

УДК 534.8.081.7

ИЗМЕРЕНИЕ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВИБРАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В. П. Кремлевский, А. А. Степичев

Получены выражения для скорости, давления и силы сопротивления при колебаниях осциллирующего цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что эти результаты можно применить для определения силы сопротивления со стороны вязкой жидкости для изгибно-колеблющегося стержня при низких частотах. Получено волновое уравнение свободных изгибных колебаний стержня в вязкой несжимаемой жидкости. Выведены аналитические зависимости как раздельного определения вязкости и плотности жидкости, так и для определения произведения вязкости жидкости на ее плотность. Проведена экспериментальная проверка, подтвердившая правильность полученных выводов.

Вибрационные вискозиметры и вибрационные плотномеры получили в последнее время значительное распространение, поэтому исследование их свойств является весьма актуальным.

Рассмотрим задачу о свободных изгибных колебаниях однородного упругого стержня в вязкой жидкости, учитывая, что изгибно-колеблющиеся стержневые системы применяются сейчас для измерения как вязкости [1], так и плотности [2]. Для решения этой задачи нужно найти выражение силы сопротивления колеблющемуся стержню со стороны вязкой жидкости и дополнить им известное волновое уравнение для ненагруженного стержня [3].

При этом мы ограничимся реальными размерами стержня, когда $\frac{R}{\lambda} \ll 0,1$, где R — радиус стержня, а λ — длина изгибной волны. В этом

случае применима элементарная теория изгиба. Кроме того, примем $k_l R \ll 1$ [4, 5], где k_l — волновое число для продольной волны в жидкости, что дает право считать последнюю вблизи стержня несжимаемой и пренебречь сопротивлением излучения продольной волны.

Будем полагать, что отдельные элементы изгибно-колеблющегося стержня, представляющие собой элементарные цилиндры длиной dx , смещаются жестко, совершая чисто поперечные колебания. Тогда задачу определения силы сопротивления со стороны жидкости элементу изгибно-колеблющегося стержня длиной dx можно свести к задаче определения силы сопротивления поперечным колебаниям жесткого цилиндра произвольной длины, совершающимся перпендикулярно его оси.

Выражение для определения силы сопротивления со стороны жидкости F для цилиндра с боковой поверхностью S имеет вид [6]

$$(1) \quad F = \int_0^s (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) dS,$$

где на элементарную площадку жидкости dS действуют нормальное напряжение σ_{rr} и касательное $\sigma_{r\theta}$, которые в цилиндрических координатах

r, θ выражаются так:

$$(2) \quad \sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$(3) \quad \sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

Здесь p — давление, η — вязкость жидкости, v_r — радиальная составляющая скорости движения жидкости, v_θ — касательная составляющая скорости движения жидкости.

Таким образом, как следует из формул (1), (2) и (3), для определения силы F надо иметь выражения для p, v_r, v_θ на поверхности цилиндра. Для этого необходимо решить уравнение движения жидкости, возмущаемой колебаниями цилиндра.

Пусть скорость поперечных колебаний жесткого цилиндра

$$u = u_m e^{-i\bar{\omega}t},$$

где u_m — амплитуда скорости, $\bar{\omega} = \omega - i\alpha$ — комплексная круговая частота свободных колебаний цилиндра, ω — круговая частота свободных колебаний цилиндра, α — коэффициент затухания, t — время. Тогда скорость жидкости, возмущаемой цилиндром, можно искать в виде $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_0 e^{-i\bar{\omega}t}$, где $\bar{\mathbf{v}}_0$ зависит только от координат. Подставляя это выражение для \mathbf{v} в уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости [6]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v},$$

получим

$$(4) \quad i\bar{\omega} \rho \bar{\mathbf{v}} = \text{grad } p - \eta \Delta \bar{\mathbf{v}},$$

где ρ — плотность жидкости.

Решая уравнение (4) совместно с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости $\text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0$, получим (см. Приложение):

$$v_r = u \cos \theta \left[\frac{2}{kH_0(kR)} \frac{H_1(kr)}{r} + \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right) \right];$$

$$v_\theta = -u \sin \theta \left[\frac{2}{H_0(kR)} \left(H_0(kr) - \frac{1}{kr} H_1(kr) \right) - \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right) \right];$$

$$p = -i\bar{\omega} \rho u \cos \theta \frac{R}{r} \left(R - \frac{2}{k} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right),$$

где H_0 и H_1 — функции Ганкеля первого рода нулевого и первого порядка, $k = \sqrt{i\bar{\omega} \rho / \eta}$ — волновое число сдвиговой волны.

