

УДК 534.24

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА
ОБЪЕМНОЙ СКОРОСТИ НА ТЕЧЕНИЕ С ПЛОСКИМ
ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)***М. А. Миронов*

В линейном приближении решена двумерная задача о поле линейного источника объемной скорости, помещенного в стационарный поток с плоским тангенциальным разрывом. Полученное решение содержит волну, бегущую по поверхности разрыва в направлении течения и нарастающую в этом направлении.

В работах [1, 2] решалась задача отражения поля точечного и линейного источников от плоского тангенциального разрыва скорости; при этом были получены решения, не содержащие пространственно нарастающих волн. Этот результат представляется парадоксальным: он означает устойчивость разрыва по отношению к акустическим возмущениям, в то время как разрыв неустойчив по отношению к начальному возмущению [3]. В связи с этим весь вопрос о влиянии звуковой волны на течение с тангенциальным разрывом нами рассмотрен заново.

Исследование мы проведем в соответствии с известными методами, применяемыми в теории плазмы и изложенными, например, в работах [4, 5]. С этой целью рассмотрим подробно основную для данной задачи вопрос о выборе решения для гармонического источника звука.

Как известно, выбор решения линейной задачи с гармоническим источником должен быть сделан так, чтобы было удовлетворено условие излучения. Особенность настоящей задачи в том, что в ней нельзя, как показано ниже, использовать условия излучения, применяемые обычно в задачах для неподвижных сред. Физическая сторона вопроса делается ясной, если перейти к анализу импульсной задачи.

Для импульсного излучения, помимо удовлетворения уравнениям движения и граничным условиям, решение должно еще удовлетворять закону причинности. Для гармонической волны закон причинности сформулировать нельзя. Можно только потребовать, чтобы интеграл Фурье по гармоническим волнам, образующим данный импульс, удовлетворял закону причинности, и из этого требования получить некоторое условие и по отношению к решению задачи с гармоническим источником. Такое условие обычно и называют условием излучения. Если предположить, что в импульсной задаче поле в каждой точке пространства до некоторого момента времени равно нулю, а затем нарастает не быстрее $\exp pt$, то условие излучения для гармонического источника формулируется так: решение должно быть аналитической функцией частоты ω в полуплоскости $\text{Im } \omega > p$ и убывать в этой полуплоскости при $|\omega| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $1/|\omega|$ [4, 5]. Для неподвижных сред используют различные эквиваленты этого условия; в частном случае задач с плоскими границами раздела неподвижных сред условие излучения сводится к требованию исчезновения поля на бесконечности, что легко интерпретируется и физически, поскольку единственными источниками энергии в неподвижной среде яв-

ляются источники звука, лежащие на конечном расстоянии. При наличии же тангенциального разрыва скорости, помимо излучателей источником энергии может стать и сама граница раздела. При этом убывание на бесконечности может перестать быть условием излучения.

Ниже будет найдено решение, аналитическое по частоте в верхней полуплоскости частот; при этом будет показано, что решения, полученные в работах [1, 2], где в качестве условия излучения используется то же условие убывания на бесконечности, что и в неподвижных средах, не являются аналитическими в верхней полуплоскости частот и поэтому не соответствуют исходной постановке задачи*.

Пусть среда в полупространстве $z < 0$, обозначаемая в дальнейшем индексом 1, покоится, а среда в полупространстве $z > 0$ (индекс 2) движется со скоростью V в направлении оси ox . В покоящейся среде в точке $x=0$, $z=-h$ расположен гармонический линейный источник, ось которого перпендикулярна плоскости течения. Введем обозначения: φ — потенциал скоростей возмущенного движения, p — давление, η — вертикальное смещение частиц, c — скорость звука, ρ — плотность. Индекс 1 или 2 будет обозначать среду, к которой относится тот или иной параметр. Множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Линеаризованные уравнения задачи имеют вид

$$(1) \quad \Delta\varphi_1 + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \varphi_1 = \delta(x, z+h); \quad \Delta\varphi_2 - \frac{1}{c_2^2} \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi_2 = 0,$$

$$(2) \quad p_1 = i\omega\rho_1\varphi_1; \quad p_2 = -\rho_2 \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_2,$$

$$(3) \quad -i\omega\eta_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}; \quad \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}.$$

