

УДК 532.329:532.2.532

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПАРОГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

*Азаматов А. Ш., Шаганов В. Ш.*

Исследовано распространение малых возмущений в двухфазной среде, газовая фаза которой представляет двухкомпонентную смесь паров жидкой фазы и некоторого «инертного» газа, не участвующего в процессе массообмена между фазами. Рассмотрены случаи, когда газовая фаза является несущей и, наоборот, взвешенной фазой. Выявлено влияние тепломассообмена, а также скольжения фаз на скорость распространения и затухание малых возмущений. Приведены результаты расчета дисперсионных кривых.

Рассмотрим в рамках двухскоростной двухтемпературной модели с двумя давлениями вопрос о распространении малых возмущений в двухфазной среде, состоящей из жидкости и газовых пузырьков, а также газа и жидких капель, считая при этом, что газовая фаза состоит из паров жидкой фазы и некоторого «инертного» газа, не участвующего в массообмене между фазами.

Пусть длина звуковой волны намного больше среднего расстояния между включениями взвешенной фазы, которая в свою очередь гораздо больше размеров включений. Вязкость и тепломассоперенос существенны лишь в процессах взаимодействия между фазами. Кроме того, в процессе массообмена участвует только паровой компонент. Эта задача для дисперсных систем, и в том числе для газожидкостных сред (когда газовая фаза состоит только из «инертного» газа или паров жидкой фазы), рассмотрена в работах [1-9].

Напишем для жидкости с пузырьками линеаризованную систему уравнений [10] с учетом двухкомпонентности газовой фазы. Уравнения сохранения массы, количества пузырей, импульса, энергии и пульсационного движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v_1}{\partial x} = -J, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v_2}{\partial x} = J, \quad \frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \rho_{80} \frac{\partial v_2}{\partial x} = J, \\
 & \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad \rho_{10} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\alpha_{10} \frac{\partial p_1}{\partial x} - f, \\
 & \rho_{20} \frac{\partial v_2}{\partial t} = -\alpha_{20} \frac{\partial p_1}{\partial x} + f, \quad \rho_{10} c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = q_1, \\
 & \rho_{20} c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_{20} \frac{\partial p_2}{\partial t} + q_2 (c_2 = c_{pb} g_b + c_{pg} g_g), \quad q_1 + q_2 = -lJ,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial t} = w + \frac{J}{\pi \delta_0^2 n_0 \rho_{10}^0}, \quad \frac{\delta_0}{2} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{10}^0} - 8 \frac{v_1}{\delta_0} w,$$

где  $\rho$ ,  $\rho^0$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $T$ ,  $w$ ,  $\delta$  — соответственно возмущения средней плотности, истинной плотности, скорости, давления, числа пузырьков в единице объема, температуры, массовой радиальной скорости жидкости на поверхности раздела фаз, диаметра пузырьков,  $g$  — массовая концентрация компонентов. Далее,  $\alpha$  — объемная концентрация фаз,  $c$  — удельные теплоемкости,  $l$  — удельная теплота парообразования,  $\nu_1$  — кинематическая вязкость жидкости. Нижний индекс 1 относится к параметрам жидкости, 2 — к газовой фазе,  $b$  и  $g$  — соответственно к паровому и инертному компонентам, а  $\sigma$  — к поверхности раздела фаз. Параметры, соответствующие невозмущенному равновесному состоянию, снабжены дополнительно индексом 0 внизу. Для газа с каплями система (1) имеет аналогичный вид, но в этом случае нужно отбросить последние два уравнения. Уравнение сохранения числа пузырьков перейдет в уравнение сохранения числа капель.

Для силы межфазного взаимодействия  $f$ , интенсивности теплопереноса  $q_i$  в  $i$ -фазу аналогично работам [3–5] примем следующие соотношения:

$$(2) \quad f = \frac{\xi}{2} \frac{\pi \delta_0^3 n_0}{6} \rho_{10}^0 \frac{\partial}{\partial t} (v_1 - v_2) + \chi n_0 \delta_0 v_1 \rho_{10}^0 (v_1 - v_2),$$

$$q_i = n_0 \pi \delta_0 \text{Nu}_i (T_\sigma - T_i),$$

где  $\text{Nu}_i$  — числа Нуссельта для теплообмена поверхностной фазы с  $i$ -й ( $i=1, 2$ ) фазой. В случае газа с каплями силовое взаимодействие имеет вид

$$f = \frac{\xi}{2} \frac{\pi \delta_0^3 n_0}{6} \rho_{20}^0 \frac{\partial}{\partial t} (v_1 - v_2) + \chi n_0 \delta_0 v_2 \rho_{20}^0 (v_1 - v_2).$$

Выражения для безразмерных коэффициентов  $\xi$  и  $\chi$  для периодических волн приведены ниже.

