

УДК 534.24

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСА,  
ОТРАЖЕННОГО ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Иванов И. Д.

Рассмотрена задача об отражении сферически-симметричного импульса конечной длительности произвольной формы от границы раздела двух жидких сред в случае, когда показатель преломления среды, от которой происходит отражение, меньше единицы. Для отраженного импульса получено точное интегральное представление и асимптотическое выражение при условии, что расстояние от мнимого источника велико по сравнению с протяженностью импульса как в области углов падения, не превышающих критического угла, так и при углах падения, превышающих критический угол.

Сферическая волна звукового давления, падающая из первой среды ( $z > 0$ ) на плоскую границу раздела со второй средой ( $z < 0$ ), возбуждает отраженную и преломленную волны. Задача о нахождении этих волн может быть решена методом разложения падающей волны по плоским волнам.

Решение задачи об отражении сферической волны при гармоническом излучении показывает, что на достаточно большом расстоянии от мнимого изображения источника или при достаточно высокой частоте излучения ( $kR \gg 1$ ) отражается сферическая волна с френелевским коэффициентом отражения, а в области углов отражения, превосходящих критический угол, на отраженную сферическую волну накладывается боковая волна [1].

Рассмотрим задачу об отражении сферической волны при импульсном излучении. Пусть  $\rho$  и  $c$  — плотность и скорость звука в первой среде,  $\rho_1$  и  $c_1$  — акустические параметры второй среды;  $m = \rho_1/\rho$ ,  $n = c/c_1$ ,  $n < 1$ ;  $\rho_0$  — излучаемая сферическая волна, описываемая вещественной функцией времени  $F(t)$ :

$$(1) \quad p_0 = \frac{F(t - R_0/c)}{R_0},$$

где  $R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $x = y = 0$ ,  $z = z_0$  — координаты источника (фиг. 1).

Предположим, что излучаемый импульс имеет конечную длительность  $2T$ . Тогда  $F(\tau)$  можно определить равенством

$$(2) \quad F(\tau) = F_1(\tau) [H(\tau + T) - H(\tau - T)],$$

где  $F_1(\tau)$  — непрерывная функция, определенная при вещественных  $\tau$ ,  $H(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ ,  $H(\tau) = 1$  при  $\tau > 0$ . Требуется найти выражение для отраженного импульса при условии, что расстояние от мнимого изображения источника велико по сравнению с протяженностью импульса:

$$(3) \quad R/2cT \gg 1.$$



где

$$(10) \quad w(u, \alpha) = \sqrt{(u-u_+)(u-u_-)},$$

$$(11) \quad u_{\pm} = q \cos \theta \pm \sqrt{1-q^2} \sin \theta, \quad q = c(t-\alpha)/R.$$

Учитывая выражение (9), получаем из формулы (6) выражение для отраженного импульса:

$$(12) \quad p = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T)\Phi(-T) - F_1(T)\Phi(T) + \int_{-T}^T F_1'(\alpha)\Phi(\alpha) d\alpha \right]$$

где

$$(13) \quad \Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma} \frac{V du}{w(u, \alpha)} - \int_{\Gamma^*} \frac{V du}{w(u, \alpha)} \right]$$

