

$\alpha = \text{const}$, и функция $D_{nm}(\omega)$ в данном случае из пространственно-передаточной превращается в обычную передаточную функцию $D(\omega)$, что позволяет вынести ее за знак суммы в (3):

$$(6) \quad S_2(\omega) = D(\omega) \frac{\rho^2}{r} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M P_m P_n e^{-i(\kappa_m r + \kappa_{nm} r - \pi/2)},$$

где $D(\omega) = \frac{-2 \cdot i \cdot 1524}{\omega} |D_1(\omega)| e^{i \arg D_1(\omega)}$.

Значения $|D_1(\omega)|$ и $\arg D_1(\omega)$, полученные в работе [4], даны в таблице. На фиг. 4 и 5 представлены частотные характеристики $|S_2(f)|$ и $|S(f)|$ для расстояний $r=146$ и 200 км соответственно в диапазоне частот $360 \div 440$ гц (частотная характеристика $|S(f)|$ показана в логарифмическом масштабе, $|S_2(f)|$ — в линейном).

Авторы благодарят Ю. А. Клокову и О. М. Елкну за помощь в проведении расчетов, а В. П. Югая за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Клещев. Энергетические спектры рассеянного поля стационарного случайного сигнала в морской среде. Акуст. ж., 1972, 18, 3, 476—477.
2. И. Толстой, К. С. Клей. Акустика океана. М., «Мир», 1969.
3. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.
4. А. А. Клещев, Л. С. Шейба. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 264—268.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила
14 ноября 1972 г.

УДК 534.222:532.528

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПРИ КАВИТАЦИИ

В. А. Красильников, В. П. Кузнецов

Возбуждение интенсивных звуковых волн в жидкости часто сопровождается кавитацией [1]. Возникновение кавитации в свою очередь приводит к появлению в среде значительной дисперсии фазовой скорости распространения волн. Соответствующая дисперсионная зависимость для плоской волны имеет вид [2]:

$$(1) \quad k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{4\pi n R_0 c_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\mu\omega} \right)^{1/2},$$

где k — волновое число, ω — частота волны, c_0 — скорость звука в жидкости без кавитации, n — количество пузырьков в единице объема жидкости, R_0 — равновесный радиус пузырька, ω_0 — резонансная частота пузырька [3], μ — коэффициент затухания колебаний пузырька.

Если концентрация пузырьков в жидкости невелика, т. е. $|4\pi n R_0 c_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2 - i\mu\omega)| \ll 1$, выражение (1) можно упростить и привести к виду

$$(2) \quad k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{2\pi n R_0 c_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\mu\omega} \right).$$

Рассмотрим область частот $\omega < \omega_0$ при условии $\mu < \omega_0$. В этом случае

$$(3) \quad k = \frac{\omega}{c} + ib\omega^2 + d\omega^3,$$

где

$$c = c_0(1 + 2\pi n R_0 c_0^2 / \omega_0^2)^{-1},$$

$$b = 2\pi n R_0 c_0 \mu / \omega_0^4,$$

$$d = 2\pi n R_0 c_0 / \omega_0^4.$$

В линейном приближении для волны колебательной скорости $u(x, \tau)$ распространяющейся вдоль оси x в положительном направлении в системе координат, движущейся в том же направлении со скоростью c , имеет место следующее уравнение (в переменных $x, \tau = tx/c$):

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + d \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}.$$

При конечной амплитуде возмущений уравнение (4) должно содержать нелинейный член $au \frac{\partial u}{\partial \tau}$ [4]. В жидкой среде с пузырьками кроме нелинейности гидродинамического характера появляются эффекты, вызванные нелинейными колебаниями пузырька. Оценки показывают, что вблизи резонанса эта нелинейность может играть главную роль; однако вдали от резонансной частоты пузырька, при $\omega \gg \omega_0$, ею можно пренебречь и поэтому мы будем учитывать лишь гидродинамическую нелинейность.

Таким образом, полное уравнение, описывающее распространение плоских нелинейных волн в жидкости при кавитации, имеет вид

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - au \frac{\partial u}{\partial \tau} = b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + d \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3},$$

где $a = (\gamma + 1)/2c$, $\gamma = c_p/c_v$; b — коэффициент затухания, учитывающий как затухание волны в среде, характеризуемое коэффициентом

$$b' = \frac{1}{2\rho_0 c_0^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \quad [5],$$

так и потери при колебаниях пузырьков, определяемые коэффициентом $b'' = 2\pi n R_0 c_0 \mu / \omega_0^4$. (вдали от резонанса пузырьков $b = b' + b''$); $d = 2\pi n R_0 c_0 / \omega_0^4$ — параметр дисперсии, зависящий от размера пузырьков и их концентрации. Здесь η — коэффициент сдвиговой вязкости, ζ — коэффициент объемной вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, c_v и c_p — теплоемкость при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно.