Интенсивность фазовых переходов  $J$  примем в виде

$$(3) \quad J = g_{b\sigma} J + n_0 \pi \delta_0^2 \beta (g_{b\sigma} - g_b) \quad (\beta = N_m \rho_{20}^0 \lambda_m / \delta_0).$$

Выражение (3) основано на следующих соображениях. Поток массы в газовую фазу с единицы площади поверхности раздела фаз равен:

$$j = \rho_{2\sigma}^0 u = \rho_{b\sigma}^0 u_b \quad (J = \pi \delta_0^2 j),$$

где  $\rho_{2\sigma}^0$  и  $\rho_{b\sigma}^0$  — плотности газовой смеси и парового компонента,  $u$  и  $u_b$  — массовые скорости смеси и парового компонента относительно поверхности раздела фаз. Проведем преобразования:

$$j = \rho_{b\sigma}^0 u_b = \rho_{b\sigma}^0 u + \rho_{b\sigma}^0 u' = g_{b\sigma} j + \rho_{b\sigma}^0 u' \quad (g_{b\sigma} = \rho_{b\sigma}^0 / \rho_{2\sigma}^0).$$

Здесь  $\rho_{b\sigma}^0 u'$  — диффузионный поток; для него полагаем

$$\rho_{b\sigma}^0 u' = -\lambda_m \rho_{20}^0 \left. \frac{\partial g_b}{\partial r} \right|_\sigma \simeq \lambda_m \rho_{20}^0 \frac{g_{b\sigma} - g_b}{\Delta_m}, \quad \Delta_m = \frac{\delta_0}{N_m},$$

где  $\beta$  и  $N_m$  — размерный и безразмерный коэффициенты массообмена,  $\lambda_m$  — коэффициент диффузии,  $g_b$  и  $g_{b\sigma}$  — соответственно средняя массовая концентрация пара в пузырьке и на поверхности раздела фаз.

В качестве уравнений состояния будем использовать соотношения

$$(4) \quad p_1 = p_0 + a_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{10}^0), \quad p_2 = \rho_2^0 R T_2 \quad (R = R_b g_b + R_g g_g),$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Напишем условия насыщенности пара на поверхности раздела фаз

$$(5) \quad p_s(T_\sigma) = p_{b\sigma} = R_b g_{b\sigma} p_2 / R_\sigma \quad (R_\sigma = R_b g_{b\sigma} + R_g g_{g\sigma})$$

и добавим еще следующие кинематические зависимости для жидкости с пузырьками:

$$(6) \quad \alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1^0}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2^0} = \frac{\rho_b}{\rho_2^0 g_b} = \frac{\pi}{6} n \delta^3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad g_b + g_s = 1, \\ g_{b\sigma} + g_{s\sigma} = 1.$$

В случае газа с каплями вместо второй зависимости имеем  $\alpha_1 = n\pi\delta^3/6$ . Для дальнейшего обозначим  $g = g_b$  и  $g_\sigma = g_{b\sigma}$ , тогда  $g_s = 1 - g$ ,  $g_{s\sigma} = 1 - g_\sigma$ . Введем безразмерные переменные:

$$(7) \quad P_i = \frac{p_i}{p_0}, \quad U_i = \frac{v_i}{a_*}, \quad \theta_i = \frac{T_i}{T_0}, \quad \Phi_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i0}}, \quad \Phi_b = \frac{\rho_b}{\rho_{20}}, \\ \Phi_i^0 = \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0}, \\ W = \frac{w}{a_*}, \quad D = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad N = \frac{n}{n_0} \quad \left( a_*^2 = \frac{p_0}{\rho_{10}^0} \right)$$

и параметры

$$(8) \quad C_i = \frac{c_i}{R_g}, \quad B = \frac{R_0}{R_g}, \quad L = \frac{l}{R_g T_0} \quad (R_0 = R_b g_0 + R_g (1 - g_0)),$$

а также приведенные переменные

$$(9) \quad N_r^* = \frac{8v_1 w}{\delta_0 a_*}, \quad f^* = \frac{f}{\rho_{20} a_*^R}, \quad q_i^* = \frac{q_i}{\rho_{20}^0 a_* R_g T_0} \\ J^* = \frac{J}{\rho_{20} a_*}, \quad \tau = a_* t.$$

Система уравнений (1) с учетом формул (7)–(9) в безразмерных переменных будет иметь следующий вид:

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial U_1}{\partial x} = -MJ^*, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = J^*, \quad \frac{\partial \Phi_b}{\partial \tau} + g_0 \frac{\partial U_2}{\partial x} = J^*, \\ \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} - Mf^*, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial x} + f^*, \\ C_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = Mq_1^*, \\ C_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = B \frac{\partial P_2}{\partial \tau} + q_2^*, \quad q_1^* + q_2^* = -LJ^*, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{P_2 - P_1}{\delta_0} - N_r^*, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{W}{\delta_0} + \frac{r}{6} J^* \quad (r = \rho_{20}^0 / \rho_{10}^0, \quad M = \rho_{20} / \rho_{10}, \quad A_{10} = a_1 / a_*).$$

Уравнения состояния и выражения (5) и (6) примут вид:

$$(11) \quad \alpha_i = \alpha_{i0} (\Phi_i - \Phi_i^0), \quad \Phi_b = g + g_0 \Phi_2, \quad \alpha_2 = \alpha_{20} (N + 3D), \\ P_1 = A_{10}^2 \Phi_1^0, \quad P_2 = Gg + \theta_2 + \Phi_2^0, \quad \theta_\sigma = Eg_\sigma + \mathcal{K}P_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \left( G = \frac{R_b - R_g}{R_0}, \quad E = \frac{R_b R_g}{R_0} \theta_s', \quad \mathcal{K} = \frac{R_b g_0}{R_0} \theta_s', \right. \\ \left. \theta_s' = \left[ \left( \frac{dP_s}{d\theta_\sigma} \right)_{\theta_\sigma=1} \right]^{-1} \right).$$

