АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 4

УДК 534.874.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПУЗЫРЬКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

А. В. Чалов

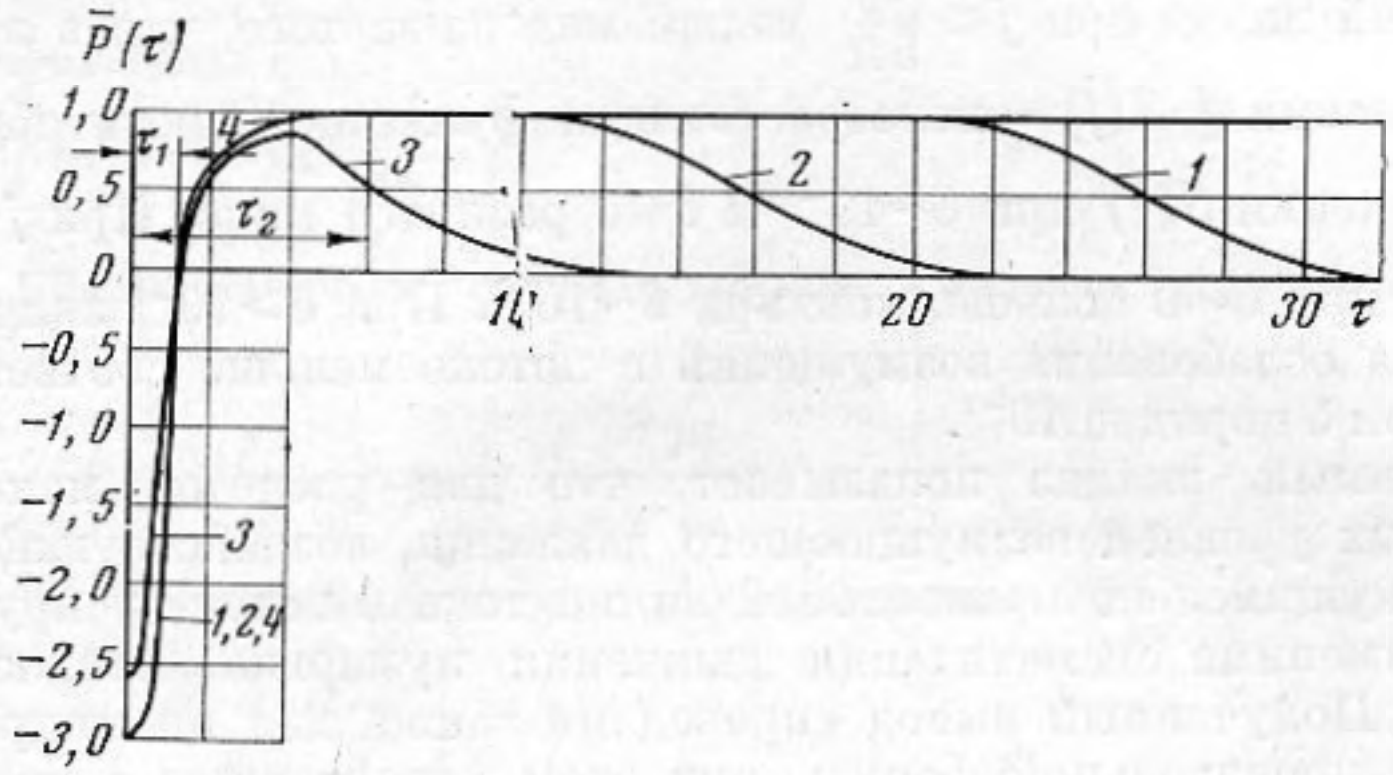
Рассмотрено излучение акустической энергии газовым пузырьком, движущимся в потоке жидкости у эллиптического цилиндра, обтекаемого под нулевым углом атаки. Произведено сравнение полученного результата с известным решением для кругового цилиндра.