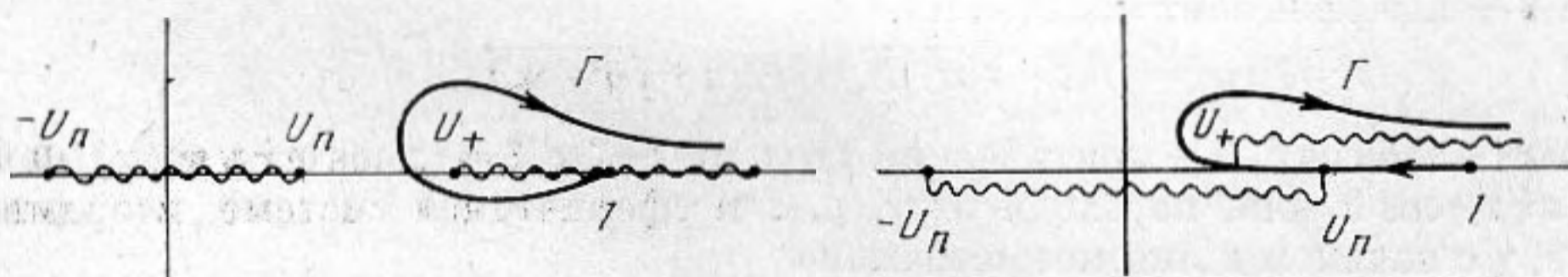
Здесь подынтегральная функция имеет особые точки:  $\pm u_n$  — точки ветвления корня  $\sqrt{u^2 - u_n^2}$ , входящего в выражение (7) для коэффициента отражения  $V(u)$ , и  $u_{\pm}$  — точки ветвления корня (10). Точки  $u_{\pm}$  вещественны при  $\alpha > \tau$ , где  $\tau = t - R/c$  (т. е. при  $q < 1$ ), и комплексны при  $\alpha < \tau$  ( $q > 1$ );  $u_+ = u_- = u_0$  при  $\alpha = \tau$  ( $q = 1$ ), где  $u_0 = \cos \theta$ . Разрезы, проведенные из точек ветвления, показаны на фиг. 2, 3 волнистыми линиями. Контур интегрирования  $\Gamma$  обходит разрез, проведенный из точки  $u_+$  до  $+\infty$ . Взаимное расположение точек  $u_+$  и  $u_n$ , от которого зависит значение интеграла по  $\Gamma$ , различно в областях  $\theta < \delta$  и  $\theta > \delta$  при разных значениях параметра  $q$ .

Выражение для  $\Phi(\alpha)$  при разных значениях  $\alpha$  получим, деформируя подходящим образом контур интегрирования  $\Gamma$  в формуле (13). Рассмотрим по отдельности случаи, когда  $\theta < \delta$  и  $\theta > \delta$ .

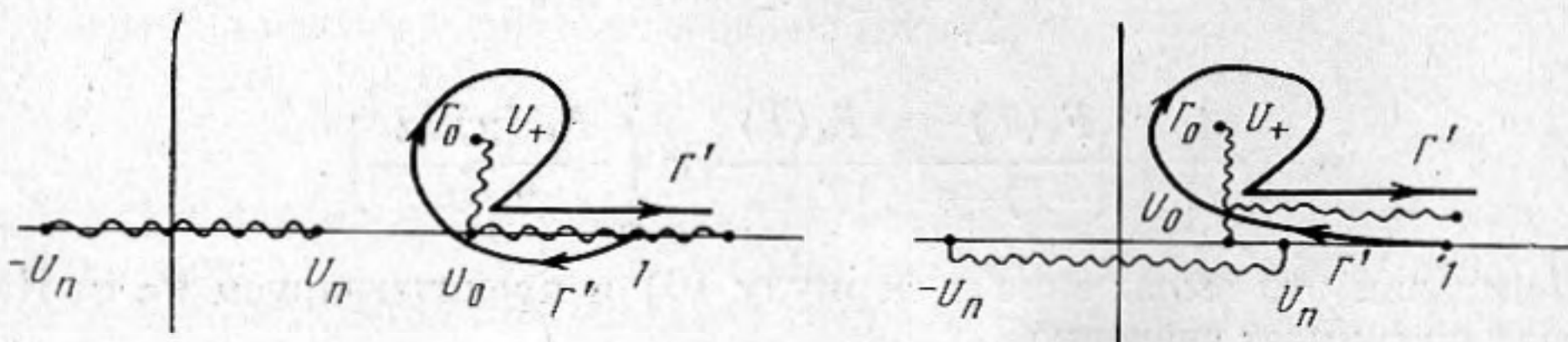
Область  $\theta < \delta$ :  $u_n < u_+$  при  $\alpha > \tau$  ( $q < 1$ ),  $u_+$  комплексна при  $\alpha < \tau$  ( $q > 1$ ). При  $\alpha > \tau$  проведем  $\Gamma$  по берегам разреза, проходящего по вещественной оси от  $u_+$  до  $+\infty$  (см. фиг. 2, а). Тогда интегралы по  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  принимают вещественные одинаковые значения. Следовательно,

$$(14) \quad \Phi(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha > \tau.$$

