

УДК 539.3:534.1

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ  
ВДОЛЬ РЕБРА ПРЯМОУГОЛЬНОГО УПРУГОГО КЛИНА*Гринченко В.Т., Мелешко В.В.*

Предложен способ аналитического описания волнового поля в упругом изотропном клине, позволяющий изучить свойства гармонической волны особого типа, локализованной вблизи ребра — угловой моды. Проведен анализ волнового поля в прямоугольном клине и исследована зависимость фазовой скорости угловой моды от коэффициента Пуассона.

Одним из наиболее интересных фактов, установленных за последнее время при изучении волновых процессов в упругих телах, является обнаружение возможности распространения в упругом клине волн, локализованных вблизи вершины [1, 2]. Отсутствие дисперсии для этих волн и высокая степень локализации волнового движения определяют широкие возможности практического использования указанного феномена [3—5]. Ряд количественных результатов, относящихся к исследованию характера движения в локализованных вблизи вершины клина волновых (угловых модах), получен с использованием приближенных подходов на основе метода конечных элементов [1] и вариационных принципов [2, 6]. Однако, как отмечено в [5], аналитической теории клинообразного волновода до настоящего времени не существует. Это обстоятельство, а также недавнее обсуждение этого вопроса на страницах «Акустического журнала» [7, 8] стимулирует работы по построению точного решения соответствующей граничной задачи. Конкретные выкладки проводятся применительно к случаю клина с прямым углом при вершине. В случае произвольного угла идея построения общего решения по-прежнему применима, однако требует более громоздких выкладок.

Задача, которая решается в настоящей работе, формулируется следующим образом. Изотропное упругое тело со скоростями волн расширения  $c_1$  и сдвига  $c_2$  занимает область  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -\infty < x_3 < \infty$  в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Необходимо установить, существуют ли в таком теле бегущие вдоль оси  $Ox_3$  волны, локализованные вблизи ребра, и каковы их свойства.

Принципиальная трудность поставленной задачи достаточно ясна, если учесть ее очевидную связь с общей задачей об исследовании волнового поля в клине или дифракции на клине упругих волн [9, 10]. Сложности аналитического описания волнового поля в клине в общем случае связаны с отсутствием способов эффективного определения неизвестных плотностей интегральных представлений Фурье или Конторовича-Лебедева для искомых величин колебательных смещений. Однако интерес лишь к специфическому типу движения с локализацией поля вблизи вершины позволяет получить строгое решение с использованием интегралов Фурье.

Вектор смещений  $\mathbf{u}$  частиц клина удовлетворяет векторному уравнению Ламе

$$(1) \quad c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Поиск свободных бегущих волн в данной задаче, очевидно, эквивалентен поиску резонансных ситуаций в некоторой задаче о вынужденных движениях волновода. Если рассмотреть граничные условия для механических напряжений  $\sigma$ :

$$(2) \quad \frac{1}{2G} \sigma_{11} = f(x_2) \exp[i(\gamma x_3 - \omega t)]; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{13} = 0; \quad x_1 = 0;$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{22} = g(x_1) \exp[i(\gamma x_3 - \omega t)]; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{21} = \frac{1}{2G} \sigma_{23} = 0; \quad x_2 = 0,$$

( $G$  — модуль сдвига), где относительно функций  $f$  и  $g$  предполагается их представимость интегралами Фурье в обычном смысле, то вопрос о существовании свободных волн сводится к поиску значений волнового числа  $\gamma$ , при которых решения задачи для заданной круговой частоты  $\omega$  не существует. Дополнительным условием здесь является требование локализации волнового поля вблизи ребра клина.

Обычное представление вектора смещений через скалярный и векторный потенциалы в виде

$$(3) \quad \mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{a} \quad (\text{div } \mathbf{a} = 0)$$

сводит векторное уравнение (1) к системе

$$(4) \quad c_1^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad c_2^2 \nabla^2 \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2},$$

где  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  — оператор Лапласа.