Граничные условия выражаются следующим образом:

$$(4) \quad p_1 = p_2|_{z=0}$$

$$(5) \quad \eta_1 = \eta_2|_{z=0}.$$

Решение должно быть аналитической функцией частоты ω при $\text{Im } \omega > 0$ и убывать при $|\omega| \rightarrow \infty$ не медленнее $1/|\omega|$.

Обычно в задачах со слоистыми средами решения находятся с помощью преобразования Фурье по координате x . Этот метод может быть применен в двух случаях. Во-первых, если заранее известно, что искомое решение убывает при $|x| \rightarrow \infty$, так что функция, являющаяся решением, принадлежит L_2 на оси x . Второй случай является в некотором смысле обобщением первого: необходимо, чтобы решение при $x > 0$ нарастало не быстрее $e^{\beta x}$, а при $x < 0$ убывало не медленнее $e^{\gamma x}$, причем убывание должно превосходить нарастание, т. е. $\gamma > \beta$. Оказывается, и это будет показано ниже, что решение сформулированной выше задачи не удовлетворяет ни одному из условий применимости преобразования Фурье. Тем не менее мы воспользуемся этим преобразованием и получим некоторые функции, которые, не будучи решением задачи, помогают отыскать его.

Итак, найдем функции $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$, удовлетворяющие (1) — (5) и убывающие при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ при вещественных положительных ω . Применяя преобразование Фурье по координате x к формулам (1) — (5), мы получим систему уравнений для фурье-компонент $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$. Решая ее и делая обратное преобразование, получим следующие выражения для $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$:

* Ограничимся задачей с линейным источником; обобщение на задачу с точечным источником не вносит принципиальных изменений в выводы.

$$(6) \quad \varphi_1^{(0)} = \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\kappa_1} \exp[ikx + \kappa_1(z-h)] \times \\ \times \frac{-\rho_2 \kappa_1 (1 - kV/\omega)^2 + \rho_1 \kappa_2}{\rho_2 \kappa_1 (1 - kV/\omega)^2 + \rho_1 \kappa_2} dk$$

$$(7) \quad \varphi_2^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int \exp[ikx - \kappa_2(z+h)] \frac{2\rho_1(1 - kV/\omega)}{\rho_2 \kappa_1 (1 - kV/\omega)^2 + \rho_1 \kappa_2} dk.$$

Здесь φ_0 — поле точечного источника в безграничной неподвижной среде (8)

$$(8) \quad \kappa_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega - kV}{c_2}\right)^2}.$$

В формуле (8) выбирается ветвь корня, переводящая комплексную плоскость подкоренного выражения в правую полуплоскость. Интегрирование проводится по контуру Γ , совпадающему с вещественной осью плоскости k (фиг. 1). Функции $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$ удовлетворяют (1) — (5) и стремятся к нулю при удалении от источника, если частота ω вещественна и больше нуля. Заметим, что эти формулы совпадают с соответственными формулами в работе [2]. Исследуем теперь зависимость $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$ от частоты. Для упрощения рассмотрим случай несжимаемых сред (учет сжимаемости не приводит к качественным изменениям даже при числах Маха больше единицы, но требует решения алгебраического уравнения пятой степени. Некоторые результаты для сжимаемых сред приведены ниже). Из формулы (8) следует, что $\kappa_1 = \kappa_2 = \sqrt{k^2}$, и под интегралами в формулах (6), (7) стоят функции, определенные на двулистной плоскости k , разрезы на которой проведены по мнимой оси от $-i \cdot \infty$ до $-i \cdot 0$ и от $+i \cdot \infty$ до $+i \cdot 0$. Верхний лист определяется из следующего условия: корень переводит плоскость в правую полуплоскость. Контур интегрирования Γ проводится по верхнему листу. Легко видеть, что подынтегральные выражения имеют полюсы на обоих листах в корнях уравнения:

$$(9) \quad \left(1 - \frac{kV}{\omega}\right)^2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,$$

$$(10) \quad k_{1,2} = \frac{\omega}{V} \left(1 \pm i \sqrt{\rho_1/\rho_2}\right).$$