Величина  $\tau$  пробегает все значения на вещественной оси. Если  $\tau < -T$ , то  $\Phi(\alpha) = 0$  в интервале  $-T \leq \alpha \leq T$ . Следовательно, из формулы (12) по-



Фиг. 2. Расположение точек ветвления  $u_n$  и  $u_+$  и контура интегрирования  $\Gamma$ : а —  $u_n < u_+$  при  $q < 1$ ,  $\theta < \delta$  и при  $q < \cos(\theta - \delta)$ ,  $\theta > \delta$ ; б —  $u_+ < u_n \cos(\theta - \delta) < q < 1$ ,  $\theta > \delta$ ;  $\delta = \vartheta_n$  — критический угол



Фиг. 3. Расположение точек ветвления  $u_n$  и  $u_+$  и контура интегрирования  $\Gamma$ : а —  $u_n < u_0$ , ( $\vartheta_n > Q$ ), при  $q > 1$ ,  $\theta < \delta$ ; б —  $u_n > u_0$ , ( $\vartheta_n < Q$ ),  $q > 1$ ,  $\theta > \delta$ ;  $u_0 = \cos \theta$ ;  $\delta = \vartheta_n$

лучаем равенство

$$(15) \quad p=0 \text{ при } t < -T + R/c,$$

где  $c(t+T)=R$  — уравнение фронта отраженного импульса в области  $\theta < \delta$ .

При  $\alpha < \tau$  деформируем контур  $\Gamma$  в контур  $\Gamma_0 + \Gamma_1$  (см. фиг. 3, а), где  $\Gamma_0$  — петля, охватывающая разрез от комплексной точки ветвления  $u_+$  до  $u_0$ , контур  $\Gamma_1$  состоит из двух частей: первая часть контура проходит от  $u=1$  до  $u_0$  по нижнему берегу разреза, вторая часть проходит по верхнему берегу разреза от  $u_0$  до  $+\infty$ . Разность интегралов по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_1^*$  равна нулю. Таким образом, интегральное выражение для  $\Phi(\alpha)$  при  $\alpha < \tau$  находим из формулы (13), заменив  $\Gamma$  на  $\Gamma_0$  и  $\Gamma^*$  на  $\Gamma_0^*$ . Для интегралов по  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_0^*$  получим асимптотическое представление при условии (3). Введем новое начало отсчета времени (с момента вступления сферического фронта отраженного импульса), полагая  $t_1 = t + T - R/c$ . Тогда  $q = c(t - \alpha)/R = 1 + c(1 - T - \alpha)/R$ , где  $-T \leq \alpha \leq T$ . При значениях  $t_1$ , имеющих порядок длительности импульса, параметр  $q$  приближается к единице, если  $cT/R \rightarrow 0$ ; комплексные точки ветвления  $u_+$  и  $u_-$  приближаются к точке  $u_0 = \cos \theta$ , которая при  $q=1$  становится полюсом ( $w(u, \alpha) = u - u_0$  при  $q=1$ ), расположенным на контуре  $\Gamma_0$ . Следовательно, асимптотическим представлением интеграла по  $\Gamma_0$  является половина вычета в полюсе  $u_0$ . Из формулы (13) находим асимптотическое выражение для  $\Phi(\alpha)$ :

$$(16) \quad \Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} [\pi i V(u_0) - (-\pi i) V(u_0)] = V(u_0) \text{ при } \alpha < \tau,$$

где  $V(u_0)$  находим из формулы (7) при  $u = u_0 = \cos \theta$ .