Вводя безразмерные координаты  $\bar{x}_k = x_k \gamma$  ( $k=1, 2, 3$ ) и учитывая зависимость искомых потенциалов вида

$$(5) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \exp[i(\bar{x}_3 - \omega t)];$$

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \exp[i(\bar{x}_3 - \omega t)],$$

получаем уравнения:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}_2^2} + \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \Phi = 0;$$

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial \bar{x}_2^2} + \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) A_\alpha = 0;$$

$$A_3 = i \left( \frac{\partial A_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \bar{x}_2} \right),$$

где  $c = \omega / \gamma$  — фазовая скорость гармонической волны, а индекс  $\alpha$  принимает значения  $\alpha = 1, 2$ .

Достаточный функциональный произвол в представлении скалярного и векторного потенциалов для выполнения граничных условий (2) получаем, полагая

$$(7) \quad \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \int_0^\infty F(s) e^{-p_2 \bar{x}_2} \cos s \bar{x}_1 ds + \int_0^\infty H(r) e^{-q_1 \bar{x}_1} \cos r \bar{x}_2 dr \right];$$

$$A_\alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{\gamma^2 i} \left[ \int_0^\infty B_\alpha(s) e^{-p_2 \bar{x}_2} \left\{ \begin{array}{l} \cos s \bar{x}_1 \\ \sin s \bar{x}_1 \end{array} \right\} ds + \right.$$

$$+ \int_0^{\infty} C_{\alpha}(r) e^{-q_2 \bar{x}_1} \left\{ \begin{array}{l} \cos r \bar{x}_2 \\ \sin r \bar{x}_2 \end{array} \right\} dr \Big].$$

Верхние значения функций в фигурных скобках отвечают  $\alpha=1$ , нижние —  $\alpha=2$ ;  $F(s)$ ,  $H(r)$ ,  $B_{\alpha}(s)$ ,  $C_{\alpha}(r)$  — искомые произвольные функции,

$$(8) \quad p_{\alpha}^2 = 1 + s^2 - \frac{c^2}{c_{\alpha}^2}; \quad q_{\alpha}^2 = 1 + r^2 - \frac{c^2}{c_{\alpha}^2}.$$

Первые слагаемые в выражениях (7) обеспечивают выполнение произвольных граничных условий на грани клина  $\bar{x}_2=0$ . По существу, они представляют решение граничной задачи для полупространства  $\bar{x}_2 \geq 0$  при условии симметричного по  $\bar{x}_1$  нагружения его поверхности. Аналогичный смысл имеют и вторые слагаемые в (7) для полупространства  $\bar{x}_1 \geq 0$ . Сумма таких решений для полупространств  $\bar{x}_2 \geq 0$  и  $\bar{x}_1 \geq 0$  обеспечивает возможность выполнения всех граничных условий на гранях клина.

Из выражений для потенциалов (7) легко вычисляются величины смещений и напряжений. Выполнение нулевых граничных условий (2) для касательных напряжений приводит к следующим равенствам:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_{12}|_{\bar{x}_1=0} = 0 &\Rightarrow H(r) q_1 r + C_1(r) q_2 \frac{q_2^2 + r^2 - 1}{2} + C_2(r) r \frac{q_2^2 + r^2 + 1}{2} = 0; \\ \sigma_{13}|_{\bar{x}_1=0} = 0 &\Rightarrow H(r) q_1 + C_1(r) q_2 r + C_2(r) \frac{q_2^2 + r^2 + 1}{2} = 0; \\ \sigma_{23}|_{\bar{x}_2=0} = 0 &\Rightarrow F(s) p_1 - B_1(s) \frac{p_2^2 + s^2 + 1}{2} - B_2(s) p_2 s = 0; \\ \sigma_{21}|_{\bar{x}_2=0} = 0 &\Rightarrow F(s) p_1 s - B_1(s) s \frac{p_2^2 + s^2 + 1}{2} - B_2(s) p_2 \frac{p_2^2 + s^2 - 1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Из них сразу следует, что

$$(10) \quad \begin{aligned} C_1(r) &\equiv 0; \quad B_2(s) \equiv 0; \\ F(s) &= B_1(s) \frac{p_2^2 + s^2 + 1}{2 p_1}; \quad H(r) = -C_2(r) \frac{q_2^2 + r^2 + 1}{2 q_1}. \end{aligned}$$