Для  $f^*$ ,  $q_i^*$ ,  $J^*$ , отображающих межфазные взаимодействия и  $N_r'$ , будем иметь выражения:

$$(12) \quad \begin{aligned} f^* &= \frac{\xi}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} (U_1 - U_2) + \frac{U_1 - U_2}{\tau_v}, & q_i^* &= \frac{\theta_0 - \theta_i}{\tau_i}, \\ J^* &= \frac{1}{1 - g_0} \frac{g_0 - g}{\tau_m}, \\ N_r^* &= \frac{W}{\tau_r}, & \tau_v &= \frac{r\pi\delta_0^2 a}{6\lambda v_1}, & \tau_r &= \frac{\delta_0^2 a}{8v_1}, \\ \tau_i &= \frac{\rho_{20}^0 R_g \delta_0^2 a}{6N_i \lambda_i}, & \tau_m &= \frac{\delta_0^2 a}{6N_m \lambda_m}, \end{aligned}$$

где  $\tau_v$ ,  $\tau_r$ ,  $\tau_i$ ,  $\tau_m$  — приведенные времена релаксации, которые имеют размерность длины.

Отметим, что формулы (9)–(12) написаны для возмущений. Приведем эту систему к более удобному виду. Из уравнения сохранения массы и числа пузырей, используя выражения (11), получим

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{A_{10}} \frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \alpha_{20} \left[ r \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial \tau} + 3(r-1) \frac{\partial D}{\partial \tau} \right] + \sum_{i=1}^2 \alpha_{i0} \frac{\partial U_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} = (1 - g_0) J^*, & \quad \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial \tau} + 3 \frac{\partial D}{\partial \tau} = J^*. \end{aligned}$$

Вместо уравнения импульса для первой фазы используем уравнение количества движения для всей смеси:

$$(14) \quad \alpha_{10} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \alpha_{20} r \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0.$$

Второе уравнение для пульсационного движения, используя последнее уравнение (13), напишем в виде

$$(15) \quad \frac{W}{\delta_0} = -\frac{1}{6} \left[ r \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial \tau} + 3(r-1) \frac{\partial D}{\partial \tau} \right].$$

Рассмотрим распространение плоских периодических волн. Решение будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$\begin{aligned} \Phi, g, U, P, \theta &\sim \exp[i(Kx - \omega t)] = e^{-dx} \exp[i(kx - \omega t)], \\ K &= k + id, \quad a_p = A_p a_* = \omega/k, \end{aligned}$$

где  $K$  — комплексное волновое число,  $d$ ,  $a_p$  — соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны, определяемые мнимой и действительной частью волнового числа. В дальнейшем вместо частоты  $\omega$  используем безразмерную:  $\eta = \omega \delta_0 / a_*$ .

Условием существования нетривиального решения системы такого типа (10), (11) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при амплитудах возмущений. Это условие дает связь между частотой возмущений и волновым числом. Получение определителя прямым способом затруднительно, поэтому нужную связь найдем, исключая амплитуды возмущений. Амплитуды скоростей выразим через амплитуду давлений первой фазы:

$$(16) \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{K\delta_0}{\eta} \pi_v P_1, & U_2 &= \frac{K\delta_0}{\eta} \frac{\pi_v P_{v2} + i\eta}{P_{v1}} P_1, \\ P_{v1} &= r\delta_0/\tau_v - i\eta(r + \xi/2), & P_{v2} &= r\delta_0/\tau_v - i\eta\xi/2, \\ \pi_v &= (P_{v1} + i\eta r \alpha_{20}) / (\alpha_{10} P_{v1} + r \alpha_{20} P_{v2}). \end{aligned}$$

Из уравнений для пульсационного движения

$$(17) \quad \Pi_r z' = P_1 - P_2, \quad \Pi_r = \frac{i\eta}{6} \left( \frac{i\eta}{2} - \frac{\delta_0}{\tau_r} \right), \\ z' = r\Phi_2^0 + 3(r-1)D.$$

Из второго и третьего уравнений (13)

$$(18) \quad z' = \Phi_2^0 + \frac{r-1}{1-g_0} g.$$

Из уравнений энергии с учетом формул (11) и (18) имеем:

$$(19) \quad \pi_1 g - \Pi_1 \theta_1 = \mathcal{K} P_2, \quad \pi_2 g + \Phi_2^0 - \frac{\tau_2}{\tau_1} \theta_1 = \pi_3 P_2, \quad \pi_4 g + \Pi_2 \Phi_2^0 = \Pi_3 P_2, \\ \Pi_1 = i\eta \frac{C_1}{M} \frac{\tau_1}{\delta_0} - 1, \quad \Pi_2 = i\eta C_2 \frac{\tau_2}{\delta_0} - 1, \quad \Pi_3 = i\eta (C_2 - B) \frac{\tau_2}{\delta_0} - 1 + \mathcal{K}, \\ \pi_1 = E \left( i\eta \frac{1}{1-g_0} \frac{\tau_m}{\delta_0} - 1 \right), \quad \pi_2 = -i\eta \frac{L}{1-g_0} \frac{\tau_2}{\delta_0} + G - \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \pi_1, \\ \pi_3 = 1 - \mathcal{K} \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right), \quad \pi_4 = G \Pi_2 + \pi_1.$$

