АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 2

УДК 534.87

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ШУМОВОГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВБЛИЗИ РЕБРА КЛИНА

Карновский А. М.

Определена пространственная корреляционная функция шумового поля, создаваемого системой статистических стационарных источников, хаотически расположенных вблизи ребра клина. Высказываются физические соображения о возможности применения полученных результатов.

Ниже определяется пространственная корреляционная функция шумового поля в клине с одной мягкой и другой жесткой границами. Поле возбуждается точечными случайными стационарными (в вероятностном смысле) источниками, расположенными хаотически вблизи ребра клина.

Детерминированная задача определения поля точечного источника или совокупности таковых в клине рассматривалась в работах Г. Д. Малюжинца и его школы [1–6]. Принятая нами модель основана на предположении, что шумовое поле возбуждается указанными источниками, распределенными в некоторой области D вблизи ребра клина, тогда как шумовое поле определяется на достаточном удалении от рассматриваемой области D. Пусть r, z, φ – цилиндрическая ($0<r<\infty$, $0<\vartheta<\pi$, $0<\varphi<\Phi$, ось z совпадает с ребром клина) и ρ, ϑ, φ – сферическая ($0<\rho<\infty$, $0<\vartheta<\pi$, $0<\varphi<\Phi$) системы координат. Плоскость $\varphi=0$ соответствует мягкой границе, $\varphi=\Phi$ – жесткой границе, Φ – угол раскрыва клина.

Поле внутри клина в точке $\mathbf{x}$: (r, z, φ) мы представим в виде

$$(1)\qquad \psi(\omega,\mathbf{x})=\psi(\omega,r,z,\varphi)=\int_D G(\omega,r,z,\varphi/r_i,z_i,\varphi_i)\times$$

$$\times B(\omega,r_i,z_i,\varphi_i)r_i dz_i\, d\varphi_i,$$

где $G(\omega, r, z, \varphi/r_i, z_i, \varphi_i)$ – функция Грина данной задачи, $B(\omega, r_i, z_i, \varphi_i)$ – случайная плотность объемной скорости точечных источников шума, расположенных в точках $\mathbf{x}_i$: (r_i, z_i, φ_i) (для фиксированной частоты ω величина $B(\omega, r_i, z_i, \varphi_i)$ является случайной функцией координат r_i, z_i, φ_i). При определении функции $G(\omega, r, z, \varphi/r_i, z_i, \varphi_i)$ наиболее целесообразно воспользоваться асимптотическим выражением [6]

$$(2)\qquad G(\omega,r,z,\varphi/r_i,z_i,\varphi_i)=\frac{e^{ik\rho}}{\rho}\exp(-ikz_i\cos\vartheta)\times$$

$$\times\frac{2\pi}{\Phi}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(i\mu_n\frac{\pi}{2}\right)J_{\mu n}(kr_i\sin\vartheta)\times\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_i,$$

действительным при $k\rho(z_i/\rho)^2\to0$, $k\rho(r_i/\rho)^2\to0$, где $\rho=(r^2+z^2)^{1/2}$, $\mu_n=\pi(2n+1)/2\Phi$, $\sin\vartheta=r/\rho$, $\cos\vartheta=z/\rho$, $J_{\mu n}$ – символ функции Бесселя порядка μ_n.

В соответствии с формулой (1), пространственная корреляционная функция в точках $\mathbf{x}$: (r, z, φ) и $\mathbf{x}'$: (r', z', φ') для частот ω и ω' будет

$$(3)\qquad K(\omega, \omega', \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \Psi(\omega, \mathbf{x}) \Psi^*(\omega', \mathbf{x}') \rangle =$$

$$= \iint\limits_D \langle B(\omega, r_i, z_i, \varphi_i) B^*(\omega', r_i', z_i, \varphi_i') \rangle \times$$

$$\times G(\omega, r, z, \varphi / r_i, z_i, \varphi_i) G^*(\omega', r', z', \varphi' / r_i', z_i', \varphi_i') \times$$

$$\times r_i r_i' dr_i dr_i' dz_i dz_i' d\varphi_i d\varphi_i'.$$

Если источники, расположенные в точках $\mathbf{x}_i$: (r_i, z_i, φ_i) и $\mathbf{x}_i'$: (r_i', z_i', φ_i'), стационарны и некоррелированы, то с учетом представления δ-функции в цилиндрической системе координат мы получаем