Определяя p, v_r, v_θ при $r=R$, подставляя их в формулы (2) и (3) и имея в виду, что $dS = R l d\theta$, где l — длина цилиндра, получим после соответствующих преобразований (1) выражение для силы сопротивления

$$F = \pi R l u k \eta \left(-4 \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} + kR \right).$$

Если глубина проникновения волны сдвига меньше радиуса стержня, т. е. $kR \gg 1$, что имеет место на практике, то отношение $\frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \approx -i$ [7].

Тогда выражение для силы сопротивления примет вид

$$F = i\pi R l (4k\eta + \bar{\omega} \rho R) u,$$

откуда при $\frac{\alpha}{\omega} \ll 1$ получим

$$(5) \quad F = -2\pi R l \left\{ \sqrt{2\omega\eta\rho} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right) u + \rho \left[\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right) \right] \frac{du}{dt} \right\}.$$

Отметим, что для режима незатухающих колебаний цилиндра при $kR \gg \gg 1$ Стоксом [8] получено уравнение, близкое к уравнению (5).

Переходя к изгибно-колеблющемуся стержню, заменяя u на $\partial y / \partial t$, где $y(x, t)$ — смещение элемента стержня длиной dx абсциссы x , мы получим выражение для элементарной силы сопротивления dF :

$$(6) \quad dF = -2\pi R dx \left\{ \sqrt{2\omega\eta\rho} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right) \frac{\partial y}{\partial t} + \left[\rho \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{2\omega\eta\rho}}{\omega} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\}.$$

При составлении волнового уравнения для изгибных колебаний стержня в вязкой жидкости необходимо иметь в виду, что в реальных конструкциях стержень погружен в жидкость не полностью. При этом относительно небольшая величина нагрузки со стороны жидкости позволяет распределить ее равномерно по всей длине стержня, но с учетом коэффициента нагрузки $\beta \leq 1$. Поэтому при дополнении известного волнового уравнения [3] выражением (6) силу сопротивления со стороны вязкой жидкости надо умножить на коэффициент нагрузки β . Кроме того, в реальных конструкциях следует учесть силу сопротивления $dF_0 \approx 2\alpha_0 \pi R^2 dx \rho_c \frac{\partial y}{\partial t}$, вызываемую

собственными потерями, главным образом в узле крепления стержня, где α_0 — коэффициент затухания, ρ_c — плотность материала стержня. Тогда волновое уравнение свободных изгибных колебаний стержня в вязкой несжимаемой жидкости примет вид

$$(7) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \frac{k_\eta}{k_m} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{k_m} \frac{EI}{\rho_c S_c} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0,$$

где S_c — площадь поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга, I — момент инерции,

$$k_\eta = \alpha_0 + \beta \frac{\sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right),$$

$$k_m = 1 + \beta \frac{\rho}{\rho_c} + \beta \frac{2\sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R \omega} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right).$$

Будем искать частные решения уравнения (7) по методу Фурье [9] в виде

$$(8) \quad y(x, t) = X_{(x)} T_{(t)}.$$

Подставляя эти решения в уравнение (7), получим

$$\frac{1}{T_{(t)}} \left[T''_{(t)} + 2 \frac{k_\eta}{k_m} T'_{(t)} \right] = - \frac{1}{k_m} \frac{EI}{\rho_c S_c} \frac{X^{IV}_{(x)}}{X_{(x)}} = -\omega_0^2.$$

Отсюда мы имеем два уравнения для определения $T_{(t)}$ и $X_{(x)}$:

$$(9) \quad T''_{(t)} + 2 \frac{k_\eta}{k_m} T'_{(t)} + \omega_0^2 T_{(t)} = 0,$$

$$(10) \quad X^{IV}_{(x)} - k_m \frac{\rho_c S_c}{EI} \omega_0^2 X_{(x)} = 0.$$

Решение этих уравнений дает выражения для коэффициента затухания

$$(11) \quad \alpha = \frac{k_\eta}{k_m} = \frac{\alpha_0 + \frac{\beta \sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right)}{1 + \beta \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{2\beta \sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R \omega} \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right)}$$

и частоты $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, где частота собственных колебаний стержня в вязкой жидкости

$$(12) \quad \omega_0 \approx \omega_{00} / \sqrt{k_\rho}$$

Здесь ω_{00} — собственная частота колебаний ненагруженного стержня.

$$k_\rho = 1 + \beta \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{2\beta \sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R \omega}$$

Нетрудно видеть, что декрементом затухания в знаменателе выражения (11) можно пренебречь, тогда

$$(13) \quad \alpha \approx \frac{\alpha_0 + \beta \sqrt{2\omega\eta\rho} / \rho_c R}{1 + \beta \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{3}{2} \frac{\beta \sqrt{2\omega\eta\rho}}{\rho_c R \omega}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_\eta}{k_\rho - \frac{\alpha_\eta}{2\omega}}$$

где $\alpha_\eta = \beta \sqrt{2\omega\eta\rho} / \rho_c R$.