Разрешая уравнения (19) относительно  $\Phi_2^0$  и  $g$  и подставляя результаты в формулы (18), имеем

$$(20) \quad z' = \pi_T P_2, \quad \pi_T = \frac{\Pi_0 + \Pi_1 \Pi_3 L - (1-g_0) \left( i\eta \Pi_5 \frac{\tau_m}{\delta_0} - B \Pi_5 + \Pi_6 \right)}{\Pi_1 \Pi_2 L - (1-g_0) \Pi_4 (i\eta \tau_m / \delta_0 - 1)}, \\ \Pi_0 = (1-r) [\mathcal{K} (C_2 + C_1/M) - B] + (1-r) i\eta \times \\ \times \left[ B - C_2 \mathcal{K} \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right] \frac{C_1}{M} \frac{\tau_1}{\delta_0}, \\ \Pi_4 = E \left\{ C_1/M - C_2 \left[ \Pi_1 \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right] \right\}, \\ \Pi_5 = E \left\{ C_1/M - (C_2 - B) \left[ \Pi_1 \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right] \right\}, \\ \Pi_6 = BG \left\{ \Pi_1 \left[ \mathcal{K} \left( 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) - 1 \right] + \mathcal{K} \frac{\tau_2}{\tau_1} \right\}.$$

Из формулы (17) с учетом (20) получим

$$(21) \quad z' = (\Pi_r + 1/\pi_T)^{-1} P_1.$$

Окончательное дисперсионное выражение получится после подстановки выражений (16) и (17) в уравнение сохранения массы для всей смеси и сокращения на  $P_1$ :

$$(22) \quad \frac{K^2 \delta_0^2}{\eta^2} = \left\{ 1 + \alpha_{20} (r-1) \left[ 1 - i\eta \left( \alpha_{10} + \frac{\xi}{2} \right) \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right] \left[ 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - i\eta \left( \frac{\xi}{2} + \alpha_{10} (\alpha_{20} + r\alpha_{10}) \right) \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right]^{-1} \right\} \left[ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \right. \\ \left. + \alpha_{20} (\Pi_r + \pi_T^{-1})^{-1} \right].$$

Безразмерная фазовая скорость звука  $A_p = k\delta_0/\eta$  и декремент затухания  $d$  определяются выражениями

$$(23) \quad A_p = \left( \frac{2}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} \right)^{1/2} \quad d = \frac{A_p \eta \psi}{2\delta_0}.$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — соответственно действительная и мнимая составляющие правой части уравнения (22). При  $\eta \rightarrow 0$  и  $\eta \rightarrow \infty$  находим соответственно равновесную и «замороженную» скорости звука:

$$a_e^{-2} = a_*^{-2} (\alpha_{10} + r\alpha_{20}) \left[ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \right. \\ \left. + \alpha_{20} \frac{(1-r)[(C_2 + C_1/M)\mathcal{K} - B] + (1-\mathcal{K})L + (1-g_0)B[E(C_2 - B + C_1/M) + C_1(1-\mathcal{K})]}{L + (1-g_0)E(C_2 + C_1/M)} \right],$$

$$a_f \simeq a_1.$$

Обычно  $r \ll 1$ ,  $C_1/M \gg C_2$ ,  $B$ , поэтому равновесная скорость звука будет

$$a_e^{-2} = a_*^{-2} \alpha_{10} \left[ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \frac{C_1 \mathcal{K}/M + (1-\mathcal{K})L + (1-g_0)BEC_1/M}{L + (1-g_0)EC_1/M} \right].$$

Если жидкую фазу считать термостатом ( $C_1/M \rightarrow \infty$ ), то равновесная скорость

$$a_e^{-2} = a_*^{-2} \alpha_{10} \left( \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \frac{\alpha_{20} B}{1-g_0} \right).$$

Для чисто газовых ( $g_0=0$ ) и число паровых ( $g_0=1$ ) пузырьков, пренебрегая сжимаемостью жидкой фазы, имеем известные для таких смесей выражения [11]:

$$a_e^2 = a_*^2 (\alpha_{10} \alpha_{20})^{-1}, \quad a_e^2 = a_*^2 Lr/\theta_s' C_1.$$

В том случае, когда газ является несущей фазой (т. е.  $\alpha_{10}$  мало), пренебрегая сжимаемостью жидкой фазы и эффектом присоединенной массы в выражении силы межфазного взаимодействия, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(24) \quad \frac{K^2 \delta_0^2}{\eta^2} = \alpha_{20} \pi_T \left\{ 1 + \alpha_{20} (r-1) \left( 1 - \alpha_{20} i \eta \frac{\tau_v'}{\delta_0} \right) \left[ 1 - \alpha_{20} (\alpha_{20} + \right. \right. \\ \left. \left. + r\alpha_{10}) i \eta \frac{\tau_v'}{\delta_0} \right]^{-1} \right\} \left( \tau_v' = \frac{\pi \delta_0^2 a_*}{6 \chi r \nu_2} \right).$$