Находящийся в жидкости газовый пузырек при воздействии возмущающего давления испытывает изменение объема и излучает звуковую энергию. Если возмущающее давление описывается апероидической функцией времени, то достаточно знать спектр возмущения, чтобы определить спектр звукового давления, создаваемого пузырьком [1]. Апероидическое изменение давления имеет место при движении пузырька в поле гидродинамического давления обтекаемых тел. Для случая кругового цилиндра спектр создаваемого пузырьком звукового давления найден в работе [1]. Представляет интерес рассмотреть более общий случай эллиптического цилиндра.

Рассмотрим постановку задачи. В работе [1] предполагалось, что пузырек движется по контуру цилиндра с местной скоростью его обтекания идеальной жидкостью. Поэтому в соответствии с известным из теоретической гидродинамики фактом, что частица, попав в критическую точку тела, остается в ней бесконечное время, оказалось, что время движения пузырька по контуру цилиндра бесконечно велико. Очевидно, реальный пузырек независимо от его местоположения в потоке движется вблизи контура цилиндра конечное время. Он излучает звуковую энергию на всем пути движения, так как возмущения от присутствия цилиндра в потоке существуют во всем объеме жидкости. При этом остается неясным, как в этом случае величины, характеризующие акустическое излучение пузырька, разнятся с найденными в работе [1]. Нижеследующий анализ показывает, что для приближенных оценок спектров схематизация движения пузырька, предложенная в работе [1], является применимой.

На фиг. 1 представлены графики зависимости возмущающего давления от времени в предположении, что пузырек из бесконечности движется по линии тока, близкой к нулевой, с местной скоростью потока идеальной жидкости, обтекающего круговой цилиндр. На графиках, рассчитанных с использованием работы [2], приняты следующие обозначения: $\bar{p}(\tau)=\dfrac{p(\tau)-p_0}{\rho u_0^2/2}$, где $p(\tau)$ — мгновенное давление в жидкости, воздействующее на пузырек, p_0, u_0 — давление и скорость потока на бесконечности соответственно, ρ — массовая плотность жидкости, $\tau=\dfrac{2u_0t}{R}$, где R — радиус цилиндра и t — время. Параметром семейства кривых *1—4* является

$\delta=\Delta/R$, где Δ — отстояние линий тока от нулевой на бесконечности. Кривые *1—4* отвечают значениям δ, равным соответственно 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 0. Значение $\tau=0$, относительно которого кривые симметричны, соответствует моменту пересечения пузырьком плоскости, перпендикулярной потоку и проходящей через ось цилиндра. Из фигуры видно, что при δ, отличном от нуля $\bar{p}(\tau)$, описывает знакопеременный и бесконечный импульс (для простоты на графиках приведены лишь правые ветви кривых $\bar{p}(\tau)$). Область отрицательных значений $\bar{p}(\tau)$ соответствует прохождению пузырьком зоны разрежения в области максимальной толщины цилиндра, положительных — зоны повышенного давления, в области передней и задней критических точек. При $\tau\to\infty$ $p(\tau)$ асимптотически стремится к 0 со скоростью τ^{-2}. При $\delta\ll10^{-1}$ ее влияние на экстремальные



Фиг. 1

значения и ширину минимума кривых мало, однако ширина максимума меняется существенно. Она возрастает при уменьшении δ, становясь бесконечной в пределе при $\delta=0$ (кривая *4*). Последний случай соответствует рассмотренному в работе [1]. При значениях $\delta\sim10^{-1}$ и выше уменьшение экстремальных значений кривой $\bar{p}(\tau)$ становится заметным и в пределе при $\delta\to\infty$ эта кривая вырождается в ось абсцисс.