Присутствие члена, пропорционального присоединенной массе, в выражении (5) для силы сопротивления дает возможность с помощью преобразователя, совершающего поперечные колебания, разделить

определить η и ρ . Для этого надо одновременно измерять коэффициент затухания преобразователя α и частоту его свободных колебаний ω . Действительно, согласно формуле (12)

$$(14) \quad k_\rho = \frac{\omega_{00}^2}{\omega^2} = \frac{\omega_{00}^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

и формуле (13),

$$(15) \quad \alpha_\eta \approx (\alpha k_\rho - \alpha_0) \left(1 - \frac{\alpha}{2\omega}\right)$$

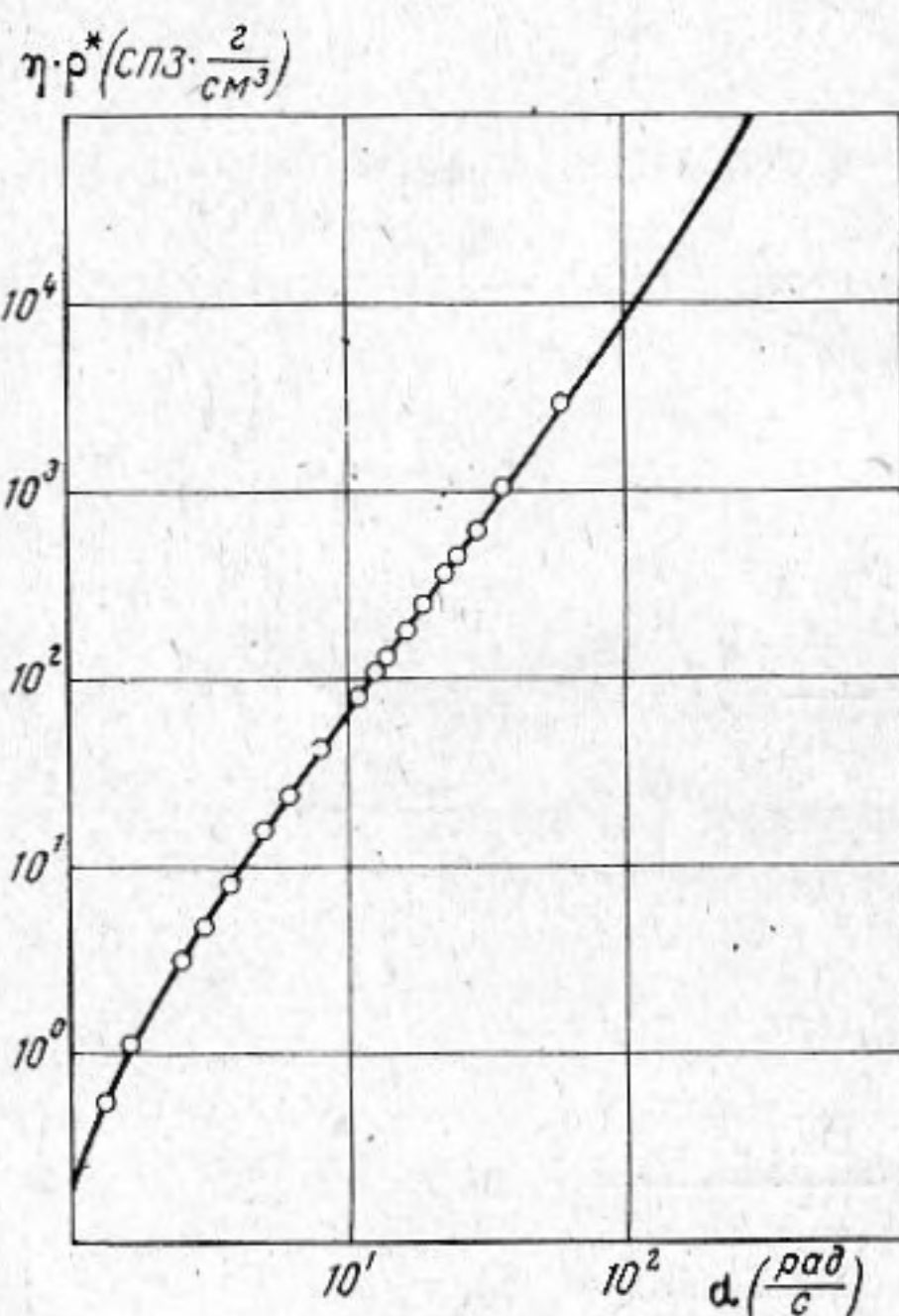
Тогда из формул (13) — (15) следует

$$\rho = \frac{\rho_c}{\beta} \left(k_\rho - \frac{2\alpha_\eta}{\omega} - 1\right);$$