$$(4)\qquad \langle B(\omega, r_i, z_i, \varphi_i) B^*(\omega', r_i', z_i', \varphi_i') \rangle =$$

$$= q'(\omega, r_i, z_i, \varphi_i) \delta(\omega - \omega') \frac{1}{r_i} \delta(r_i - r_i') \times$$

$$\times \delta(z_i - z_i') \delta(\varphi_i - \varphi_i'),$$

где $g'(\omega, r_i, z_i, \varphi_i)$ — пространственная спектральная плотность дисперсии источников шума. Поскольку пространственная корреляционная функция (взаимная пространственная спектральная плотность дисперсии) шумового поля будет

$$g(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \omega', \mathbf{x}, \mathbf{x}') d\omega',$$

то с учетом выражений (2)—(4)

$$(5)\qquad g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi') = g'(\omega) \frac{4\pi^2}{\Phi^2} \times$$

$$\times \frac{\exp[ik(\rho - \rho')]}{\rho \rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left[i \frac{\pi}{2} (\mu_n - \mu_m) \right] \times$$

$$\times \sin \mu_n \varphi \sin \mu_m \varphi' \int\limits_{r_i=0}^{r_{i\max}} \int\limits_{z_i=-l}^{l} \int\limits_0^{\Phi} g'(\omega, r_i, z_i, \varphi_i) \times$$

$$\times \exp[-ikz_i(\cos \vartheta - \cos \vartheta')] J_{\mu n}(kr_i \sin \vartheta) \times$$

$$\times J_{\mu n}(kr_i \sin \vartheta') \sin \mu_n \varphi_i \sin \mu_m \varphi_i r_i dr_i dz_i d\varphi_i,$$

где $\sin \vartheta' = r'/\rho'$, $\cos \vartheta' = z'/\rho'$, $\rho' = [(r')^2 + (z')^2]^{1/2}$. Примем, что шумовое поле создается источниками, пространственная спектральная плотность дисперсии которых не зависит от координат $\mathbf{x}_i$ источников шума в заданной области D. В этом случае $g'(\omega, r_i, z_i, \varphi_i) = g'(\omega)$, и из выражения (5) получаем

$$(6)\qquad g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi') = g'(\omega) \frac{2\pi^2}{\Phi} \times$$

$$\times \exp[ik(\rho - \rho')] \frac{1}{\rho \rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi' \times$$

$$\times \int\limits_0^r J_{\mu n}(kr_i \sin \vartheta) J_{\mu n}(kr_i \sin \vartheta') \times$$

$$\times r_i dr_i \int_{-l} \exp[-ikz_i(\cos\vartheta-\cos\vartheta')]dz_i,$$

поскольку

$$\int_0^\Phi \sin\mu_n\varphi_i \sin\mu_m\varphi_i d\varphi_i = \begin{cases} \Phi/2, & n=m, \\ 0, & n\neq m. \end{cases}$$

Предполагая, что источники сосредоточены вблизи ребра клина ($kr_{i\,\max} \ll \mu_n$), воспользуемся асимптотическим представлением функции Бесселя

$$J_{\mu_n}(kr_i \sin\vartheta) \approx \frac{(kr_i\sin\vartheta)^{\mu_n}}{2^{\mu_n}\mu_n!}. \tag{7}$$

В этом случае в выражении (5) существенной оказывается только одна мода, соответствующая $n=0$, и, следовательно, пространственная корреляционная функция будет

$$g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi') = \tilde{g}(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\times \tag{8}$$

$$\times\frac{\sin[kl(\cos\vartheta-\cos\vartheta')]}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'}\frac{e^{ik(\rho-\rho')}}{k^2\rho\rho'}\times$$

$$\times(\sin\vartheta)^{\mu_0}(\sin\vartheta')^{\mu_0}\sin\mu_0\varphi\sin\mu_0\varphi',$$

где

$$\tilde{g}(\omega) = g'(\omega)(kr_{i\,\max})^{2\mu_0}kr_{i\,\max}^2/2^{2\mu_0}(\mu_0+1)(\mu_0!)^2.$$

Из выражения (8) следует, что пространственная спектральная плотность дисперсии рассматриваемого шума выразится следующим образом:

$$g(\omega, r, z, \varphi, r, z, \varphi) = g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\frac{1}{k^2r^2+k^2z^2}\times \tag{9}$$

$$\times\left(\frac{r^2}{r^2+z^2}\right)^{\mu_0}\sin_2\mu_0\varphi,$$

где $g(\omega)=\tilde{g}(\omega)kl$.