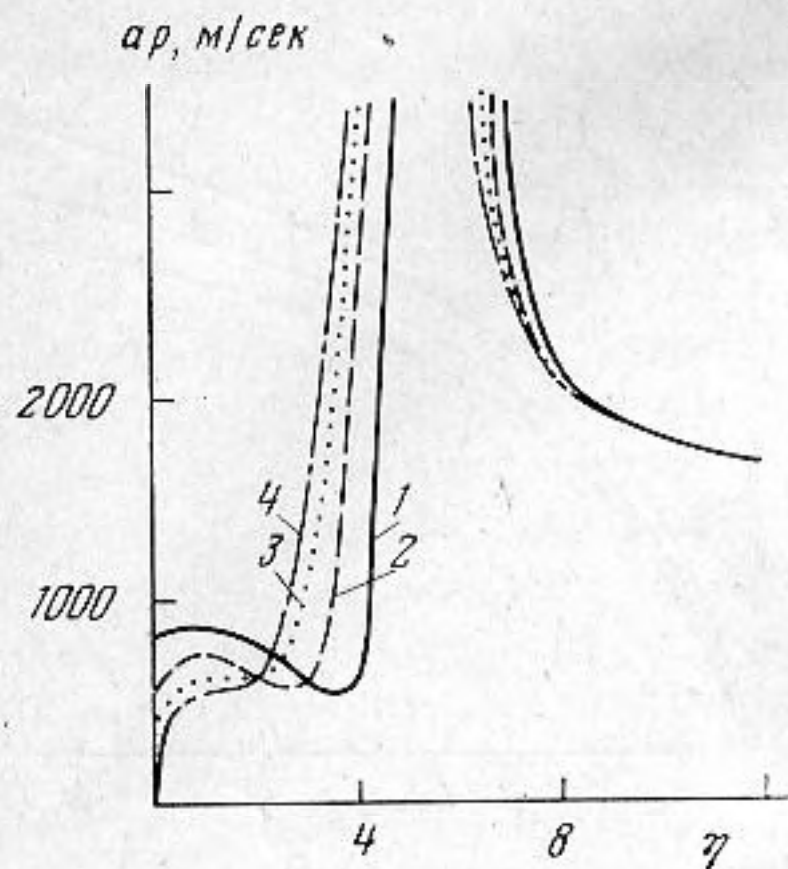
Выражение для  $\pi_T$  такое же, как и раньше с соответствующей заменой  $\tau_j$  на  $M\tau_j'$  ( $j=1, 2m$ ), где

$$\tau_j' = \frac{\rho_{10}^0 R_g \delta_0^2 a_*}{6 \text{Nu}_j \lambda_j} \quad (j=1, 2), \quad \tau_m' = \frac{1}{6r} \frac{\delta_0^2 a_*}{N_m \lambda_m}$$

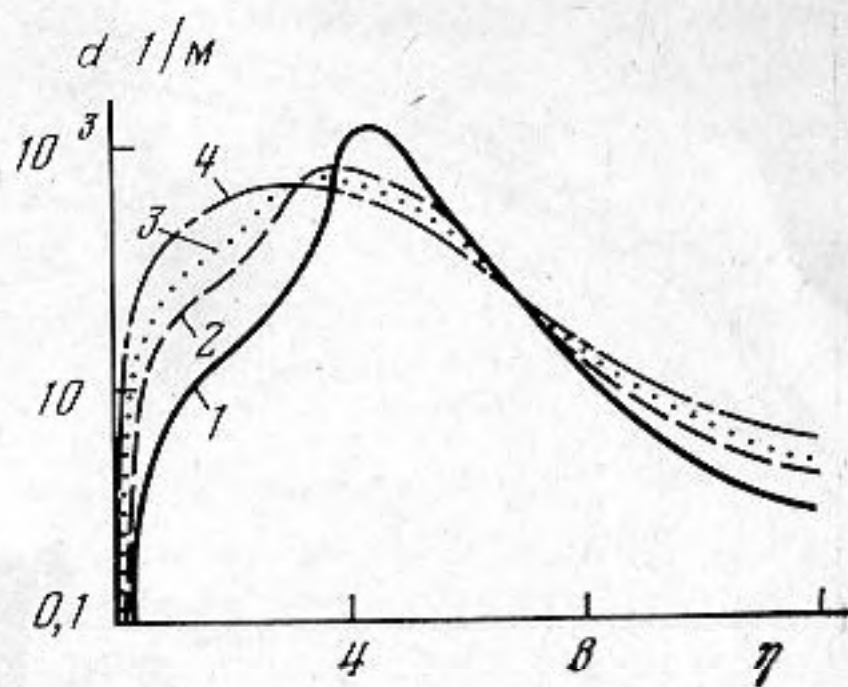
Равновесная скорость звука совпадает с полученным выше выражением для жидкости с пузырьками. Замороженная скорость звука

$$a_f^{-2} = a_*^{-2} \frac{\alpha_{20} r (C_2 - B)}{(\alpha_{20} + r\alpha_{10}) C_2}.$$