Рассмотрим частотные спектры возмущающего давления. При $\delta\neq0$ аналитическое выражение для $\bar{p}(\tau)$ получить невозможно. Однако очевидно, что эта апериодическая функция удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема. Поэтому ее можно представить в виде интеграла Фурье. Из рассмотрения физической картины движения пузырька следует, что функция $\bar{p}(\tau)$ непрерывна вместе со всеми ее производными. Тогда из теоремы о связи спектров функции и ее производных [3] следует, что спектральная плотность для $\bar{p}(\tau)$ сильно убывает на высоких частотах; в частности, в ее выражении должен содержаться множитель в виде экспоненты или гиперболической функции частоты. Последний результат качественно совпадает с тем, который получен в работе [1] для $\delta=0$. Кроме того, из рассмотрения кривых *1—4* можно заключить, что значения характерной частоты, начиная с которой спад спектра становится заметным, весьма слабо зависят от δ. Из работы [1] следует, что по порядку величин это значение равно $\frac{u_0}{5R}$. На низких частотах спектральная плотность с уменьшением частоты убывает при $\delta\neq0$, в то время как при $\delta=0$ она стремится к постоянной. Обозначим характерные промежутки времени изменения $\bar{p}(\tau)$ через τ_1 и τ_2. Когда $\tau_2\gg\tau_1$ форму импульсов и их спектры можно считать практически теми же, что и при $\delta=0$.

Для анализа случая $\tau_1\sim\tau_2$ оценим значения интеграла $\int\limits_0^\infty \bar{p}^2(\tau)\,d\tau$, пропорционального энергии возмущающего давления, при $\delta\sim10^{-1}$ и $\delta=0$

(кривые *3* и *4* соответственно). Последний интеграл в основном определяется значениями $\bar{p}(\tau)$ при τ, не превышающем нескольких единиц. Вклад же значений $\bar{p}(\tau)$ при больших τ незначителен из-за весьма быстрого убывания $\bar{p}(\tau)$. Отсюда с учетом анализа кривых *3* и *4* получим, что значения данного интеграла при $\delta \sim 10^{-1}$ и $\delta=0$ разнятся мало. Тогда, используя теорему Рэйли, аналогичный результат мы получим и для интеграла $\int\limits_0^\infty S^2(f)\,df$, где $S(f)$ — спектральная плотность амплитуд возмущающего давления. Как следует из предыдущего, вклад в последний интеграл значений $S(f)$ при f, превышающих $\sim \frac{u_0}{5R}$, незначителен. Аналогичный вклад при $f \ll \frac{u_0}{5R}$ также мал из-за того, что в этом случае при уменьшении f $S(f)$ — невозрастающая функция. Таким образом, при $f \sim \frac{u_0}{5R}$ значения $S(f)$ при $\delta \sim 10^{-1}$ и $\delta=0$ разнятся мало. При $f \ll \frac{u_0}{5R}$ значения $S(f)$ при $\delta=0$ больше, чем при $\delta \sim 10^{-1}$. При $\delta > 10^{-1}$ значения $\bar{p}(\tau)$ и $S(f)$ из-за ослабевания возмущений в потоке меньше соответствующих значений при δ порядка 10^{-1}.

Проведенный анализ показывает, что для расчетов максимальных спектральных уровней возмущающего давления, воздействующего на пузырек, движущийся по произольной линии тока в потоке у кругового цилиндра, применима схематизация движения пузырька, предложенная в работе [1]. Полученный вывод справедлив также для цилиндров и трехмерных тел произвольной формы, при этом характерные значения δ и f должны определяться в каждом конкретном случае.

Перейдем к рассмотрению излучения звука пузырьком при движении его в потоке вблизи эллиптического цилиндра. В соответствии со сказанным выше будем полагать, что пузырек бесконечно малого радиуса движется по контуру эллипса со скоростью, равной местной скорости обтекания его идеальной жидкостью. Угол атаки положим равным нулю и пренебрежем диффузионными процессами и действием капиллярных сил на поверхности пузырька. Ограничимся рассмотрением линейных колебаний пузырька на нулевой моде. Вид функции возмущающего давления зависит от u_0 и величин продольной и поперечной осей эллипса. Обозначим их соответственно $2a$ и $2b$. В дальнейшем черточкой будем обозначать длины и скорости, отнесенные к a и u_0. Функции $\bar{p}(\tau)$ и $\bar{u}(\tau)$ связаны известным соотношением