Выполнение граничных условий для нормальных напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  с учетом (10) и представления

$$(11) \quad e^{-az} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a^2}{u^2 + a^2} \cos uz \, du$$

приводит к системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} x(s) \Delta(s) + \frac{c^2}{2\pi c_2^2 (1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{y(r) r^2}{(1+r^2)(r^2+p_1^2)} \left[ \frac{2s^2}{r^2+p_2^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{2 - \frac{c^2}{c_2^2}}{r^2} \right] dr = \bar{g}(s); \end{aligned}$$

$$(12) \quad y(r) \Delta(r) + \frac{c^2}{2\pi c_2^2 (1-\nu)} \int_0^\infty \frac{x(s) s^2}{(1+s^2)(s^2+q_1^2)} \left[ \frac{2r^2}{s^2+q_2^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{2 - \frac{c^2}{c_2^2}}{s^2} \right] ds = \bar{f}(r),$$

где

$$(13) \quad x(s) = -B_1(s) (1+s^2); \quad y(r) = C_2(r) (1+r^2); \\ \Delta(s) = p_2 - \frac{(p_2^2+s^2+1)^2}{4p_1(1+s^2)}; \quad \Delta(r) = q_2 - \frac{(q_2^2+r^2+1)^2}{4q_1(1+r^2)};$$

$$\bar{f}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\bar{x}_2) \cos r\bar{x}_2 d\bar{x}_2; \quad \bar{g}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\bar{x}_1) \cos s\bar{x}_1 d\bar{x}_1;$$

$\nu$  — коэффициент Пуассона материала клина. Безразмерные (отнесенные к  $\gamma$ ) компоненты амплитуды вектора смещений определяются через плотности  $x(s)$  и  $y(r)$  соотношениями

$$(14) \quad \bar{u}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^\infty \frac{x(s)s}{1+s^2} \left( \frac{p_2^2+s^2+1}{2p_1} e^{-p_1\bar{x}_2} - p_2 e^{-p_2\bar{x}_2} \right) \sin s\bar{x}_1 ds + \\ + \int_0^\infty \frac{y(r)}{1+r^2} \left[ \frac{q_2^2+r^2+1}{2} e^{-q_1\bar{x}_1} - (1+r^2) e^{-q_2\bar{x}_1} \right] \cos r\bar{x}_2 dr; \\ \bar{u}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^\infty \frac{x(s)}{1+s^2} \left[ \frac{p_2^2+s^2+1}{2} e^{-p_1\bar{x}_2} - (1+s^2) e^{-p_2\bar{x}_2} \right] \cos s\bar{x}_1 ds + \\ + \int_0^\infty \frac{y(r)r}{1+r^2} \left( \frac{q_2^2+r^2+1}{2q_1} e^{-q_1\bar{x}_1} - q_2 e^{-q_2\bar{x}_1} \right) \sin r\bar{x}_2 dr; \\ \bar{u}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = i \int_0^\infty \frac{x(s)}{1+s^2} \left( p_2 e^{-p_2\bar{x}_2} - \frac{p_2^2+s^2+1}{2p_1} e^{-p_1\bar{x}_2} \right) \cos s\bar{x}_1 ds + \\ + i \int_0^\infty \frac{y(r)}{1+r^2} \left( q_2 e^{-q_2\bar{x}_1} - \frac{q_2^2+r^2+1}{2q_1} e^{-q_1\bar{x}_1} \right) \cos r\bar{x}_2 dr.$$