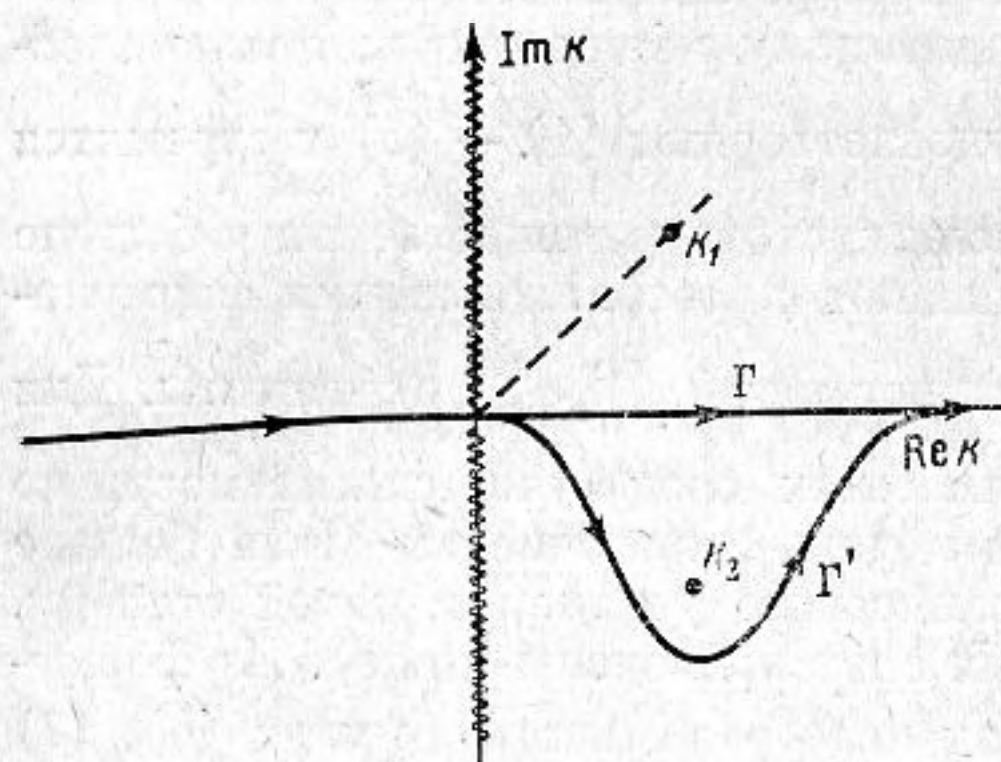
При вещественных положительных ω корни лежат симметрично относительно вещественной оси и, следовательно, заключают между собой контур интегрирования Γ (фиг. 1). При изменении частоты изменяется и положение полюсов. В частности, при повороте частоты на некоторый угол α от положительной полуоси корень k_2 поворачивается на такой же угол (фиг. 2, 3). Нетрудно видеть, что, начиная с угла $\alpha = \pi/2 + \alpha_0$, $\alpha_0 = \arctg \sqrt{\rho_1/\rho_2}$, оба полюса, первоначально лежавшие на верхнем листе, оказываются на нижнем, и контур интегрирования «затягивается» на нижний лист плоскости k (фиг. 3). Следовательно, при $\alpha > \frac{\pi}{2} + \alpha_0$ формулы (6), (7) дают поле, экспоненциально нарастающее при удалении от разрыва. В самом деле, интеграл по контуру на фиг. 3 можно представить в виде суммы интеграла по вещественной оси, который дает конечное поле на всех частотах, и вычета (со знаком минус) в полюсе k_2 подынтегральной функции, расположенном на нижнем листе. Вычет представляет со-