$$\bar{p}(\tau)=1-\bar{u}^2(\tau), \tag{1}$$

где $\tau=\frac{2\cdot t\cdot u_0}{a}$. Для нахождения $\bar{u}(\tau)$ используем известное решение [4]

$$\bar{u}(\theta)=\frac{(1+\bar{b})\sin\theta}{(\sin^2\theta+\bar{b}^2\cos^2\theta)^{1/2}}, \tag{2}$$

где $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{y}}{\bar{x}\cdot\bar{b}}$ и x и y — соответственно абсцисса и ордината точек контура эллипса. Текущее время движения пузырька вдоль контура эллипса найдем из выражения

$$\tau=2\int\frac{d\bar{l}(\theta)}{\bar{u}(\theta)}, \tag{3}$$

где

$$d\bar{l}(\theta)=(d\bar{x}^2+d\bar{y}^2)^{1/2}=(\sin^2\theta+\bar{b}^2\cos^2\theta)^{1/2}.$$

Подставляя в формулу (3) выражения для $d\bar{l}(\theta)$ и $\bar{u}(\theta)$ и интегрируя при условии, что $\theta=\frac{\pi}{2}$ при $\tau=0$, находим

$$\tau=\frac{2}{1+\bar{b}}\left[(\bar{b}^2-1)\cos\theta+\bar{b}^2\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]. \tag{4}$$

Совершая предельные переходы в формулах (2) и (4) при $\theta\to 0$ и $\theta\to\pi$ и используя условия, что $\bar{u}=1+\bar{b}$ при $\tau=0$ и $\bar{u}(\tau)$ — четная функция, получим

$$\bar{u}(\tau)=(1+\bar{b})\operatorname{sech}\frac{1+\bar{b}}{2\bar{b}^2}\tau, \tag{5}$$

и с учетом формулы (1)

$$\bar{p}(\tau)=1-(1+\bar{b})^2\operatorname{sech}^2\frac{1+\bar{b}}{2\bar{b}^2}\tau. \tag{6}$$

Выполняя преобразование Фурье функции $p(t)$, мы приходим к выражению для $S(f)$ [5]

$$S(f)=\pi^2\bar{b}^4\rho a^2 f\operatorname{csech}\frac{\pi^2\bar{b}^2}{1+\bar{b}}\frac{fa}{u_0}. \tag{7}$$

Введем эквивалентный радиус $R_э$, определяемый из соотношения

$$R_э=\frac{2\bar{b}^2a}{1+\bar{b}}=\frac{2r_0}{1+\bar{b}}, \tag{8}$$

где r_0 — радиус кривизны эллипса в критической точке. С учетом формулы (8) можно представить выражение (7) в виде

$$S(f)=\frac{\pi^2}{4}(1+\bar{b})^2\rho R_э^2 f\operatorname{csech}\frac{\pi^2}{2}\frac{R_э f}{u_0}. \tag{9}$$

Это выражение с точностью до множителя $\frac{(1+\bar{b})^2}{4}$ совпадает с аналогичным выражением для кругового цилиндра с радиусом $R_э$. Физически такая аналогия объясняется тем, что изменение возмущающего давления от времени в сильной степени зависит от параметров движения вблизи критической точки. Из-за слабого изменения радиуса кривизны малый участок эллипса вблизи критической точки можно уподобить дуге круга с радиусом, близким к радиусу кривизны эллипса в критической точке. При $\bar{b}=1$ эллипс вырождается в круг, $R_э=R$ и формула (9) совпадает с выражением, полученным в работе [1]. При уменьшении $\bar{b}$ спектральные уровни на сходственных безразмерных частотах $\frac{R_э f}{u_0}$ снижаются, одновременно спектр насыщается в области высоких частот. Основную роль играет второе обстоятельство.

