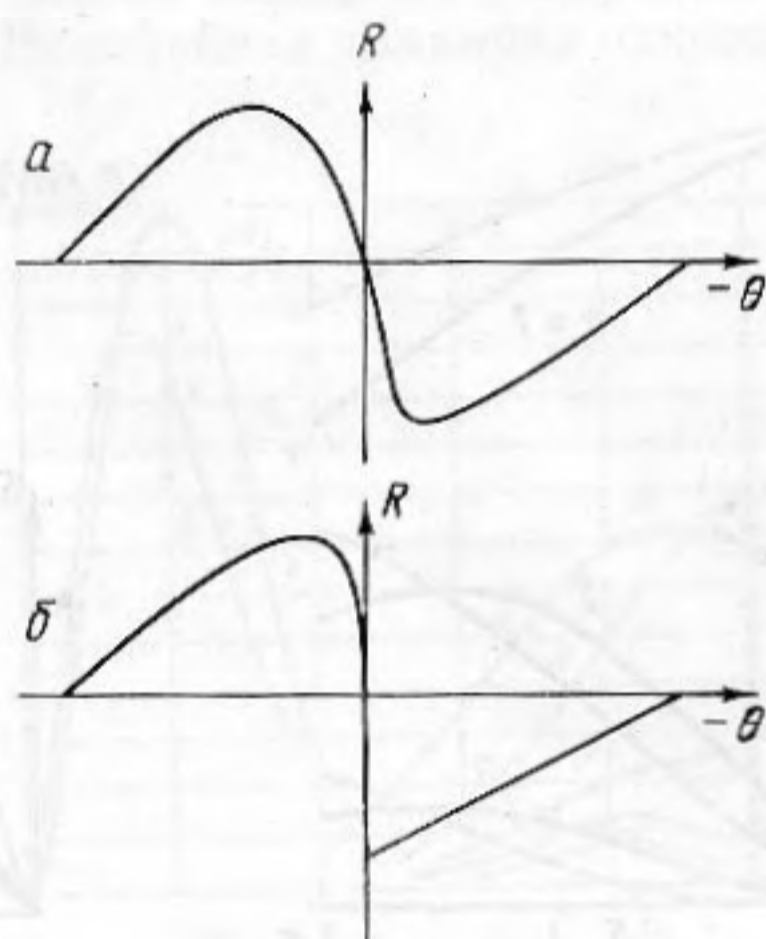
Здесь  $n=1$  относится к цилиндрическому случаю и  $n=2$  — к сферическому. Это уравнение можно свести к типу Бюргерса для среды, в которой вязкость и теплопроводность возрастают по линейному закону (при  $n=1$ ) или

экспоненциально — в случае  $n=2$ . Это приводит к более быстрому темпу нелинейных искажений для сходящихся волн и более медленному — для расходящихся. Следует также заметить, что в сходящейся волне разрыв может образоваться дважды.

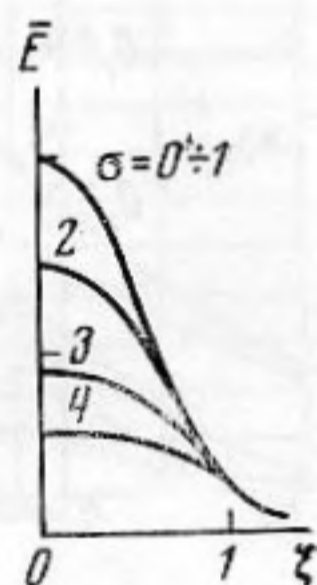
**Взаимодействие волн.** Уравнения (4) и (13) предназначены для описания волновых полей, однако в акустике часто требуется знать их спектральное представление. На спектральном языке искажение профиля трактуется как нелинейное взаимодействие между кратными гармониками и



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 3. Структура одиночного скачка в среде с релаксацией при различных значениях дисперсионного числа  $D$ :  $a - D \gg 1$ ,  $b - D > 1$ ,  $v - D < 1$

Фиг. 4. Несимметричный профиль волны в релаксирующей среде (предельный случай  $\omega T \ll 1$ ):  $a - D > 1$ ,  $b - D < 1$

Фиг. 5. Процесс «сглаживания» зависимости средней за период энергии волны  $\bar{E}$  от радиальной координаты  $\xi$