Пусть  $-T < \tau < T$ . Тогда  $\Phi(\alpha)$  определяется равенством (14) при  $\tau < \alpha \leq T$  и равенством (16) при  $-T \leq \alpha < \tau$ . Таким образом, из формулы (12) находим выражение для  $p$ :

$$(17) \quad p = \frac{V(u_0)}{R} \left[ F_1(-T) + \int_{-T}^{\tau} F_1'(\alpha) d\alpha \right] = \\ = V(u_0) \frac{F_1(t - R/c)}{R} \text{ при } -T + \frac{R}{c} < t < T + \frac{R}{c}.$$

Если  $\tau > T$ , получаем равенство

$$(18) \quad p = \frac{V(u_0)}{R} \left[ F_1(-T) - F_1(T) + \int_{-T}^{\tau} F_1'(\alpha) d\alpha \right] = 0 \text{ при } t > T + \frac{R}{c}.$$

Равенства (15), (17) и (18) можно заменить одним равенством, если использовать формулу (2) — определение функции  $F(\tau)$ :

$$(19) \quad p = V(u_0) \frac{F(t - R/c)}{R},$$

где

$$V(u_0) = (m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}) / (m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}).$$

Таким образом, отраженная волна (19) в области  $\theta < \delta$  при условии (3) отличается от падающей сферической волны (1) френелевским коэффициентом отражения, как в случае гармонического излучения при  $hR \gg 1$ .

Область  $\theta > \delta$ :  $u_n < u_+$  при  $\alpha > \tau_1$  (т. е. при  $q < \cos(\theta - \delta)$ ), где  $\tau_1 = t - L/c$ ,  $L = R \cos(\theta - \delta)$ ;  $u_+ < u_n$  при  $\tau < \alpha < \tau_1$  ( $\cos(\theta - \delta) < q < 1$ );  $u_+$  комплексна,  $u_0 < u_n$  при  $\alpha < \tau$  ( $q > 1$ ). Величина  $\tau_1$ , как и  $\tau$ , пробегает все значения вещественной числовой оси;  $\tau_1 - \tau = (R/c) [1 - \cos(\theta - \delta)]$ . Возможны случаи, когда  $\tau_1 - \tau > 2T$  ( $R - L > 2cT$ ) и  $\tau_1 - \tau < 2T$  ( $R - L < 2cT$ ).

При  $\alpha > \tau_1$  проведем контур  $\Gamma$  по берегам разреза от  $u_+$  до  $+\infty$ , как и при  $\theta < \delta$  (см. фиг. 2, а). Тогда получим из формулы (13) равенство

$$(20) \quad \Phi(\alpha) = 0, \text{ при } \tau_1 < \alpha.$$

При  $\tau < \alpha < \tau_1$  контур интегрирования по формуле (13) также проведем по берегам разреза, проходящего по вещественной оси от  $u_+$  до  $+\infty$  (см. фиг. 2, б). Но интегралы по  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  имеют комплексно-сопряженные значения в интервале от  $u_+$  до  $u_n$ , на котором коэффициент отражения (7) имеет комплексное значение. Таким образом, получаем из формулы (13) выражение для  $\Phi(\alpha) = \tilde{\Phi}(\alpha)$ :

$$(21) \quad \tilde{\Phi}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{u_+}^{u_n} \frac{\psi(u) du}{w(u, \alpha)} \quad \text{при } \tau < \alpha < \tau_1,$$

где

$$(22) \quad \psi(u) = -\operatorname{Im} V = \sin 2\varphi = \frac{2m\sqrt{u_n^2 - u^2}}{u_n^2 + (m^2 - 1)u^2}$$

$$(23) \quad \varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{u_n^2 - u^2}/mu).$$

При  $\alpha < \tau$  деформируем контур  $\Gamma$  в контур  $\Gamma_0 + \Gamma_1$  (см. фиг. 3, б). Тогда

$$(24) \quad \Phi(\alpha) = \Phi_0(\alpha) + \Phi_1(\alpha) \quad \text{при } \alpha < \tau,$$