Уравнение (5) без диссипативного члена $b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ обычно называют уравнением

Кортевега — де Вриза. Оно было получено для воли на поверхности воды и волн в плазме. Этому уравнению и его решениям посвящено много работ [6]. Здесь мы приведем одно приближенное решение [7] этого уравнения в спектральной форме, справедливое при условиях $\omega^2 b x < 1$ и $\omega^3 d x < 1$:

$$(6) \quad \tilde{u}(x, \omega) = \exp(i\omega^3 d x - \omega^2 b x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega a x u(0, \tau)}}{i\omega a x} e^{-i\omega \tau} d\tau,$$

где $\tilde{u}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) \exp(-i\omega \tau) d\tau$.

Граничное условие при $x=0$ запишем в виде $u(0, \tau) = f(\tau)$. Если при $x=0$ имеется гармонический источник $uf(\tau) = u_0 \sin \Omega \tau$, то из формулы (6) можно получить реше-

ние в виде тригонометрического ряда:

$$(7) \quad u(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\sigma) \exp(-m^2\sigma/\text{Re}) \sin(m\Omega\tau - m^3\sigma/D),$$

где $\sigma = a\Omega u_0 x$ — безразмерное расстояние от источника, $D = au_0/d\Omega^2$ — параметр дисперсии, $\text{Re} = au_0/b\Omega$ — число Рейнольдса,

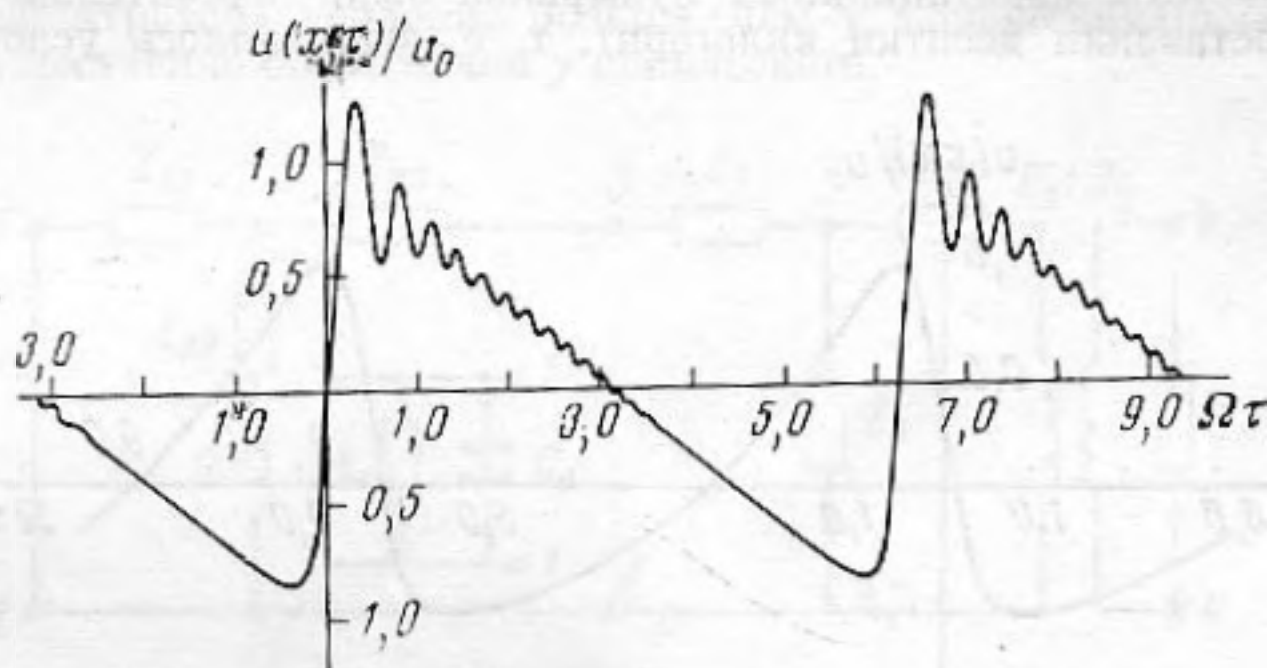
$$B_m(\sigma) = \begin{cases} \frac{2u_0}{m\sigma} I_m(m\sigma), & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 1 \\ \frac{2u_0}{m\sigma\pi} \left[z_0 + \int_{z_0}^{\pi} \cos m(\sigma \sin z - z) dz \right] & \text{при } 1 \leq \sigma \leq \infty, \end{cases}$$

а z_0 — определяется из уравнения $z_0 = \sigma \sin z_0$.