комбинационными частотами Фурье-компонент исходного спектра. Прямое описание эволюции спектров регулярных полей не представляется возможным, и поэтому остаются два пути: метод последовательных приближений и численный анализ Фурье выражений, описывающих динамику поля [9, 12, 30]. Второй путь предпочтительнее, так как он не связан с жесткими ограничениями, налагаемыми на область применимости результатов. В качестве примера укажем на важную задачу о вырожденном параметрическом взаимодействии между волнами с частотами  $\omega$  и  $\omega/2$  [30]. В тех случаях, когда начальные сдвиги фаз равны  $\pi/2$  и  $0$ , взаимодействие носит различный характер. В первом случае положение фронта неустойчиво — период волны постепенно стремится удвоиться, что при спектральном описании соответствует росту субгармоники. Аналогично может быть решена задача о параметрическом излучателе ультразвука.

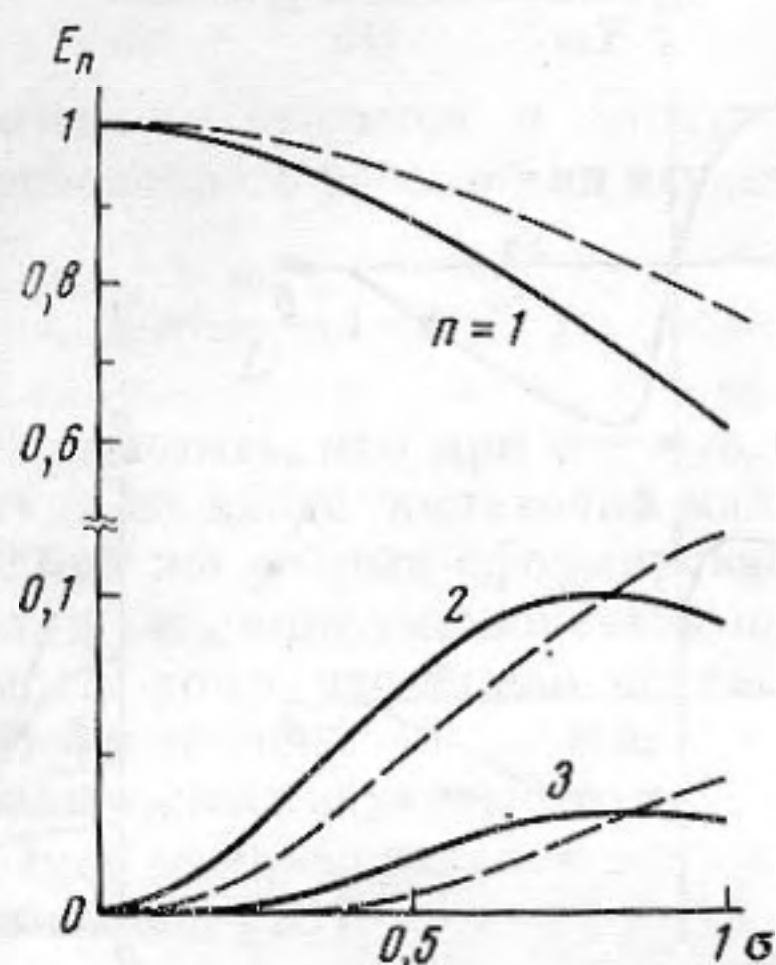
Максимальный коэффициент усиления за счет нелинейного взаимодействия в среде без дисперсии равен  $\Gamma^{-1/2}$ , однако он может быть реализован лишь для очень слабых сигналов. Если речь идет о практическом применении эффекта, то необходимо использовать искусственные системы с дисперсией [13—15].