Проведенные построения носят формальный характер. В общем случае волнового поля в клине при использовании решений в форме (14) необходимо выработать правила вычисления интегралов Фурье для случая наличия бегущих волн. Возникающие здесь трудности проявляются, в частности, также и в том, что коэффициенты системы (12) могут иметь особенности. В рассматриваемом частном случае угловых мод локализация поля означает, что бесконечные интегралы в (14) должны быть собственными. Это исключает возможность существования как экспоненциально возрастающих с ростом  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  смещений, так и бегущих вдоль осей  $O\bar{x}_1$  и  $O\bar{x}_2$  волн. Первое условие будет выполнено, если

$$(15) \quad c < c_1; \quad c < c_2.$$

Для выполнения второго условия и для обеспечения возможности существования гладких решений системы (12) необходимо, чтобы величины

$\Delta(s)$  и  $\Delta(r)$  не обращались в нуль вдоль всей вещественной оси. Записывая, например,  $\Delta(s)$  в виде

$$(16) \quad \Delta(s) = \frac{(1+s^2)^{1/2}}{4 \left[ 1 - \frac{c^2}{c_1^2(1+s^2)} \right]^{1/2}} \left\{ 4 \left[ 1 - \frac{c^2}{c_1^2(1+s^2)} \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \frac{c^2}{c_2^2(1+s^2)} \right]^{1/2} - \left[ 2 - \frac{c^2}{c_2^2(1+s^2)} \right]^2 \right\},$$

видим, что выражение в фигурных скобках представляет функцию Рэля от аргумента  $u = \frac{c}{(1+s^2)^{1/2}}$ . Известно, что в интервале изменения  $0 \leq u < c_2$

эта функция имеет единственный корень  $u = c_R$ , где  $c_R$  — скорость волны Рэля. Таким образом, если  $c > c_R$ , то при  $s = \left( \frac{c^2}{c_R^2} - 1 \right)^{1/2}$  выражение  $\Delta(s)$

обратится в нуль. Исходя из этого, получаем дополнительное ограничение на фазовую скорость бегущих угловых волн в виде

$$(17) \quad c < c_R,$$

т. е. угловые моды в клине (если они существуют) должны иметь фазовую скорость меньше скорости волны Рэля.

Для решения системы (12) и последующего анализа кинематики движения в угловой моде полезным оказывается знание асимптотических свойств неизвестных  $x(s)$  и  $y(r)$  при больших значениях аргументов. Эти свойства выражаются равенством

$$(18) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} x(s) = - \lim_{r \rightarrow \infty} y(r) = a_0 = \text{const},$$

справедливым при условии, что функции  $\bar{f}(r)$  и  $\bar{g}(s)$  убывают не медленнее, чем  $1/r^2$  и  $1/s^2$  соответственно ([11]). Соотношение (18) оказывается важным как при анализе напряженно-деформированного состояния волновода, так и при разработке эффективного алгоритма решения системы (12).

При переходе к интегралам в конечных пределах принимаются условия

$$(19) \quad x(s) = a_0 (s > P); \quad y(r) = -a_0 (r > P); \\ a_0 = \frac{x(P) - y(P)}{2}.$$

После решения полученной таким образом конечной системы легко вычисляются все характеристики волнового поля. Так, например, нормальное напряжение  $\sigma_{11}$  на границе  $x_1 = 0$  вычисляется по формуле

$$(20) \quad \frac{1}{2G} \sigma_{11}(0, \bar{x}_2) = \int_0^P \frac{x(s)}{1+s^2} \left[ p_2 s^2 e^{-p_2 \bar{x}_2} - \frac{(p_2^2 + s^2 + 1) \left( s^2 + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{c^2}{2c_2^2} \right)}{2p_1} e^{p_1 \bar{x}_2} \right] ds - \\ - \int_0^P y(r) \Delta(r) \cos r \bar{x}_2 dr + a_0 \frac{c^2}{4(1-\nu)c_2^2} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\text{Ci}(P\bar{x}_2) - E_1(P\bar{x}_2) + e^{-P\bar{x}_2}; & \bar{x}_2 > 0 \\ 1; & \bar{x}_2 = 0 \end{array} \right\}$$

где  $Ci(z) = - \int_z^{\infty} \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi$ ;  $E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$  — известные специальные функции — интегральный косинус и интегральная экспонента.