Отметим, что дисперсионные уравнения, а также выражения для равновесных скоростей звука отличаются от ранее полученных в работах [3-5] для парожидкостных смесей наличием слагаемых с множителем  $1-g_0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты в жидкости с парогазовыми пузырьками при различных температурах: 1 —  $T_0=300$  К,  $g_0=0,0086$ ; 2 —  $T_0=373$  К,  $g_0=0,39$ ; 3 —  $T_0=388$  К,  $g_0=0,8$ ; 4 —  $T_0=398$  К,  $g_0=1$

Фиг. 2. Зависимость коэффициента затухания от частоты в жидкости с парогазовыми пузырьками при различных температурах:  $T_0=300$  К — кривая 1, 373 К — 2, 388 К — 3, 398 К — 4

На основе полученных дисперсионных уравнений были проведены численные расчеты. На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов фазовой скорости и коэффициента затухания для воды с паровоздушными пузырьками при следующих параметрах смеси:

$$\alpha_{20}=0,2 \cdot 10^{-3}, p_0=2 \text{ бар}, \delta_0=10^{-4} \text{ м.}$$

Температура варьировалась от 300 до 398 К. При изменении температуры в таком диапазоне массовое паросодержание в пузырьках меняется от  $g_0=0,0086$  до 1. Все необходимые постоянные для расчетов оценивались на основании работы [14]. Для коэффициентов  $\xi$  и  $\chi$  использовались [11–13] следующие формулы:

$$\xi=1+(9/\delta_0)(2\nu_1/\omega)^{1/2}=1+9(2\nu_1/\eta a \cdot \delta_0)^{1/2},$$

$$\chi=3\pi[1+(\delta_0/2)(\omega/2\nu_1)^{1/2}]=3\pi[1+1/2(\eta a \cdot \delta_0/2\nu_1)^{1/2}].$$

Для безразмерных коэффициентов теплообмена использовались следующие выражения [2, 3]:

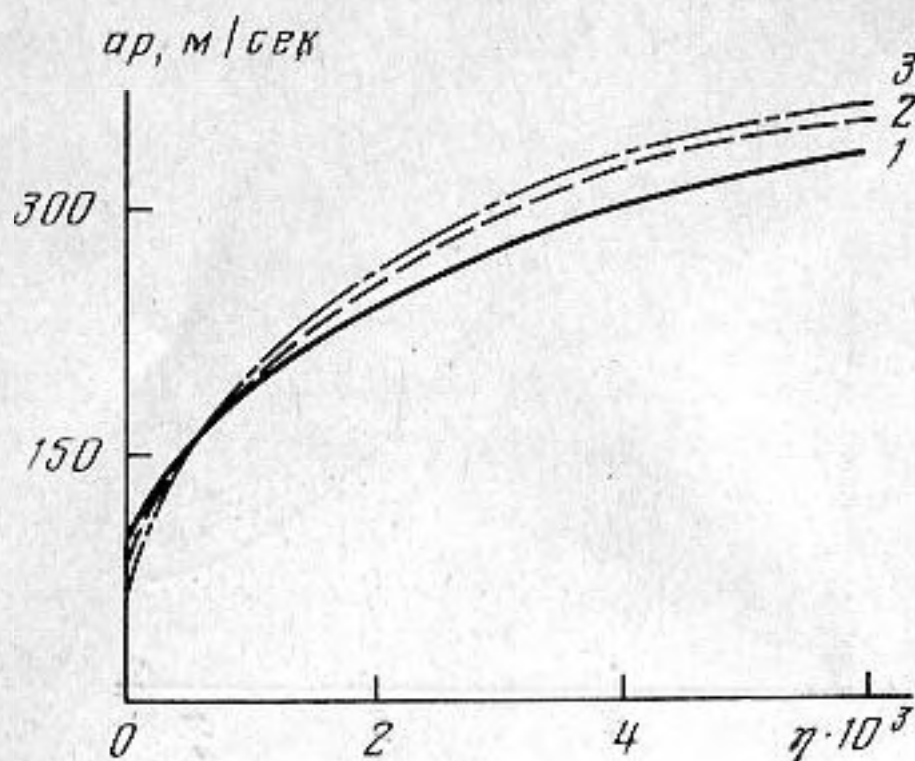
$$Nu_1=[2+(1-i)(\rho_{10}^0 c_1 \delta_0^2 \omega/2\lambda_1)^{1/2}]=[2+(1-i)(\rho_{10}^0 c_1 a \cdot \delta_0 \eta/2\lambda_1)^{1/2}],$$