**Статистические явления.** В отличие от ситуации, имеющей место в регулярных волнах, задание исходного спектра шумового возмущения однозначно определяет процесс его эволюции (разумеется, при заданной статистике на входе среды). Недавно получены общие результаты, описывающие нелинейную деформацию спектров в идеальной среде. В частности,

если шум на входе характеризуется гауссовым распределением с корреляционной функцией  $b(\tau)$ , выражение спектра  $S(\omega, \sigma)$  имеет вид [32]:

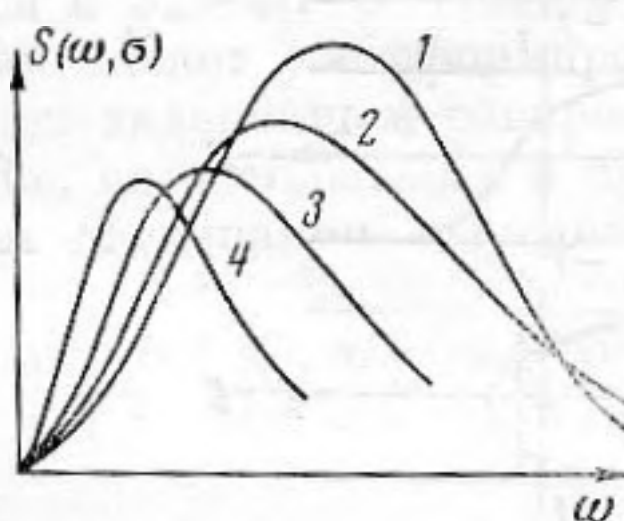
$$(14) \quad S(\omega, \sigma) = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} [e^{\sigma^2 b(\tau)} - 1] \cos \omega\tau d\tau.$$

Выражение (14) пригодно для исходных спектров произвольной ширины и формы и позволяет рассмотреть разнообразные типы взаимодействий [28].



Фиг. 6

Фиг. 6. Зависимость интенсивностей  $E_n$  первой ( $n=1$ ), второй (2) и третьей (3) гармоник от приведенного расстояния  $\sigma < 1$  при одинаковых интенсивностях исходных сигналов. Гармоническому сигналу соответствуют штриховые кривые, узкополосному шумовому сигналу — сплошные кривые



Фиг. 7

Фиг. 7. Изменение формы широкополосного исходного спектра (кривая 1)  $S(\omega, 0)$  в нелинейной среде для различных значений приведенного расстояния  $\sigma$ ; 2 —  $\sigma=1/6$ , 3 —  $\sigma=1/2\sqrt{3}$ ; 4 —  $\sigma=1/\sqrt{3}$

В частности, для квазигармонического возмущения с исходной корреляционной функцией  $b(\tau) \cos \omega_0\tau$  формула (13) приводит к корреляционной функции [31]:

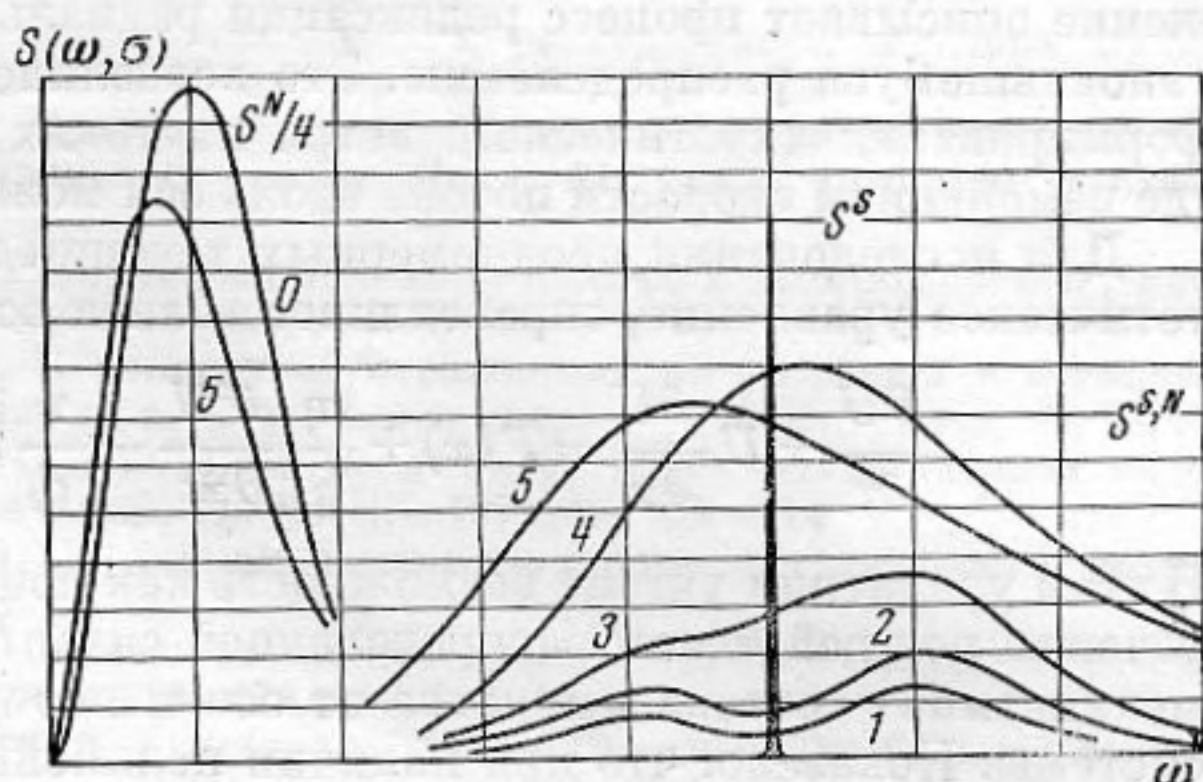
$$(15) \quad B(\tau, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-(n\sigma)^2}}{(n\sigma)^2} I_n[(n\sigma)^2 b(\tau)] \cos n\omega_0\tau.$$