При достаточно малых $kl(\cos\vartheta-\cos\vartheta')$

$$g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi') = g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\times \tag{10}$$

$$\times\frac{e^{ik(\rho-\rho')}}{k^2\rho\rho'}(\sin\vartheta)^{\mu_0}(\sin\vartheta')^{\mu_0}\sin\mu_0\varphi\sin\mu_0\varphi'.$$

Из выражений (8)–(10) следует, что при принятых предположениях функция $g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi')$ зависит от координат $\mathbf{x}$: (r, z, φ) и $\mathbf{x}'$: (r', z', φ') раздельно. Другими словами, рассматриваемое в работе шумовое поле является статистически неоднородным.

Однако в определенной области значений z и z', малых по сравнению с $2l$, поле является квазиоднородным по координате z. Для определения области квазиоднородности рассмотрим случай, когда $r'=r$, и примем, что область изменений z мала по сравнению с $2l$. Последнее означает, что углы ϑ и ϑ' близки к $\pi/2$. Полагая также $z'=z+\Delta z$, $r\gg z$, $r\gg z+\Delta z$, $\Delta z>z$, получим

$$\begin{gathered} \rho'-\rho\approx\Delta z^2/2r, \quad \rho'\rho\approx r^2+\Delta z^2/2, \\ \sin\vartheta'\sin\vartheta\approx r^2(r^2+\Delta z^2/2)^{-1}, \\ \cos\vartheta'-\cos\vartheta\approx\operatorname{ctg}\vartheta'-\operatorname{ctg}\vartheta\approx\Delta z/2. \end{gathered} \tag{11}$$

С учетом соотношений (11) из выражения (10) следует

$$g(\omega, r, z, \varphi, r, z+\Delta z, \varphi)=\tilde{q}(\omega)\frac{\sin[kl\Delta z/r]}{\Delta z/r}\times \tag{12}$$

$$\times\frac{\exp(ik\Delta z^2/2r)}{k^2r^2+k^2\Delta z^2/2}\left(\frac{r^2}{r^2+\Delta z^2/2}\right)^{\mu_0}\sin\mu_0\varphi\sin\mu_0\varphi',$$

что соответствует квазиоднородному полю вдоль координаты z.

Рассмотрим некоторые частные случаи пространственной корреляционной функции для принятой нами модели шумового поля.

Корреляция вдоль координаты z. В этом случае $r=r'$, $\varphi=\varphi'$ и из формулы (12) получим

$$g(\omega, r, z, \varphi, r, z+\Delta z, \varphi)=\tilde{g}(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\times$$

$$\times\frac{\sin[kl\Delta z/r]}{\Delta z/r}\frac{\exp(-ik\Delta z^2/2r)}{k^2r^2+k^2\Delta z^2/2}\times$$

$$\times\left(\frac{r^2}{r^2+\Delta z^2/2}\right)^{\lambda_0}\sin^2\mu_0\varphi,$$

откуда находим нормированную пространственную корреляционную функцию в виде

$$\rho(\omega, r, z, \varphi, r, z+\Delta z, \varphi)=$$

$$=\frac{\sin[kl\Delta z/r]}{kl\Delta z/r}\exp(-ik\Delta z^2/2r)\left[\frac{1}{1+\Delta z^2/2r^2}\right]^{\mu_0+1}.$$

При достаточно малых kl и при $\Delta z\ll r$

$$\rho(\omega, r, z, \varphi, r, z+\Delta z, \varphi)=\exp(-ik\Delta z^2/2r). \tag{13}$$