Последнее выражение для коэффициентов $B_m(\sigma)$ было впервые получено в работе [8] при точном решении задачи для случая $b=0$ и $d=0$.

Можно отметить, что асимптотики формулы (7) при $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow 0$ и $d \rightarrow 0$ совпадают с точными решениями соответствующих уравнений.

Конечная сумма членов тригонометрического ряда (7) при $m=50$, вычисленная на ЭВМ, приведена на фиг. 1 для $\sigma=2,0$, $D=2 \cdot 10^3$, $\text{Re}=10^3$. Результаты показывают, что полученное синусоидальное возмущение вначале ведет себя подобно обычной



Фиг. 1

нелинейной волне в среде без пузырьков: крутизна фронтов увеличивается и форма волны приближается к пилообразной. На расстояниях от источника порядка $\sigma \sim 1$ начинает сказываться дисперсия, обусловленная наличием пузырьков. На фиг. 1 видны возникающие в течение положительного полупериода «зародыши» так называемых солитонов [6, 9]. Численное решение задачи о распространении нелинейной волны в среде с дисперсией для заданного значения параметра D было получено в работе [9], где приводится пример процесса «рассыпания» синусоидального возмущения конечной амплитуды на солитоны. Сравнение с результатами этой работы указывает на хорошее качественное совпадение формы волны, полученной в [9], с приведенной на фиг. 1.

Рассмотрим теперь область частот $\omega > \omega_0$ при условии $\mu < \omega_0$. В этом случае, ограничиваясь лишь квадратичными членами, получим из (2)

$$(8) \quad k = \frac{\omega}{c_0} - \beta \frac{1}{\omega},$$

где $\beta = 2\pi n R_0 c_0$.

Аналогично приведенному выше случаю получаем для волны скорости $u(x, \tau)$ нелинейное уравнение в переменных x и $\tau = t - x/c_0$ в виде

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - au \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \beta u = 0.$$

Если в среде имеется затухание, уравнение (9) должно содержать член вида $\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}$, при этом (9) переходит в уравнение

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - au \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) + \beta u = 0,$$

где $b = b'$.

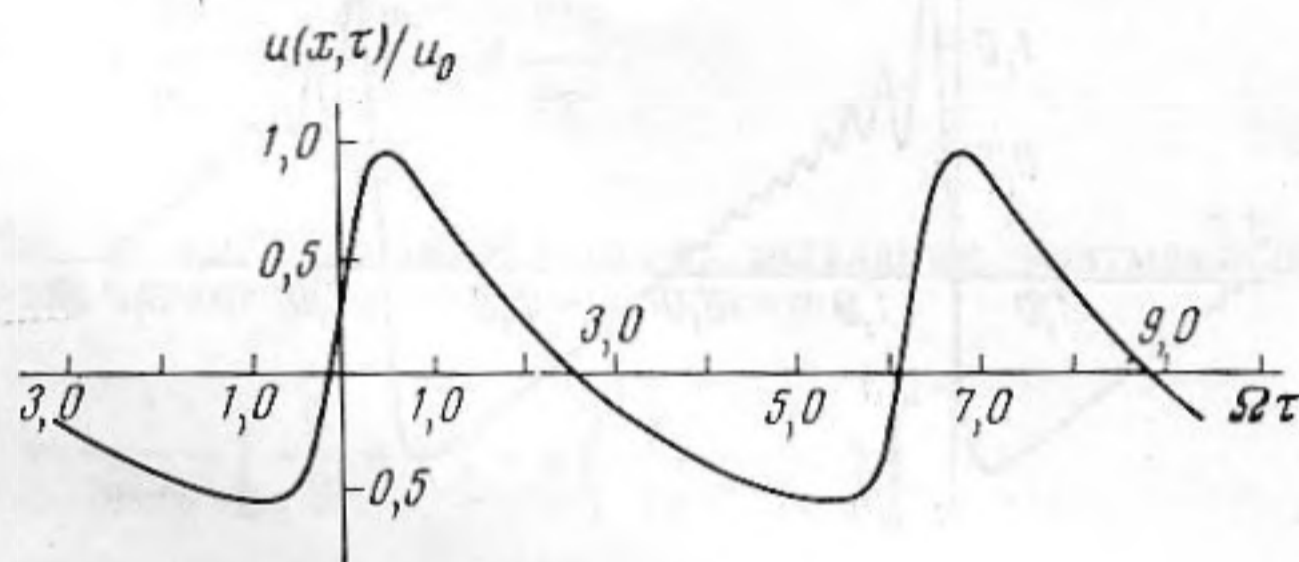
Решение этого уравнения с граничным условием $u(0, \tau) = u_0 \sin \Omega \tau$, применимое при $\omega^2 b x < 1$ и $\beta x / \omega < 1$, имеет вид:

$$(11) \quad u(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\sigma) \exp(-m^2 \sigma / \text{Re}) \sin(m \Omega \tau + \sigma / m S),$$

где $S = au_0 \Omega^2 / \beta$, а остальные обозначения те же, что и в формуле (7).

На фиг. 2 изображена функция $u(x, \tau) / u_0$, вычисленная на ЭВМ по формуле (11) для значений $\sigma = 2,0$, $S = 5,0$, $\text{Re} = 50,0$ и $m = 50$. Здесь так же, как и в случае низких частот $\omega < \omega_0$, вначале синусоидальное возмущение искажается и на расстояниях от излучателя $\sigma \sim 1$ образуется ударный фронт, а затем начинает влиять дисперсионный член βu , вызывая несимметричное искажение формы волны: часть волны, соответствующая положительному полупериоду обостряется, а соответствующая отрицательному — сглаживается и уменьшается по амплитуде быстрее, чем положительная.

В работе [10], где экспериментально исследовалось распространение ультразвука с интенсивностью $35-40 \text{ вт/см}^2$ и частотой 1 мГц в воде было обнаружено искажение волны, возникающее после образования кавитации. Оценки показывают, что резонансные частоты кавитационных пузырьков были значительно ниже частоты волны (они составляли десятки килогерц), т. е. выполнялось условие $\omega > \omega_0$. При



Фиг. 2

сравнении формы волны, наблюдавшейся экспериментально в работе [10], и формы волны, рассчитанной здесь по формуле (11) (фиг. 2), обнаруживается хорошее качественное совпадение.

Экспериментальные условия, близкие к случаю $\omega < \omega_0$, имели место в работе [11], где было обнаружено зарождение солитонов на соответствующей положительному полупериоду части волны, что также качественно согласуется с нашими расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Зарембо, В. В. Шкловская-Корди. К вопросу о скорости распространения ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкости. Акуст. ж., 1960, 5, 1, 47—51.
2. Е. Скучик. Основы акустики. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Г. Флинн. Физика акустической кавитации в жидкости. В сб.: Физическая акустика под ред. У. Мэсона. М., «Мир», 1967.
4. В. П. Кузнецов. Уравнения нелинейной акустики. Акуст. ж., 1970, 16, 4, 548—553.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
6. В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
7. В. П. Кузнецов. К теории нелинейных волновых процессов. Дис., Акустический ин-т, М., 1971.
8. D. T. Blackstock. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude. J. Akoust. Soc. Amer., 1966, 39, 6, 1019.
9. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal. Interaction of «solutions» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Letters, 1965, 10, 15, 6, 240.

10. В. А. Буров, В. А. Красильников. Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. Докл. АН СССР, 1958, 118, 5, 920—923.
11. С. С. Кугателадзе и др. О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде. Докл. АН СССР, 1972, 207, 2, 313.