бой волну $A(\omega) \exp [ik_2 x - \kappa h - \kappa |z|]$, причем $\text{Re } \kappa < 0$; это и обуславливает нарастание. Более того, при любом $\alpha > \frac{2}{\pi} + \alpha_0$ и $|\omega| \rightarrow \infty$ функции $\varphi_{1,2}^{(0)} e^{-i\omega t} \rightarrow \infty$ в полосе $|z| - h > V \cdot |t|$ и условие излучения не выполняется. Тот же результат получается при учете сжимаемости: так, для двух одинаковых сжимаемых сред корни дисперсионного уравнения имеют вид

$$(11) \quad k = \frac{\omega}{V} \left[\frac{1}{2} \pm i \sqrt{\frac{4V^2(1+M^2) - 4 + M^2}{M^2}} \right]^{-1}$$

и, следовательно, относительное расположение полюсов и контура интегрирования такое же, как и для несжимаемых сред вплоть до значений числа Маха $2\sqrt{2}$.

Итак, формулы (6), (7) дают частное решение задачи (1)–(5), определенное тем, что при вещественных положительных ω поле убывает при

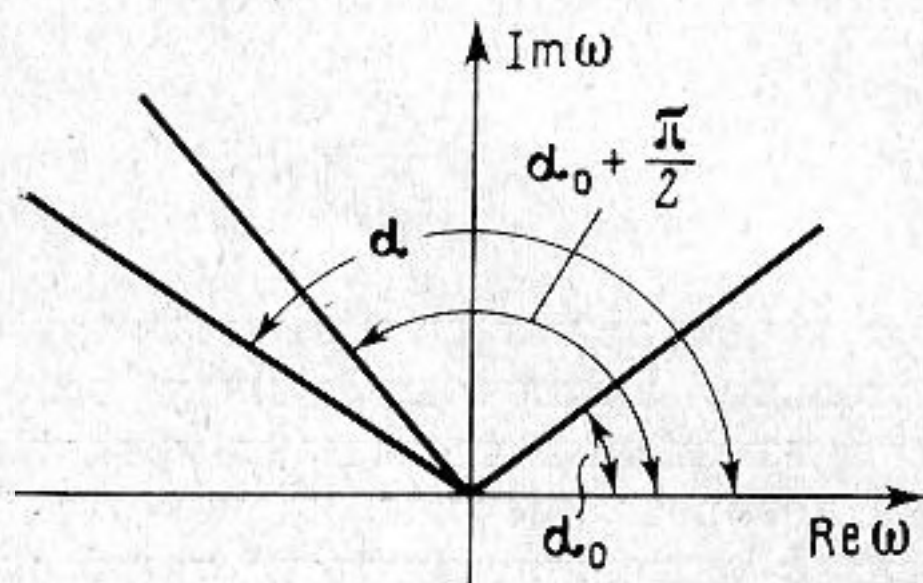


Фиг. 1

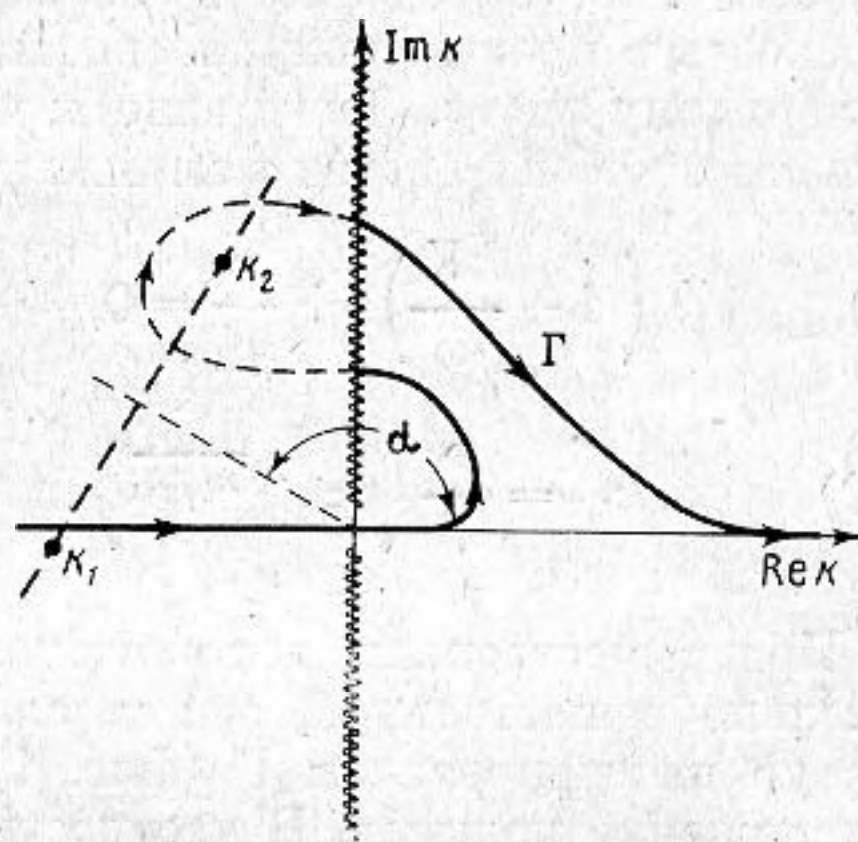
Фиг. 1. Контур интегрирования и полюсы подынтегрального выражения на комплексной плоскости k при вещественных частотах

Фиг. 2. Изменение частоты в комплексной плоскости ω

Фиг. 3. «Затягивание» контура Γ на нижний лист плоскости при комплексных частотах



Фиг. 2



Фиг. 3

удалении от источника. Оно не удовлетворяет условию убывания при $|\omega| \rightarrow \infty$ в области $\alpha > \pi/2 + \alpha_0$ и, следовательно, как было сказано выше, не имеет физического смысла. Естественно попытаться получить правильное решение, прибавляя к $\varphi_{1,2}^{(0)}$ свободные волны, т. е. решения однородной системы, получающейся из (1)–(5) отбрасыванием правой части. Амплитуды этих волн нужно подобрать так, чтобы устранить нарастание результирующего поля при $|\omega| \rightarrow \infty$. Здесь возникает затруднение, связанное с тем, что для каждого корня дисперсионного уравнения, которые и