где

$$(25) \quad \Phi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_0} \frac{V du}{w(u, \alpha)} - \int_{\Gamma_0^*} \frac{V du}{w(u, \alpha)} \right] \quad \text{при } \alpha < \tau,$$

$$(26) \quad \Phi_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{u_0}^{\bar{u}_n} \frac{\psi(u) du}{w(u, \alpha)} \quad \text{при } \alpha < \tau.$$

Теперь, учитывая формулы (20)–(26), можно представить выражение (12) для  $p$  в различном виде при разных значениях  $\tau_1$  и  $\tau$ . Рассмотрим случай, когда  $\tau_1 - \tau > 2T$ . Если  $\tau_1 < -T$ , то соотношение (20) справедливо при  $-T \leq \alpha \leq T$ . Следовательно, мы получаем из формулы (12) равенство

$$(27) \quad p = 0 \quad \text{при } t < -T + L/c,$$

$c(t+T) = L$  есть уравнение переднего фронта отраженного импульса (боковой волны) в области  $\theta > \delta$ . Величину  $L$  можно представить в виде (см. работу [1])

$$(28) \quad L = L_0 + nL_1 + L',$$

где

$$(29) \quad L_0 = z_0/\cos \delta, \quad L_1 = r - (z_0 + z) \operatorname{tg} \delta, \quad L' = z/\cos \delta,$$

$L$  — оптическая длина пути; отрезки  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L'$  показаны на фиг. 1.

Если  $-T < \tau_1 < T$  и  $\tau < -T$ , то  $\Phi(\alpha)$  определяется равенствами (20) при  $\tau_1 < \alpha \leq T$  и равенством (21) при  $-T \leq \alpha < \tau_1$ . Подставляя выражения (20) и (21) в формулу (12), получаем для боковой волны  $p = \tilde{p}$  выражение

$$(30) \quad \tilde{p} = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \tilde{\Phi}(-T) + \int_{-T}^{\tau_1} F_1'(\alpha) \tilde{\Phi}(\alpha) d\alpha \right]$$

$$\text{при } -T + \frac{L}{c} < t < T + \frac{L}{c}.$$

Если  $\tau_1 > T$  и  $\tau < -T$ ,  $\Phi(\alpha)$  определена равенством (21) в интервале  $-T \leq \alpha \leq T$ , и для  $\tilde{p}$  получаем выражение

$$(31) \quad \tilde{p} = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \tilde{\Phi}(-T) - F_1(T) \tilde{\Phi}(T) + \int_{-T}^T F_1'(\alpha) \tilde{\Phi}(\alpha) d\alpha \right]$$

при  $T + \frac{L}{c} < t < -T + \frac{R}{c}$ .

Если  $\tau_1 > T$  и  $-T < \tau < T$ , функция  $\Phi(\alpha)$  определена равенствами (21) при  $\tau < \alpha \leq T$  и (24) при  $-T \leq \alpha < \tau$ . Подставляя выражения (21) и (24) в формулу (12), представим отраженный импульс в виде наложения двух импульсов:

$$(32) \quad p = p_0 + p' \quad \text{при} \quad -T + R/c < t < T + R/c,$$

где

$$(33) \quad p_0 = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \Phi_0(-T) + \int_{-T}^{\tau} F_1'(\alpha) \Phi_0(\alpha) d\alpha \right],$$

$$(34) \quad p' = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \Phi_1(-T) + \int_{-T}^{\tau} F_1'(\alpha) \Phi_1(\alpha) d\alpha - F_1(T) \tilde{\Phi}(T) + \int_{\tau}^T F_1'(\alpha) \tilde{\Phi}(\alpha) d\alpha \right].$$