В общем виде спектральная плотность давления, индуцированного пузырьком в жидкости на расстоянии r, определяется выражением [1]

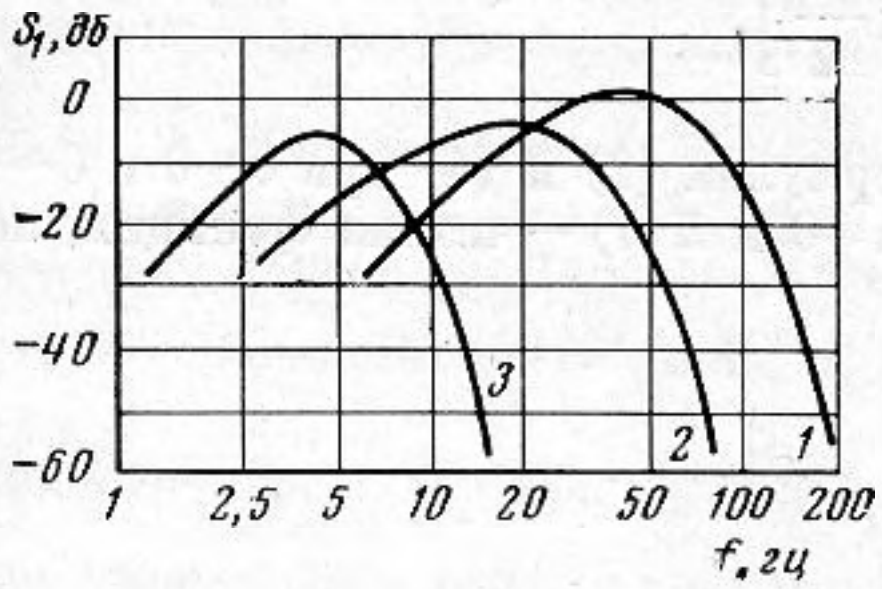
$$S_1(f)=\frac{R_0}{r}A(f)\cdot S(f), \tag{10}$$

где $S_1(f)$ — спектральная плотность индуцированного давления, A — амплитудная характеристика пузырька;

$$A=\left[\left(\frac{f_0^2}{f^2}-1\right)^2+\eta^2\right]^{-1/2} \tag{11}$$

где R_0, f_0 — равновесный радиус и частота собственных колебаний пузырька; η — постоянная затухания.

На фиг. 2 представлена зависимость S_1 от f, полученная с использованием выражений (9), (10) и (11). Кривые построены при следующих значениях параметров: $a=2\cdot10^{-1}$ *м*, $u_0=5$ *м/сек*, $r=1$ *м*, $R_0=10^{-3}$ *м*, $f_0=3{,}3\cdot10^3$ *гц*, $\eta=10^{-1}$, $\rho=10^3$ *нсек²/м⁴*. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\bar{b}$, равным 0,5; 1; 2. Уровни даны в децибелах относительно $2\cdot10^{-5}$ *нсек/м²*. Как и следовало ожидать, уменьшение $\bar{b}$ вызывает расширение диапазона частот, где акустическое излучение пузырька эффективно. Кривая *1* ($R_э=6{,}7\cdot10^{-2}$ *м*) соответствует более насыщенному на высоких частотах спектру, чем кривая *2* ($R_э=2\cdot10^{-1}$ *м*) и особенно — *3* ($R_э=5{,}3\cdot10^{-1}$ *м*). На высоких частотах спектры спадают с ростом частоты со все увеличивающимся темпом.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Strassberg.* Gas Bubbles as Sources of Sound in Liquids. J. Acoust. Soc. America, 1956, *28*, 1, 20–26.
2. *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе.* Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
3. *А. А. Харкевич.* Спектры и анализ. М., Гостехтеориздат, 1957.
4. *F. W. Riegels.* Aerodynamicole profiles. Мюнхен, 1958.
5. *И. М. Рыжик, И. С. Градштейн.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила
25 февраля 1972 г.