Сравнивая результат (15) с соответствующим ему регулярным решением Бесселя — Фубини, легко видеть, что генерация  $n$ -й гармоники шумом идет эффективнее в  $n!$  раз (см. также экспериментальную работу [39]). Ширина спектральных линий гармоник растет как с увеличением  $n$ , так и с ростом приведенного расстояния  $\sigma$ . Поведение интенсивностей 1, 2 и 3-й гармоник для шума и регулярной волны проиллюстрировано на фиг. 6 для значений  $\sigma < 1$ . В разрывной области  $\sigma > 1$  аналогичные результаты можно получить численным способом [31]. Для широкого исходного спектра («акустическая турбулентность») характер трансформации зависит от его начальной формы. Если спектр  $S(\omega, 0)$  сосредоточен вблизи  $\omega=0$ , то в среде он деформируется таким образом, что спектральная плотность на низких частотах уменьшается, а на высоких возрастает. Если же максимум приходится на  $\omega=\omega_0 \neq 0$ , то происходит как преобразование в более корот-

коволновый спектр, так и параметрическая подкачка его длинноволновой части (см. фиг. 7 [32] и соответствующий эксперимент [40]).

Наиболее интересные задачи статистической нелинейной акустики связаны с рассмотрением взаимодействия регулярных и случайных волн. Изучение таких задач только начинается. Подход, использованный в работе [32], в несколько модифицированной форме позволяет дать аналитическое описание процесса, изображенного на фиг. 8. Нетрудно видеть, что в результате взаимодействия широкополосного шума со спектром  $S^N$  и регулярной линии  $S^S$  происходит искажение исходного распределения и рождение новых участков спектра  $S^{N,S}$ . Нелинейная динамика одного из таких участ-

Фиг. 8. Процесс рождения новых участков спектра  $S^{N,S}$ , происходящий из-за нелинейного взаимодействия спектров шумового возмущения  $S^N$  и гармонического сигнала  $S^S$ . Нумерация кривых от 0 до 5 соответствует различным, последовательно возрастающим значениям  $\sigma$



ков — пьедестала у подножия 1 гармоники сигнала — достаточно полно отражена на фигуре. Нужно указать, что эти задачи имеют прямое отношение к проблеме затухания звука из-за фонон-фононных взаимодействий.

**Газодинамическое приближение.** Результаты, о которых говорилось выше, относились к традиционному для акустики так называемому второму приближению. Принципиальный интерес представляет учет членов более высокого, третьего порядка малости в исходных уравнениях. В третьем приближении картина распространения волны конечной амплитуды усложняется. Это связано с тем, что волна перестает быть простой после образования в ней разрывов. Если гладкие участки профиля могут быть описаны соотношениями Римана, то разрывы уже необходимо считать ударными волнами и описывать их разностными соотношениями, отличающимися от римановых в членах третьего порядка малости. Поэтому параметры, характеризующие волну, три трансформации гладких участков профиля в разрывные изменяются скачком, что приводит к появлению отраженных от разрывов волн. Волна, отраженная от одного разрыва, связана с амплитудой последнего выражением [16]

$$(16) \quad \frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma+1)^2}{192} \left( \frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3$$

При распространении периодического возмущения образующиеся в волне разрывы становятся источниками обратных волн — однополярных импульсов разрежения. При наличии многих разрывов эти импульсы складываются, приводя к появлению постоянного течения  $\sim M^2$  от источника звука в направлении распространения исходной волны [17].