Если  $\tau > T$ , то  $\Phi(\alpha)$  определяется равенством (24) при  $-T \leq \alpha \leq T$  и для  $p$  получаем выражение

$$(35) \quad p = p_0 + p' \quad \text{при} \quad t > T + R/c,$$

где

$$(36) \quad p_0 = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \Phi_0(-T) - F_1(T) \Phi_0(T) + \int_{-T}^T F_1'(\alpha) \Phi_0(\alpha) d\alpha \right],$$

$$(37) \quad p' = \frac{1}{R} \left[ F_1(-T) \Phi_1(-T) - F_1(T) \Phi_1(T) + \int_{-T}^T F_1'(\alpha) \Phi_1(\alpha) d\alpha \right].$$

При нахождении асимптотического выражения для отраженного импульса за передним фронтом при условии (3) воспользуемся асимптотическим выражением для интегралов (21), (25) и (26). Асимптотическое выражение для интеграла (21) получим в окрестности конического фронта  $c(t+T) = L$ , а также в окрестности сферы  $c(t+T) = R$ . Введем начало отсчета времени с момента вступления конического фронта, полагая  $t_1 = t + T - L/c$ . Тогда  $q = c(t-\alpha)/R = \cos(\theta-\delta) + c(t_1 - T - \alpha)/R$ , где  $-T \leq \alpha \leq T$ . При значениях  $t_1$ , имеющих порядок величины длительности импульса, и при  $cT/R \rightarrow 0$  параметр  $q$  стремится к значению  $\cos(\theta-\delta)$ . Для  $u_+$  при  $q = \cos(\theta-\delta)$  получаем из формулы (11) значение нижнего предела в интеграле (21):

$$(38) \quad u_+ \approx u_n - \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\sin \delta}{\sin(\theta-\delta)} \frac{c(t_1 - T - \alpha)}{R}$$

Введем в формуле (21) новую переменную интегрирования посредством соотношения  $u_+ = u - v$ ,  $v \leq \varepsilon$  и разложим подынтегральные функции в ряд

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , полагая

$$\begin{aligned} \psi(u) &\approx (2\sqrt{2}/m\sqrt{\cos \delta})\sqrt{\varepsilon-v}, \quad w(u, \alpha) = \\ &= \sqrt{(u_+ + v - u_-)v} \approx \sqrt{(u_+ - u_-)v} \approx \sqrt{2v \sin \theta \sin(\theta - \delta)}. \end{aligned}$$

Тогда мы получаем равенство

$$(39) \quad \begin{aligned} \tilde{\Phi}(\alpha) &= \frac{4}{\pi m \sqrt{\cos \delta} \sin \theta \sin(\theta - \delta)} \int_0^\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon - v}}{\sqrt{v}} dv = \\ &= \frac{2\varepsilon}{m \sqrt{\cos \delta} \sin \theta \sin(\theta - \delta)}. \end{aligned}$$

Учитывая значение  $\varepsilon$  из (38) и соотношения  $\sin \vartheta = r/R$ ,  $\sin \delta = n$ ,  $R \sin(\theta - \delta) = L_1 \cos \delta$  (см. [1]), где  $L_1$  определяется из (29), получаем из формулы (39) асимптотическое представление для  $\tilde{\Phi}(\alpha)$ :

$$(40) \quad \tilde{\Phi}(\alpha) = \frac{2n}{m(1-n^2)} \frac{Rc(\tau_1 - \alpha)}{\sqrt{r} L_1^{3/2}} \quad \text{при } \tau < \alpha < \tau_1.$$

При нахождении асимптотического представления интеграла (21) в окрестности поверхности  $c(t+T) = R$  введем новое начало отсчета времени, полагая  $t_1 = t + T - R/c$ . Тогда  $q = 1 + c(t_1 - T - \alpha)/R$ . Если  $cT/R \rightarrow 0$ , то  $q \rightarrow 1$ ,  $u_\pm \rightarrow u_0$ . Подынтегральная функция в формуле (21) имеет особенность на нижнем пределе, поскольку  $w(u, \alpha) \rightarrow u - u_0$  при  $u_\pm \rightarrow u_0$ . Поэтому для вычисления интеграла (21) полагаем

$$(41) \quad \psi(u) = \psi(u_0) + (u - u_0)\psi_1(u), \quad \text{где } \psi(u_0) = \sin 2\varphi_0.$$