$$\eta = \frac{(\rho_c R \alpha_\eta)^2}{2\beta^2 \omega \rho}$$

Подобный вибратор применяется для измерения плотности веществ [2] с малыми вязкостями путем измерения его собственной частоты.

При измерении таким вибратором параметра, зависящего от вязкости и плотности жидкости, что характерно для вибрационных вискозиметров [10], уравнение, связывающее η и ρ с α , полученное из формул (11) и



Зависимость $\eta\rho^*$ от α

(12), имеет вид

$$(16) \quad \eta \rho^* \approx \frac{\rho_c^2 R^2}{2\beta^2 \omega_{00}} \left(\alpha - \frac{\alpha_0}{1 + \beta \frac{\rho_0}{\rho_c}} \right)^2 \left(1 + 4 \frac{\alpha}{\omega_{00}} \right),$$

где $\rho^* = \rho \left(1 - 2,5\beta \frac{\rho}{\rho_c} \right)$ — фиктивная плотность при отсутствии присоединенной массы, ρ_0 — плотность воды.

Для экспериментальной проверки уравнения (16) было проведено испытание изгибно-колеблющегося стержневого вибратора, описанного в работе [1]. Параметры вибратора были следующими: $\beta = 0,5$, $\rho_c = 7,8 \text{ г/см}^3$, $R = 0,392 \text{ см}$, $f_{00} = 489,3 \text{ гц}$, $\alpha_0 = 0,52 \text{ рад/сек}$. Исследование было проведено во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева. Вязкость жидкостей измерялась образцовыми капиллярными вискозиметрами, а плотность ареометрами при одновременном измерении коэффициента затухания α вибратора. Определение α проводилось методом измерения интервала времени, в течение которого амплитуда свободных колебаний вибратора затухала в постоянное число раз.

η , спз	ρ , г/см ³	$\eta \rho^*$ _{эксп} , спз·г/см ³	α , рад/сек	$\eta \rho^*$ _{теор} , спз·г/см ³	Расхождение теории и эксперимента, %
0,711	0,717	0,446	1,338	0,439	-1,5
1,00	1,00	0,84	1,658	0,834	-0,7
3,56	0,83	2,56	2,551	2,59	+1,1
5,43	0,836	3,93	3,047	4,00	+1,8
8,70	0,852	6,4	3,743	6,45	+0,7
17,30	0,861	12,85	5,060	12,79	-0,4
26,52	0,872	19,88	6,242	20,29	+2,0
45,72	0,881	34,62	7,974	34,41	-0,6
86,49	0,879	65,31	10,80	65,54	-0,4
114,7	0,880	86,78	12,31	86,4	-0,4
132,8	0,878	100,1	13,13	101,9	+1,8
194,8	0,891	148,7	16,08	150,3	+1,1
278,3	0,885	211,2	18,87	210,1	-0,5
410,3	0,885	311,7	22,73	309,5	-0,7
479,5	0,882	363,3	24,54	363,2	0,0
673	0,888	513,0	29,00	513,1	0,0
1090	0,887	829,8	36,40	820,8	-1,1
3125	0,889	2380	60,57	2368	-0,5

Результаты измерений $\eta \rho^*$ _{эксп} и расчета $\eta \rho^*$ _{теор} даны в таблице и на фигуре. На фигуре аналитическая зависимость $\eta \rho^*$ _{теор} от α изображена в виде кривой, а результаты измерений даны в виде точек. Таблица указывает на хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов в широком диапазоне изменения вязкости и тем самым подтверждает правильность полученных теоретических выводов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Определение скорости жидкости и давления из уравнения движения

$$(П.1) \quad i\omega \rho \mathbf{v} = \text{grad } p - \eta \Delta \mathbf{v}$$

и неразрывности

$$(П.2) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

выполним, воспользовавшись методом разложения скорости [11] на составляющие, зависящие от скалярного φ и векторного $\bar{\psi}$ потенциалов:

$$(П.3) \quad \bar{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \bar{\psi}.$$

Подставляя (П.3) в уравнение неразрывности, получим для скалярного потенциала уравнение Лапласа, которое для переменных r и θ в цилиндрических координатах r, θ, x имеет вид

$$(П.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных [9] и учитывая, что скорость жидкости по мере удаления от цилиндра должна уменьшаться, получим

$$(П.5) \quad \varphi = A \cos \theta / r,$$

где A — произвольная постоянная.