То обстоятельство, что член с  $a_0$  не исчезает и при  $\bar{x}_2=0$  является принципиально важным. Оно указывает на не устранимую путем увеличения  $P$  погрешность в определении напряжений вблизи ребра при решении системы (12) способом простой редукции.

При дальнейшем исследовании угловых мод в клине целесообразно изучать отдельно симметричные и антисимметричные относительно диагональной плоскости  $x_1=x_2$  типы движений. В первом случае  $\bar{u}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv \bar{u}_2(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$ , а во втором —  $\bar{u}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv -\bar{u}_2(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$ . Это связывает неизвестные плотности в (14) соотношениями  $x(s) \equiv y(s)$  для симметричного случая и  $x(s) \equiv -y(s)$  — для антисимметричного. Соответственно упрощается и система (12), переходя в одно интегральное уравнение. Отметим, что для симметричных типов движений  $a_0 \equiv 0$ , что позволяет применять способ простой редукции при решении интегрального уравнения.

Остановимся на результатах расчетов, выполненных для клина с  $\nu=0,2$ ;  $c_R=0,911c_2$ . Результаты приведены для  $P=6$ , а интегрирование проводилось методом Гаусса по 24 узлам. Изменение  $P$  и числа узлов интегрирования в широких пределах не приводило к существенным отличиям в картине волнового поля.

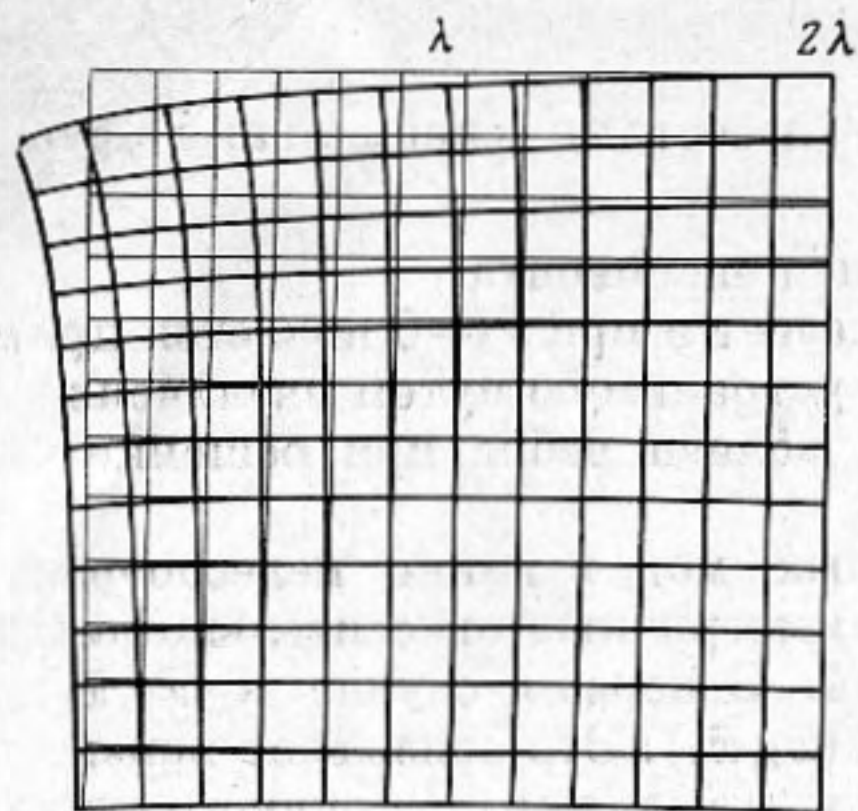
Анализ случая симметричных движений ( $f(\bar{x}_2) = e^{-\bar{x}_2}$ ;  $g(\bar{x}_1) = e^{-\bar{x}_1}$ ) показал, что в области  $0 < c < c_R$  нет резонансных ситуаций и, следовательно, симметричная угловая мода в клине с прямым углом при вершине не существует.