Функция  $\psi_1(u)$ , найденная из формулы (22), не имеет особенностей в пределах интегрирования. Подставим выражение (41) в формулу (21) и вычислим интеграл от первого слагаемого в формуле (41). Тогда

$$(42) \quad \begin{aligned} \tilde{\Phi}(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_0 \ln \frac{w(u_n, \alpha) + u_n + u_0 q}{w(u_0, \alpha) + u_0 - u_0 q} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{u_0}^{u_n} \frac{u - u_0}{w(u, \alpha)} \psi_1(u) du. \end{aligned}$$

При  $cT/R \rightarrow 0$  получаем равенство

$$(43) \quad \tilde{\Phi}(\alpha) = -\frac{\sin 2\varphi_0}{\pi} \ln(\alpha - \tau) + C, \quad \tau < \alpha < \tau_1.$$

Интеграл (25) имеет асимптотическое представление, аналогичное выражению (16):

$$(44) \quad \Phi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} [\pi i e^{-2i\varphi_0} - (-\pi i) e^{2i\varphi_0}] = \cos 2\varphi_0.$$

Интеграл (26) имеет асимптотическое представление, аналогичное выражению (43):

$$(45) \quad \Phi_1(\alpha) = -\frac{\sin 2\varphi_0}{\pi} \ln(\tau - \alpha) + C, \quad \alpha < \tau.$$

Теперь, используя формулы (40) и (43)–(45), мы получим асимптотическое выражение для отраженного импульса из формул (30)–(37). Подставляя выражение (40) в формулу (30), находим выражение для боко-

$$(46) \quad \bar{p} = \frac{2nc}{m(1-n^2)\sqrt{r}L_1^{3/2}} \int_{-T}^T F_1(\alpha) d\alpha$$

при  $-T + \frac{L}{c} < t \leq T + \frac{L}{c}$ .

Выражение (46) также справедливо при некоторых  $t > T + L/c$ , для которых справедливо равенство (40).

Подставляя выражения (43)–(45) в формулу (33), находим выражения для  $p_0$  и  $p'$ :

$$(47) \quad p_0 = \cos 2\varphi_0 \frac{F_1(t-R/c)}{R} \quad \text{при} \quad -T + \frac{R}{c} < t < T + \frac{R}{c},$$

$$(48) \quad p' = \sin 2\varphi_0 \frac{1}{\pi R} \int_{-T}^T \frac{F_1(\alpha) d\alpha}{\alpha - \tau} \quad \text{при} \quad -T + \frac{R}{c} < t < T + \frac{R}{c}.$$

Из формул (32), (47) и (48) получаем выражение для отраженного импульса:

$$(49) \quad p = \cos 2\varphi_0 \frac{F_1(t-R/c)}{R} + \sin 2\varphi_0 \frac{\Psi(t-R/c)}{R}$$

при  $-T + \frac{R}{c} < t < T + \frac{R}{c}$ ,

где

$$(50) \quad \Psi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{F_1(\alpha) d\alpha}{\alpha - \tau}, \quad \text{где} \quad -T < \tau < T.$$

Интеграл (50) понимается в смысле главного значения.

Подставляя выражение (44) в формулу (36), получаем равенство

$$(51) \quad p = 0 \quad \text{при} \quad t > T + R/c.$$

Подставляя выражение (45) в формулу (37) и учитывая формулы (35) и (51), находим выражение для отраженного импульса

$$(52) \quad p = p' = \sin 2\varphi_0 \frac{\Psi(t-R/c)}{R} \quad \text{при} \quad t > T + \frac{R}{c}, \quad \tau > T.$$

Таким образом, нахождение асимптотического выражения для отраженного импульса в области  $\theta > \delta$  по заданному выражению (2), которое описывает форму падающего сферического импульса, сводится к вычислению интегралов (46) и (50). Асимптотическое представление отраженного импульса получено при условии  $cT/R \rightarrow 0$ . Это условие должно быть использовано в выражении для  $\Psi(\tau)$ , найденного при вычислении интеграла (50).