определяют свободные волны, существует область α в верхней полуплоскости частот, внутри которой свободная волна, соответствующая этому корню, не удовлетворяет условию убывания по частоте. Например, волна, соответствующая корню k_2 , в области $0 < \alpha < \alpha_0$ нарастает при $x - Vt > 0$ экспоненциально при $|\omega| \rightarrow \infty$. Это явление принципиально связано с разрывностью течения. Оказывается, если рассматривать эту же задачу, но вместо разрыва взять плавный переход толщины δ между покоящейся и движущейся средами, то асимптотическое поведение корней при $|\omega| \rightarrow \infty$ существенно изменяются, в то время как при малых частотах $\left(\left| \frac{\omega \delta}{V} \right| < 1 \right)$

корни для обеих задач практически совпадают. В частности, если в задаче с разрывом корень k_2 остается в нижней полуплоскости при $0 < \alpha < \alpha_0$ и любых $|\omega|$, то в задаче с плавным переходом существует такое $\omega_0 \sim V/\delta$, что при всех ω с $|\omega| > \omega_0$ корень k_2 оказывается в верхней полуплоскости. А это означает, что волна, соответствующая корню k_2 при $|\omega| \rightarrow \infty$, будет удовлетворять условию убывания по ω . Что касается поведения k_2 в сегменте $\alpha > \frac{2}{\pi} + \alpha_0$, то введение переходного слоя вместо разрыва качественно не изменяет его — корень остается на нижнем листе при $|\omega| \rightarrow \infty$, так что (6), (7) не удовлетворяют условию излучения и в случае плавного перехода. Расчеты, подтверждающие эти выводы, громоздки и поэтому здесь не приводятся. Заметим, что аналогичные трудности встречаются и в задаче о начальном возмущении тангенциального разрыва [3].