Для антисимметричных движений ( $f(\bar{x}_2) = e^{-\bar{x}_2}$ ;  $g(\bar{x}_1) = -e^{-\bar{x}_1}$ ) было установлено, что при изменении  $c$  от  $0,897 c_2$  до  $0,898 c_2$  происходит скачкообразное изменение фазы (знака) всех характеристик напряженно-деформированного состояния. Кроме того, при подходе, например, снизу к  $c = 0,897 c_2$  все величины обнаруживают тенденцию к неограниченному возрастанию. Именно по таким признакам и устанавливается наличие резонанса при рассмотрении вынужденных движений в колебательных системах. Иных резонансных значений  $c$  в указанной области обнаружено не было.

На фиг. 1 представлена картина волнового поля для антисимметричной угловой моды при  $c=0,898 c_2$ . Этот график прежде всего иллюстрирует основное свойство угловой моды — сильную локализацию волнового движения вблизи вершины. Как и в рэлеевской волне, движение практически исчезает на расстояниях порядка  $2\lambda$  от вершины ( $\lambda=2\pi/\gamma$  — длина волны). При этом характерно, что скорость убывания амплитуд смещений с ростом расстояния довольно существенно различается для точек на поверхностях  $x_1=0$  и  $x_2=0$  и внутренних точек — здесь имеет место явно выраженный эффект типа пограничного слоя. На расстоянии  $\lambda$  по границам клина модуль вектора смещений уменьшается в 4,3 раза, в то время как на диагонали  $x_1=x_2$  на этом же расстоянии он уменьшается в 7,5 раза. Аналогичные числа на расстоянии  $2\lambda$  равны 20 и 86 соответственно.

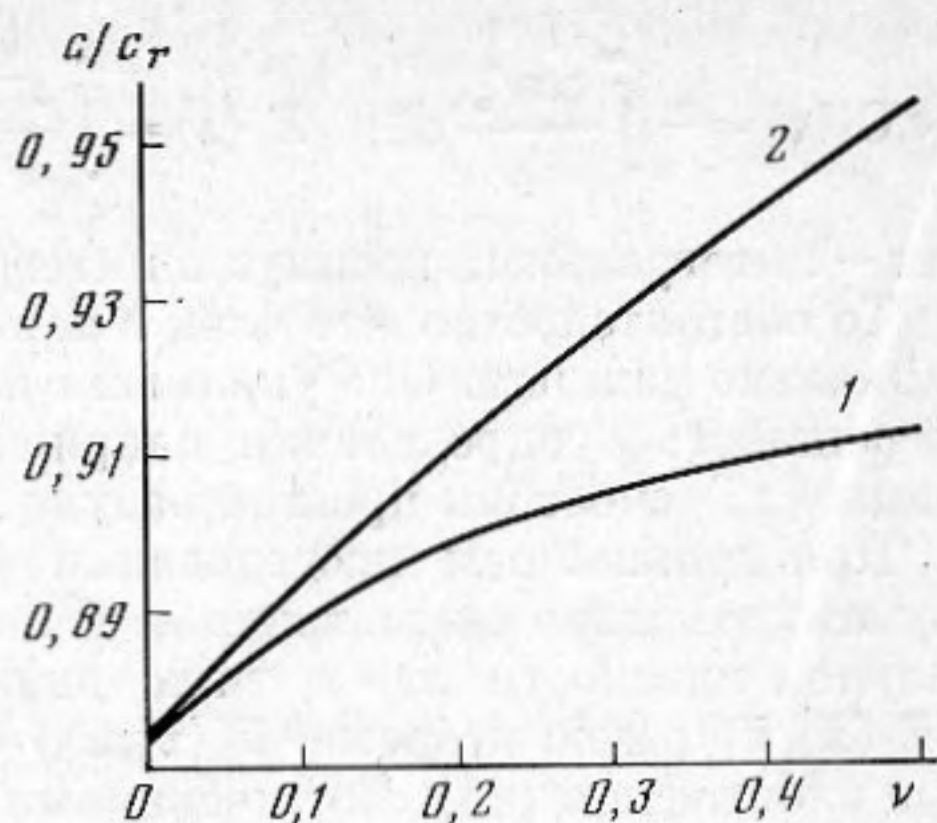
В практических применениях бесконечный клиновидный волновод либо отсекается на некоторой высоте  $H$ , либо ставится на подложку. Такие волноводы, по существу, являются бездисперсионными, если амплитуда смещения основания клина пренебрежимо мала. Сильная локализация волнового поля в клине позволяет сделать вывод, что при  $H > \lambda\sqrt{2}$  амплитуда смещения основания не превышает 5% от максимальной. Отсюда следует, что при