Пусть, например,  $F_1(\tau) = \exp(-\lambda(\tau+T))$ . Тогда из формулы (46) получаем выражение для боковой волны

$$\bar{p} = \frac{4n \exp(-\lambda(t+T-L/c))}{\kappa m(1-n^2)\sqrt{r}L_1^{3/2}} \operatorname{sh} \left[ \lambda \left( t + T - \frac{L}{c} \right) / 2 \right],$$

где  $\kappa = \lambda/c$ , и из формулы (50) находим значение  $\Psi(\tau)$ :

$$\Psi(\tau) = \exp(-\lambda(\tau+T)) [Ei(u_+) - Ei(u_-)],$$

где  $Ei(u_{\pm})$  — интегральная показательная функция,  $u_{\pm} = \lambda [t+T - (R/c) (1 \mp cT/R)]$ ;  $u_+ = u_-$  при  $cT/R = 0$  и  $\Psi(\tau) = 0$ .

Если  $F_1(\tau) = \cos \omega \tau$  и  $\cos \omega T = 1$ ,  $\sin \omega T = 0$ , получаем из формулы (46) выражение для боковой волны:

$$\tilde{p} = \frac{2n \sin \omega (t+T-L/c)}{km(1-n^2)\sqrt{r}L^{3/2}}, \quad \text{где } k = \omega/c.$$

Из формулы (50) находим выражение для  $\Psi(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= -\sin \omega \tau - (1/\pi) \cos \omega \tau [ci(\omega(T+\tau)) - \\ &- ci(\omega(T-\tau))] - (1/\pi) \sin \omega \tau [si(\omega(T+\tau)) - si(\omega(T-\tau))] \\ &\text{при } -T < \tau < T, \\ \Psi(\tau) &= (1/\pi) \cos \omega \tau [ci(v_-) - ci(v_+)] + \\ &+ (1/\pi) \sin \omega \tau [si(v_-) - si(v_+)] \quad \text{при } \tau > T, \end{aligned}$$

где  $si(x)$  и  $ci(x)$  — интегральные синус и косинус;  $si(x)$  монотонно возрастает в интервале  $0 < x < \pi$ ,  $ci(x)$  монотонно возрастает в интервале  $0 < x < \pi/2$ . В выражении для  $\Psi(\tau)$  при  $\tau > T$  и при  $cT/R \rightarrow 0$  полагаем  $v_+ = v_-$  на участке монотонного возрастания. При больших  $v$  функции  $si(v)$  и  $ci(v)$  имеют осциллирующий характер. Но  $si(v) \rightarrow \pi/2$  и  $ci(v)$  убывают, как  $1/v$ . Таким образом, пренебрегая величиной порядка  $1/v$ , находим значение  $\Psi(\tau) = 0$  для  $\tau > T$  и из формулы (52) получаем равенство  $p = 0$  при  $t > T + R/c$ .

Предположим, что  $\omega T \gg 1$ . Тогда, пренебрегая величинами порядка  $1/\omega T$ , находим значение  $\Psi(\tau) = -\sin \omega \tau$  при  $-T < \tau < T$  и из формулы (49) получаем для  $p$  выражение

$$p = \cos 2\varphi_0 \frac{\cos \omega \tau}{R} - \sin 2\varphi_0 \frac{\sin \omega \tau}{R} = \frac{\cos[\omega(t-R/c) + 2\varphi_0]}{R},$$

совпадающее с выражением для отраженной волны при гармоническом излучении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: «Наука», 1973.
2. Poritsky H. Extension of Weyl's integral for harmonic spherical waves to arbitrary wave shapes.— Commun. a. Appl. Math., 1951, v. 4, № 1, p. 33.
3. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
5.V.1980