Получим теперь решение задачи, заменив предварительно тангенциальный разрыв тонким переходным слоем так, чтобы для интересующих нас конечных частот толщиной этого слоя можно было пренебречь, но асимптотическое поведение корней дисперсионного уравнения было таким, как указано выше. Заменяем в формулах (6), (7) контур интегрирования Γ на Γ' (фиг. 1). Эта замена соответствует прибавлению к функциям $\varphi_{1,2}^{(0)}$ вычета $\varphi_{1,2}^*$ подынтегральных функций в точке k_2 , который является свободной волной. Полученные таким образом функции $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}^{(0)} + \varphi_{1,2}^*$ удовлетворяют (1) — (5) и, в отличие от $\varphi_{1,2}^{(0)}$, не содержат

нарастающих волн при $\alpha > \frac{\pi}{2} + \alpha_0$, так как контур Γ' не затягивается на нижний лист плоскости k . Конечность толщины переходного слоя позволяет утверждать, что при $0 < \alpha < \alpha_0$ $\varphi_{1,2} e^{-i\omega t} \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, т. е. удовлетворяет условию излучения.

Итак, решение задачи дается формулами (6), (7), в которых интегрирование ведется по контуру Γ' . При вещественных положительных частотах поле можно разбить на два слагаемых: убывающее по всем направлениям поле $\varphi_{1,2}^{(0)}$ и свободную волну $\varphi_{1,2}^*$:

(12)

$$\varphi_1^* = \frac{\sqrt{\rho_1/\rho_2}}{1 - i\sqrt{\rho_1/\rho_2}} \exp \left[i \frac{\omega}{V} x + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \frac{\omega}{V} x + \frac{\omega}{V} \left(1 - i \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \right) (z - h) \right],$$

(13)

$$\varphi_2^* = \frac{i\rho_1/\rho_2}{1 - i\sqrt{\rho_1/\rho_2}} \exp \left[i \frac{\omega}{V} x + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \frac{\omega}{V} x - \frac{\omega}{V} \left(1 - i \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \right) (z + h) \right].$$

Функции $\varphi_{1,2}^{(0)}$ достаточно подробно исследованы в работе [2] и поэтому здесь рассматриваться не будут. Свободная волна $\varphi_{1,2}^*$ бежит по направлению течения со скоростью течения V и нарастает в этом направле-

нии экспоненциально с инкрементом $\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \omega$. В направлении, перпенди-

кулярном разрыву, она экспоненциально спадает, имея декремент ω/V . Амплитуда и фаза этой волны в начале координат определяется расстоянием от разрыва до источника h . При удалении источника от разрыва ее амплитуда экспоненциально спадает. Для сжимаемых сред свободная волна имеет ту же структуру, что и $\varphi_{1,2}$ вплоть до чисел Маха $M=2\sqrt{2}$, причем для малых M поправки в k_2 , κ_2 оказываются порядка M^2 , так что ими можно пренебрегать.

Рассмотрим теперь падение плоской волны на тангенциальный разрыв. Плоская волна, падающая под углом θ , получается из цилиндрической при следующем предельном переходе: производительность источника нужно взять пропорциональной \sqrt{h} устремить расстояние h от источника до разрыва к бесконечности, оставляя при этом отношение $\frac{x}{|h|+|z|} =$

$=\text{tg } \theta$ постоянным. Таким образом, плоская волна, падающая под углом θ , моделируется узким пучком лучей цилиндрической волны, распространяющихся под этим углом. Можно показать, что функция $\sqrt{h} \varphi_1^{(0)}$ при та-

ком предельном переходе стремится к сумме падающей и отраженной плоским волнам, а $\varphi_2^{(0)}$ — к плоской прошедшей. При этом коэффициенты отражения и прохождения совпадают с полученными в работе [4]. Выяс-