$$(21) \quad f > 1,27 \frac{c_2}{H}, \quad \left( f = \frac{\omega}{2\pi} \right),$$



Фиг. 1

Фиг. 1. Поле смещений в волноводе



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость от коэффициента Пуассона  $\nu$  скоростей угловой (кривая 1) и рэлеевской (кривая 2) моды

почти вся энергия сосредоточена вблизи вершины и такая структура ведет себя как бесконечный клин. Этот вывод подтверждается как вычислениями [1], так и непосредственными измерениями [1, 3].

Определенный интерес представляет зависимость скорости угловой моды от коэффициента Пуассона  $\nu$  материала. Такая зависимость показана кривой 1 на фиг. 2 и хорошо аппроксимируется формулой

$$(22) \quad \frac{c}{c_2} = 0,874 + 0,054\sqrt{\nu}.$$

Относительная погрешность аппроксимации не превышает 0,5% во всей области изменения  $\nu$ .

Кривая 2 на фиг. 2 изображает зависимость скорости волны Рэля  $c_R/c_2$  от  $\nu$ . Видно, что скорость рэлеевской волны более чувствительна к изменению  $\nu$ . С увеличением  $\nu$  разница значений скоростей рэлеевской и угловой моды становится значительной. Это обстоятельство следует иметь в виду при выборе материала для уголкового волновода. В волноводе из материала, близкого к несжимаемому ( $\nu \approx 0,5$ ), потери за счет возбуждения рэлеевских волн будут минимальными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lagasse P. E. Analysis of a dispersionfree guide for elastic waves.— Electron. Lett., 1972, v. 8, № 15, p. 372–373.
2. Maradudin A. A., Wallis R. F., Mills D. L., Ballard R. L. Vibrational edge modes in finite crystals.— Phys. Rev., 1972, v. B6, № 4, p. 1106–1111.
3. Maradudin A. A. Edge modes.— Japan J. Appl. Phys. Suppl. 2, pt. 2, 1974, p. 871–878.
4. Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A. Acoustic surface waveguides — analysis and assessment. IEEE Trans.— Microwave Theory and Tech., 1973, v. MTT-21, № 4, p. 225–236.
5. Олинер А. Волноводы для поверхностных акустических волн.— Обзор. ТИИЭР, 1976, т. 64, № 5, с. 51–65.
6. Moss S. L., Maradudin A. A., Cunningham S. L. Vibrational edge modes for wedges with arbitrary interior angles.— Phys. Rev., 1973, v. B8, № 6, p. 2999–3008.
7. Бондаренко В. С., Дубовицкий В. Ф. Акустические кромочные волны в изотропных твердых телах.— Акуст. ж., 1976, т. 22, № 2, с. 284–285.
8. Тютюкин В. В. Письмо в редакцию «Акустического журнала».— Акуст. ж., 1977, т. 23, № 3, с. 492.
9. Завадский Ю. В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972.
10. Wang K. C., Body D. B. Plane steady vibration of an elastic wedge.— J. Elast., 1975, v. 5, № 1, p. 15–30.
11. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.