$$Nu_2=$$

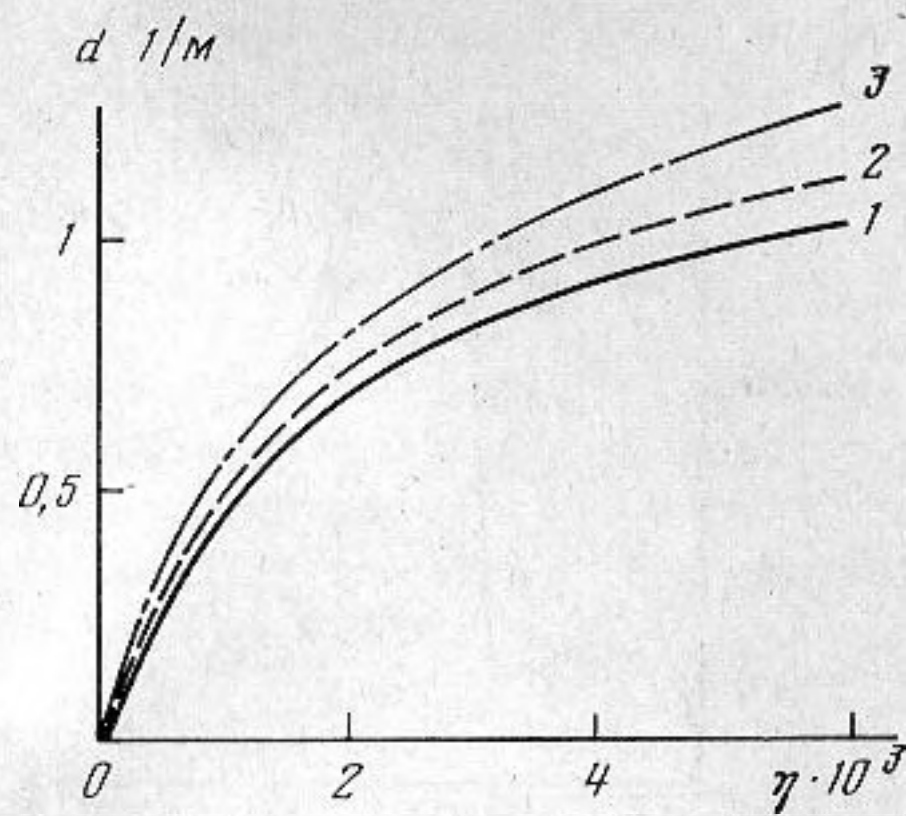
$$= \begin{cases} 10 & \omega \ll \omega_2^* \quad (\omega_2^* = \rho_{20}^0 c_2 \delta_0^2 / \lambda_2), \\ (1-i)(\rho_{20}^0 c_2 \delta_0^2 \omega/2\lambda_2)^{1/2} = (1-i)(\rho_{20}^0 c_2 a \cdot \delta_0 \eta/2\lambda_2)^{1/2} & (\omega \gg \omega_2^*), \end{cases}$$

$$N_m = \begin{cases} 10 & \omega \ll \omega_m^* \quad (\omega_m^* = \delta_0^2 / \lambda_m), \\ (1-i)(\delta_0^2 \omega/2\lambda_m)^{1/2} = (1-i)(\delta_0 a \cdot \eta/2\lambda_m)^{1/2} & (\omega \gg \omega_m^*). \end{cases}$$

Эти выражения получены из оценок с помощью решений уравнений теплопроводности и диффузии при  $\omega \ll \omega^*$  и  $\omega \gg \omega^*$  ( $\omega^* = \omega_2^*, \omega_m^*$ ). В промежуточных областях значения  $N_2$  и  $N_m$  могут быть найдены интерполяцией. Отметим, что в работах [5, 15] использован иной подход, основанный на оценках температурных пограничных слоев и в предположении линейности распределения перепада температуры в пограничном слое. Такой подход фактически эквивалентен учету только действительных частей коэффициентов теплообмена, приведенных выше. Хотя отме-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость фазовой скорости распространения малых возмущений в парогазовой смеси со взвешенными жидкими каплями при различных температурах:  $T_0=300$  К — кривая 1, 373 К — 2, 398 К — 3

Фиг. 4. Зависимость коэффициента затухания в парогазовой смеси со взвешенными жидкими каплями при различных температурах:  $T_0=300$  К — кривая 1, 373 К — 2, 398 К — 3

ченный способ не учитывает появления температурных «ям» [16, 17] около поверхности раздела фаз, из-за чего в некоторые моменты времени поток тепла может быть направлен из более холодной в средней фазы в более горячую, но в плане определения таких интегральных характеристик смесей, как коэффициент затухания, фазовая скорость, как показывают расчеты, этот подход и подход с использованием приведенных выше коэффициентов для теплообмена дают близкие результаты.

Дисперсионные выражения для чисто газовых и чисто паровых пузырьков перестают быть справедливыми, когда массовые концентрации газа и пара становятся сравнимыми, причем для промежуточного случая коэффициент затухания, а также фазовая скорость в основном лежат между значениями для предельных случаев.