**Акустические течения.** Затухание звука в жидкостях и газах приводит к появлению медленного течения среды — так называемого акустического ветра. Его описание представляет собой смежную проблему нелинейной акустики и гидродинамики. Стационарные режимы течений изучаются давно, их пространственная структура описана достаточно полно. Временное же поведение скорости потока  $U$  стало рассматриваться гораздо позд-

нее. Среди задач об установлении одномерного течения решена, в частности задача, соответствующая геометрии Эккарта [24]:

$$(17) \quad \frac{U}{U_0} = 4 \frac{r_0}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(2)})^2 J_1^2(\mu_n^{(2)})} \left[ J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r_1\right) - \frac{\mu_n^{(2)}}{2} \frac{r_1}{r_0} J(\mu_n^{(2)}) \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}\right)^2 \frac{\eta}{\rho_0} t\right] \right\} \left[ J_0\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r\right) - J_0(\mu_n^{(2)}) \right].$$

Здесь  $r_0$  — радиус трубы,  $r_1$  — радиус звукового пучка. Полученное выражение описывает процесс релаксации радиального профиля скорости к установившемуся распределению. Это позволило оценить характерное время формирования акустического ветра на таких расстояниях от излучателя, где изменением скорости потока вдоль оси можно пренебречь.

Для исследования неодномерных течений получено нелинейное асимптотическое уравнение, справедливое вблизи оси звукового пучка [25]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = F(x) + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\eta}{\rho_0} b^2(x) U.$$

В этом уравнении учтена возможность как локального нарастания скорости течения под действием распределенной силы  $F(x)$ , так и «диссипативных» механизмов — оттока импульса от оси и перераспределения его вдоль оси системы. Показано, что при наличии нелинейности эти факторы приводят к немонотонной зависимости скорости течения от времени. На основе аналитических выражений сделан вывод о том, что даже в линейном приближении процесс установления неодномерных потоков определяется тремя характерными временами и, следовательно, является гораздо более сложным по сравнению с эскартовским процессом. Исследованы законы подобия акустических течений. Показано, что для воспроизведения адекватных экспериментальных условий необходимо соблюдать равенство гидродинамических чисел Рейнольдса и Фруда, включающих в себя акустические параметры процесса.

В заключение хочется подчеркнуть, что приближение медленно меняющегося профиля является мощным инструментом анализа различных проблем, возникающих в нелинейной акустике. Многие задачи уже решены, но многие еще стоят на очереди.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Хохлов. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях. Радиотехника и электроника, 1961, 6, 6, 917—925.
2. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1961, 3, 52—61.
3. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. К теории простых магнитогидродинамических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. ЖЭТФ, 1961, 41, 2, 534—543.
4. С. И. Солуян. Магнитозвуковые волны в цилиндрическом плазменном шнуре с учетом нелинейности и поглощения. ЖЭТФ, 1962, 43, 1, 185—192.
5. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Цилиндрические волны конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1962, 4, 65—71.
6. А. Л. Полякова, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде. Акуст. ж., 1962, 8, 1, 107—112.
7. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 220—227.
8. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж., 1963, 9, 1, 54—60.
9. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. О нелинейном взаимодействии звуковых волн в поглощающей среде. Акуст. ж., 1963, 9, 2, 192—197.
10. В. В. Анисимов, Р. В. Хохлов. Об ударных волнах, образующихся при обтекании тонких профилей вязким газом. ПММ, 1964, 28, 35, 557—563.
11. R. V. Khokhlov, S. I. Soluyan. Propagation of acoustic waves moderate amplitude through dissipative and relaxing media. Acustica, 1964, 14, 5, 241—247.