ним, в каких случаях можно пренебречь свободной волной $\sqrt{h} \varphi_{1,2}^*$. Подставляя в показатель экспоненты в (12), (13) $x = (|h|+|z|)\text{tg } \theta$ и устремляя затем h к бесконечности, получим, что $|h| \varphi_{1,2} \rightarrow 0$ при $\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} (h+|z|)\text{tg } \theta <$

$< h - |z|$ или при $\theta < \text{arctg } \sqrt{\rho_2/\rho_1}$. При углах падения $\theta > \text{arc tg } \sqrt{\rho_2/\rho_1}$,

$\sqrt{h} \varphi_{1,2}^* \rightarrow \infty$ и решение теряет смысл. В связи с этим следует заметить,

что решения задач об отражении плоской волны от разрыва и от системы разрывов, приведенные в работах [6—9], имеют ограниченную область применимости, поскольку в этих работах допускалось, что прошедшее и отраженное поля представляют собой плоские волны, а свободные волны не учитывались. Проведенное выше рассмотрение показывает, что это допущение справедливо лишь в ограниченной области углов падения.

В заключение сделаем одно замечание, касающееся условий излучения. В процессе решения оказалось, что никакие функции, удовлетворяющие уравнениям (1)–(5), т. е. уравнениям и граничным условиям для задачи с разрывом, не удовлетворяют условию излучения, сформулированному как условие убывания при $|\omega| \rightarrow \infty$ и $\text{Im } \omega > 0$. Поэтому пришлось заменить исходное течение с разрывом на течение с плавным переходом. Такая замена приводит к появлению решения, удовлетворяющего условию излучения. Ясно, что размывание разрыва сильно усложняет исследование дисперсионного уравнения, не изменяя в то же время окончательного ответа для низких частот. Желательно поэтому сформулировать другое условие излучения, которое для задач с разрывом не требовало бы «размывания» разрыва и в то же время, примененное к течениям с плавным переходом, оказывалось эквивалентным исходному условию излучения. Для решенной выше задачи таким является условие убывания поля при удалении от разрыва при всех ω с $\text{Im } \omega > 0$. Действительно, это усло-

вие однозначно определяет контур интегрирования в формулах (6), (7), и он оказывается совпадающим с Γ' . Естественно перенести это условие на случай произвольного течения в следующей форме: поле должно убывать при удалении от области, где течение резко меняет свою скорость при всех частотах в полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$. В частном случае течения с тангенциальным разрывом такой областью является сам разрыв.

Автор благодарит Ю. Л. Газаряна и М. А. Исаковича за ценные замечания и интерес к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. C. Voit*. Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся. Прикл. матем. и механ., 1953, 17, 2, 157—164.
2. *Peter Gottlieb*. Sound source near a velocity discontinuity. J. Acoust. Soc. Amer., 1960, 32, 9, 1117—1122.
3. *Рэлей*. Теория звука, т. 2. М.—Л., Гостехтеориздат, 1944.
4. *Л. Д. Ландау*. О колебаниях электронной плазмы. Собр. трудов под ред. М. А. Леонтовича, т. 2, М., «Наука», 1969, 7—21.
5. *В. Д. Шафранов*. Электромагнитные волны в плазме, В сб. Вопросы теории плазмы, 3—87, вып. 3, М., Атомиздат, 1963.
6. *J. W. Miles*. On the reflection of sound at an interface of relative motion. J. Acoust. Soc. Amer., 1957, 29, 2, 226—228.
7. *Philip M. Morse, K. Uno Ingard*. Theoretical Acoustics. McGraw Hill, New York, 1968, Chaps 6 and 11.
8. *Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников*. Отражение звуковых волн от движущегося плоскопараллельного слоя. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 543—546.
9. *J. A. Kong*. Interaction of acoustic waves with moving media. J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 48, 1 (2), 236—241.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
17 января 1973 г.