Коэффициент затухания (при фиксированных остальных параметрах смеси) с ростом массового паросодержания увеличивается, исключая частоты, близкие к значениям, при которых максимальны коэффициент затухания и фазовая скорость. А это говорит о том, что увеличение паросодержания, благодаря которому происходит массообмен, усиливает диссипативный механизм, обусловленный теплообменными процессами. Разница между значениями коэффициента затухания и фазовой скорости для чисто газовых и чисто паровых пузырьков может составить значительную величину, особенно в тех случаях, когда частота возмущений значительно меньше, чем собственная частота пузырьков ( $\omega_r^* \approx \delta_0 (\rho_{10}^0 / \rho_0)^{1/2}$ ). Например, для рассмотренной выше смеси, когда частота  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>, при изменении паросодержания от  $g_0 = 0,0086$  ( $T_0 = 300$  К) до  $g_0 = 1$  ( $T_0 = 398$  К) фазовая скорость и коэффициент затухания изменяются от  $a_p = 800$  м/с и  $d = 10^{-2}$  м<sup>-1</sup> до  $a_p = 100$  м/с и  $d = 1$  м<sup>-1</sup>. С увеличением частоты до значений, сравнимых с собственной частотой пузырьков, эта разница уменьшается.

Анализ результатов расчета показал, что дисперсия в такой смеси, так же как и в жидкости с чисто газовыми, а также с чисто паровыми пузырьками, определяется неравновесностью теплопереноса, а не эффектами скольжения фаз, т. е. величина фазовой скорости и коэффициент затухания определяется значениями  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_m$ , а не  $\tau_v$ . Если при низких температурах (следовательно, при малых паросодержаниях) дисперсия определяется температурной неравновесностью между поверхностной фазой и газом (значением  $\eta_2$ ), то с увеличением температуры (а тем самым

с увеличением массовой доли пара в пузырьках) возрастает роль кинетики массообмена (конкретного значения  $\tau_m$ , характеризующего сопротивление инертной компоненты на процесс испарения и конденсации парового компонента), а также температурной неравновесности между поверхностной фазой и жидкостью. В случае чисто паровых пузырьков ( $g_0=1$ ,  $\tau_m=0$ ) дисперсия определяется внешним теплообменом (значением  $\tau_1$ ).

Отметим также, что учет массообмена в соответствии с кинетикой (3) приводит к дополнительному увеличению дисперсии (коэффициента  $d$ ) по сравнению со случаями отсутствия массообмена ( $J=0$  или  $\tau_m=\infty$ ) и равновесного массообмена ( $\tau_m=0$ ).

Нами были проведены расчеты на основании выражения (24) для газа с каплями. На фиг. 3 и 4 представлены дисперсионные кривые при  $\alpha_{20}=2 \cdot 10^{-2}$ ;  $p_0=2$  бар,  $\delta_0=10^{-4}$  м для различных температур. В отличие от жидкости с пузырьками здесь при данных параметрах смеси дисперсия определяется двухскоростными эффектами (скольжением фаз), что также имеет место для пароводяных смесей [3, 4]. На фоне этой дисперсии все качественные эффекты из-за тепломассообмена, отмеченные для жидкости с пузырьками, остаются.

Вместе с тем, как показано в расчетах работы [9], при достаточно малых размерах капелек ( $\delta_0 \approx 10^{-6}$  м) эффект тепломассообмена сравним с эффектом трения. Это говорит о том, что с уменьшением размеров капелек и тем самым с увеличением удельной межфазной поверхности роль тепломассообменных процессов возрастает.

Авторы благодарят Р. И. Нигматулина и А. И. Ивандаева за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Владимирский В. В., Галанин М. Д. Распространение звука в дисперсных системах.— Ж. exper. и теор. физики, 1938, т. 8, № 5, с. 614–621.
2. Исакович М. А. О распространении звука в эмульсиях.— Ж. эксперим. и теор. физики, 1948, т. 18, № 10, с. 907–912.
3. Ивандаев А. И. Распространение малых возмущений в двухфазных смесях пара с каплями.— Акуст. ж., 1978, т. 24, № 1, с. 72–78.
4. Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами.— ПМТФ, 1970, т. 5, с. 73–77.
5. Шагапов В. Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками.— ПМТФ, 1977, N 1, с. 90–101.
6. Богуславский Ю. Я. О поглощении и дисперсии звуковых волн в двухфазной среде.— Матер. XX Сиб. теплофиз. семинара. Новосибирск, 1977, с. 54–68.
7. Акуличев В. Н. Акустические волны в жидкости с паровыми пузырьками.— Матер. XX Сиб. теплофиз. семинара. Новосибирск, 1977, с. 114–122.
8. Temkin S., Dobbins R. A. Attenuation and dispersion of sound by particulate — relaxation processes.— J. Acoust. Soc. America, 1966, v. 40, № 3, p. 317–324.
9. Marble F. E., Candel S. M. Acoustic attenuation in fans and ducts by vaporization of liquid — droplets.— AIAA Journal, 1975, v. 13, № 5, 634–639 / Перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1975, v. 13, № 5, с. 120–127.
10. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, № 3, с. 451–463.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
12. Ламб Г. Гидродинамика. ОНТИ, 1947.
13. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971.
14. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Изд. 2. М.: Наука, 1972.
15. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 30–41.
16. Хабеев И. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков.— Акуст. ж., 1975, т. 21, № 5, с. 815–821.
17. Айдагулов Р. Р., Хабеев И. С., Шагапов В. Ш. Учет нестационарного теплообмена в задаче о структуре ударной волны в жидкости с пузырьками.— ПМТФ, 1977, № 3, с. 67–74.

Башкирский государственный университет  
им. 40-летия Октября

Поступила в редакцию  
30.XII.1977  
После окончательного исправления  
23.VII.1980