Подставляя (П.3) в (П.1), а затем взяв rot и проведя интегрирование, будем иметь

$$(П.6) \quad \Delta \bar{\psi} + k^2 \bar{\psi} = 0,$$

где волновое число $k = \sqrt{i \omega \rho} / \eta$ взято со знаком плюс, принимая во внимание расходящийся характер волны. Так как скорость в жидкости не зависит от координаты x , то все производные по x равны нулю, поэтому выражения для функций, определяющих радиальную и тангенциальную составляющие скорости, примут вид

$$(П.7) \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Таким образом, из составляющих векторного потенциала достаточно найти только функцию ψ_x , для которой из (П.6) получим волновое уравнение в переменных r и θ :

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \theta^2} + k^2 \psi_x = 0.$$

Решая его методом разделения переменных и учитывая расходящийся характер волны, получим

$$(П.8) \quad \psi_x = B H_1^{(1)}(kr) \sin \theta,$$

где B — произвольная постоянная, $H_1^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода первого порядка, для которой в дальнейшем значок (1) опустим. Подставляя (П.5) и (П.8) в (П.7), получим

$$v_r = B \frac{H_1(kr)}{r} \cos \theta - A \frac{\cos \theta}{r^2};$$

$$v_\theta = \left(-B k H_0(kr) + \frac{B}{r} H_1(kr) \right) \sin \theta - A \frac{\sin \theta}{r^2}.$$

Учтем, что скорость жидкости на боковой поверхности цилиндра равна скорости последнего, а отсчет угла θ будем проводить от оси r , расположенной вдоль колебаний цилиндра. Тогда для боковой поверхности цилиндра функции v_r и v_θ должны быть равны при $\theta = 0$, $v_\theta = 0$, $v_r = u$, а при $\theta = \pi/2$: $v_\theta = -u$, $v_r = 0$. Подставляя полученные граничные условия в (П.9), обозначая буквой R радиус цилиндра и решая уравнения относительно произвольных постоянных, найдем

$$A = \left[-R^2 + \frac{2R}{k} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right] u; \quad B = \frac{2}{k H_0(kR)} u.$$

Таким образом, φ , ψ_x , v_r и v_θ имеют вид

$$\varphi = -u \cos \theta \frac{R}{r} \left(R - \frac{2}{k} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right);$$

$$\psi_x = u \sin \theta \frac{2H_1(kr)}{kH_0(kR)};$$

$$v_r = u \cos \theta \left[\frac{2}{kH_0(kR)} \frac{H_1(kr)}{r} + \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right) \right];$$

$$v_\theta = -u \sin \theta \left[\frac{2}{H_0(kR)} \left(H_0(kr) - \frac{1}{kr} H_1(kr) \right) - \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right) \right].$$

Переходим к определению давления. Подставляя (П.3) в (П.1), взяв дивергенцию и проведя интегрирование, получим

$$-i\bar{\omega} \rho \varphi = -p + \eta \Delta \varphi.$$

Учитывая (П.4), найдем

$$p = i\bar{\omega} \rho \varphi = -i\bar{\omega} \rho u \cos \theta \frac{R}{r} \left(R - \frac{2}{k} \frac{H_1(kR)}{H_0(kR)} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Кремлевский, А. А. Степичев. Новые автоматические вибрационные вискозиметры, Изд-во ЛДНТП, Л., 1969.
2. Von D. Dorsch. Gas Wärme international, 1968, 17, 9, 346.
3. И. И. Теумин. Ультразвуковые колебательные системы. М.—Л., Машгиз, 1959.
4. А. А. Степичев. Измерение сдвиговой вязкости преобразователями на изгибных колебаниях. VI Всес. акуст. конф., М., 1968.
5. В. В. Фурдеев, Акустические основы вещания, М., Связьиздат, 1960.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. Е. Янке, Ф. Энде, Ф. Леш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., «Наука», 1968.
8. G. G. Stokes. Mathematical and Physical Papers. Cambridge: At the university Press. London, 1922, III, 38—54.
9. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
10. А. Н. Соловьев, А. Б. Каплун. Вибрационный метод измерения вязкости жидкости. Новосибирск, «Наука», 1970.
11. Е. Скучик. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.

Поступила
9 июня 1973 г.