Акустический институт
Академии наук СССР

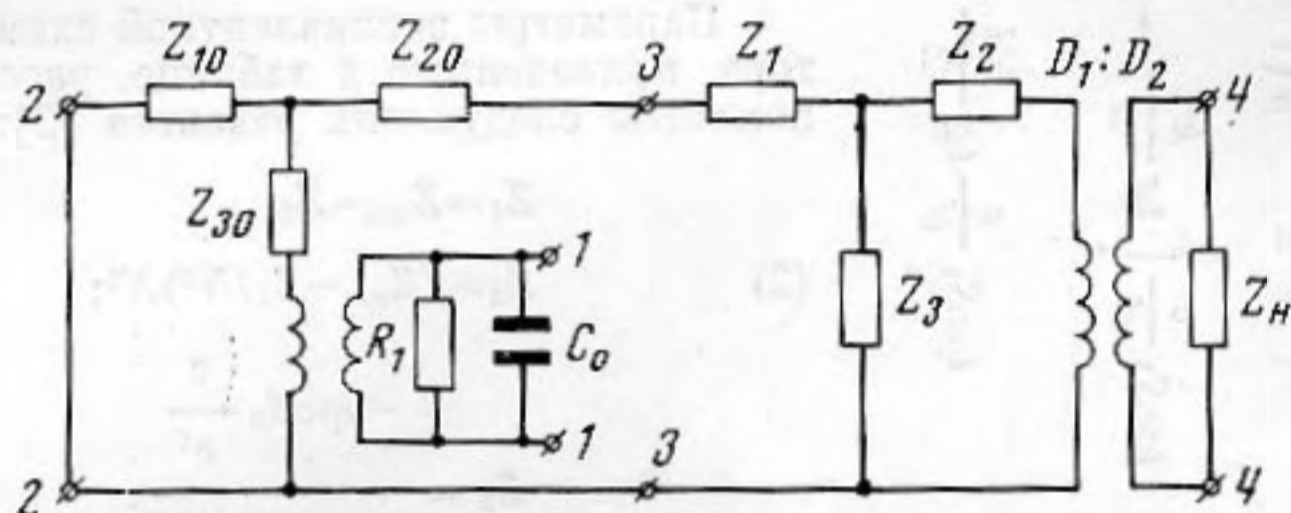
Поступила
21 декабря 1973 г.

УДК 534.232

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ

А. Я. Снытко

Волноводы переменного сечения — концентраторы — находят широкое применение в технике ультразвука для увеличения амплитуды колебаний рабочего конца ультразвуковых инструментов. В работе [1] Меркуловым рассмотрена теория концентраторов трех типов: конического, экспоненциального, катеноидального. Эти концентраторы обладают приблизительно одинаковым коэффициентом усиления амплитуды при малых значениях параметра N ($N < 5$), где $N = \frac{D_1}{D_2}$, D_1 и D_2 — диаметры входного и выходного сечения концентратора. При больших значениях N у катеноидального концентратора усиление больше, чем у экспоненциального, а у экспоненциального существенно больше, чем у конического.



Эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя, нагруженного через концентратор

Расчислявая колебательную систему, состоящую из магнитострикционного или пьезоэлектрического преобразователей и однородного волновода, часто пользуются методами теории четырехполюсников, представляя преобразователь и волновод в виде Т-образной или П-образной эквивалентной схемы. Расчет упрощается, если для определения резонансной частоты колебательной системы и входных импеданцев волноводных нагрузок применяется номограмма Вольперта [2, 3]. Аналогичный метод расчета можно применить и для преобразователей с концентраторами, если концентратор представить эквивалентной схемой.

В радиотехнике [2] известен прием построения эквивалентной схемы несимметричного четырехполюсника (в качестве которого может рассматриваться концентратор) в виде однородного волновода и двух трансформаторов на его входе и выходе. Однако этот прием не удобен из-за громоздких выражений для эквивалентной постоянной распространения и для коэффициентов трансформации, которые в данном случае зависят от длины волновода. Рассмотрим другой, более удобный способ построения эквивалентной схемы ультразвукового концентратора в виде несимметричного четырехполюсника и последовательно подключенного к нему трансформатора с коэффициентом трансформации N . Применительно к экспоненциальному концентратору этот способ использован в работе [4].

Эквивалентная схема для колебательной системы, состоящей из пьезоэлектрического стержневого преобразователя и концентратора, нагруженного на импеданс Z_H , представлена на фигуре. Параметры схемы определены в таблице для всех трех типов концентраторов. На фигуре и в таблице приняты следующие обозначения: Z_{10} , Z_{20} , Z_{30} — импедансы Т-образной схемы преобразователя; Z_1 , Z_2 , Z_3 — импедансы Т-образной схемы концентратора; S_0 — площадь поперечного сечения преобразователя; S_1 и S_2 — площадь входного и выходного сечений концентратора; l_0 — длина преобразователя; l — длина концентратора; ρ_0 и ρ_1 — плотность материала преобразователя.