12. R. V. Khokhlov, K. A. Naugolnych, S. I. Soluyan. Waves of moderate amplitudes in absorbing media. *Acustica*, 1964, 14, 5, 248—253.
13. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Параметрический усилитель ультразвука. *Акуст. ж.*, 1966, 12, 2, 188—191.
14. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Ультразвуковой комбинированный усилитель на сульфиде кадмия. *Акуст. ж.*, 1966, 12, 4, 435—442.
15. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян. Об одной возможности усиления акустических волн. *Акуст. ж.*, 1967, 13, 2, 296—298.
16. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. О формировании отраженных волн на разрывах в звуковой волне. *Акуст. ж.*, 1969, 15, 3, 414—420.
17. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. К теории волн конечной амплитуды в диссипативной среде. *Вестн. МГУ*, 1969, 5, 33—38.
18. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. *Акуст. ж.*, 1969, 15, 1, 40—47.
19. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Сходящиеся и расходящиеся звуковые пучки в нелинейных средах. *Акуст. ж.*, 1970, 16, 1, 49—53.
20. О. В. Руденко, С. И. Солуян. Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах. *Докл. АН СССР*, 1970, 190, 4, 815—818.
21. О. В. Руденко, С. И. Солуян. Распространение волн конечной амплитуды в идеальном диссоциирующем газе. *Акуст. ж.*, 1970, 16, 1, 161—163.
22. О. В. Руденко, С. И. Солуян. К вопросу об отражениях на разрывах в звуковой волне и их роли в формировании акустического ветра. *Тр. МИНХ*, 1970, 96, 7—12.
23. О. В. Руденко, С. И. Солуян. О некоторых предельных переходах и законах подобия в теории акустических течений. *Тр. МИНХ*, 1970, 96, 108—111.
24. О. В. Руденко, С. И. Солуян. К теории нестационарного акустического ветра. *Акуст. ж.*, 1971, 17, 1, 122—127.
25. О. В. Руденко, С. И. Солуян. О немонотонности процесса установления акустического ветра. *Акуст. ж.*, 1971, 17, 2, 273—278.
26. O. V. Rudenko, N. G. Semanova, S. I. Soluyan. To the Theory of the Streams caused by sound waves. VII ICA, Budapest, 1971, 25P4, 401—404.
27. О. В. Руденко, С. И. Солуян. К вопросу о рассеянии звука на звуке. *Акуст. ж.*, 1972, 18, 3, 421—425.
28. О. В. Руденко, А. С. Чиркин. Распространение случайно-модулированных волн в недиспергирующих нелинейных средах. *Тр. V Всес. симпозиума по дифракции и распространению волн. Ереван*, 1973, 1, 457—461.
29. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде. *Акуст. ж.*, 1973, 19, 6, 871—876.
30. О. В. Руденко. О параметрическом усилении бегущих звуковых волн. *Акуст. ж.*, 1974, 20, 1, 108—111.
31. О. В. Руденко, А. С. Чиркин. О распространении случайно-модулированного звукового сигнала конечной амплитуды. *Акуст. ж.*, 1974, 20, 297—301.
32. О. В. Руденко, А. С. Чиркин. О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей. *Докл. АН СССР*, 1974, 214, 5, 1045—1048.
33. J. M. Burgers. A Mathematical Model illustrating the Theory of Turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 1948, 1 (Русск. пер. Проблемы механики. М., Изд-во иностр. лит., 1955)
34. E. Hopf. The partial differential equation  $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$ . *Comm. Pure Appl. Math.*, 1950, 3, 201.
35. J. D. Cole. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 1951, 9, 3, 225.
36. S. Fubini-Ghiron. Pressione di radiazione acustica l'onde di grandi ampiezza. *Alta Frequenza*, 1935, 4, 530.
37. R. D. Fay. Plane sound waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. America*, 1931, 3, 222.
38. J. C. Lockwood, T. G. Muir, D. T. Brackstock. Directive harmonic generation in the radiation field of a circular piston. *J. Acoust. Soc. America*, 1973, 53, 4, 1148—1153.
39. D. F. Pernet, R. C. Payne. Non-linear propagation of signals in air. *J. Soud Vib.*, 1971, 17, 3, 383—396.
40. F. M. Pestorius, D. T. Brackstock. Propagation of finite-amplitude noise. 1973-Symposium on finite-amplitude wave effects in fluids, 1,3, Copenhagen, 1973.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
Физический факультет

Поступила  
16 января 1974 г.