Корреляция вдоль координаты r. В этом случае $z=z'$, $\varphi=\varphi'$ и из формулы (10) получаем

$$g(\omega, r, z, \varphi, r', z, \varphi)=g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\frac{e^{ik(\rho-\rho')}}{k^2\rho\rho'}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\mu_0}\left(\frac{r'}{\rho'}\right)^{\mu_0}\sin^2\mu_0\varphi,$$

$$\rho(\omega, r, z, \varphi, r', z, \varphi)=\exp[ik(\rho-\rho')],$$

при $z=z'=0$

$$g(\omega, r, 0, \varphi, r', 0, \varphi)=g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\frac{\exp[ik(r-r')]}{k^2rr'}\sin^2\mu_0\varphi,$$

$$\rho(\omega, r, 0, \varphi, r', 0, \varphi)=\exp[ik(r-r')]. \tag{14}$$

Корреляция вдоль координаты φ. В этом случае $z=z'$, $r=r'$ и из формулы (10) получим

$$g(\omega, r, z, \varphi, r, z, \varphi')=g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\frac{1}{k^2\rho^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{2\mu_0}\sin\mu_0\varphi\sin\mu_0\varphi',$$

откуда $\rho(\omega, r, z, \varphi, r, z, \varphi')=1$.

Из формул (13) и (14) следует, что при $\Delta z/r\ll 1$ корреляция вдоль координаты z сильнее, чем вдоль координаты r.

В заключение отметим, что в тех случаях, когда прибрежная зона моря может быть представлена в виде клина, рассмотренная выше модель может быть применена для приближенной оценки шумового поля прибоя и для синтеза алгоритма пространственно-временной обработки сигналов при наличии такой помехи, согласно методу, предложенному в работе [7]. Действительно, возникновение шумов прибоя связано с разрушением волн вблизи берега или накатом волн на береговую черту; это позволяет считать источники такого шума случайными и расположенными вблизи ребра клина.

Результаты исследования акустических полей детерминированных источников в клине [5] были использованы, как указано в работе [8], для определения пространственных характеристик шумов прибоя. Однако в работе [8] (где речь шла не об источниках шума, а об излучателе, установленном для проведения исследований) значения kr_i принимались от 96 до 330; для нашего случая это соответствовало бы расположению источников не вблизи ребра клина, а на достаточно большом расстоянии от него. Это привело бы к существенному изменению направленности источников шума в клине и необходимости увеличения числа учитываемых мод.

Предположение (7) означает, что предполагаемые источники шума расположены у самого уреза воды либо на некотором удалении от него в области глубин, намного меньших (практически меньших) четверти длины волны. Поэтому полученные в работе результаты можно применить для приближенной оценки относительно низкочастотной части спектра шумов прибоя. Важность оценки корреляционных свойств шумов в низкочастотной части спектра согласуется с работой [9], где отмечалось сосредоточение энергии шума прибоя при сильном накате в диапазоне частот от 22 до 65 Гц.

Пространственная корреляционная функция шума для случаев, при которых соотношение (7) недействительно, также может быть получена из соотношения (6). Однако в этом случае требуются достоверные данные о расположении источников шума, которыми мы не располагаем и поэтому вынуждены заменять их теми или иными предположениями. Только при выполнении условия (7) таких данных не требуется, поскольку в этом случае значения kr_i определяют лишь абсолютные значения $g(\omega)$ и не влияют на зависимость функции $g(\omega, r, z, \varphi, r', z', \varphi')$ от расположения точек наблюдения.

Хотя слишком скудные экспериментальные данные о шумах прибоя не позволяют в настоящее время провести окончательную проверку адекватности рассмотренной нами физико-математической задачи и реального шумового поля прибоя, однако приведенные физические соображения о генерации прибойного шума в определенной степени оправдывают данное дискурсивное описание шумового поля прибоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн: Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: Физич. ин-т, 1951.
2. *Тужилин А. А.* Новые представления дифракционных полей в клиновидной области с идеальными границами.– Акуст. ж., 1963, т. 9, № 2, с. 209–214.
3. *Тужилин А. А.* Дифракционные поля в узкой клиновидной области с идеально мягкими границами.– III Всес. симп. по дифракции волн. Рефераты докл. Тбилиси, 1964.
4. *Комиссарова Н. Н.* Асимптотическое представление поля точечного источника для одной модели берегового клина.– Акуст. ж., 1972, т. 18, № 2, с. 259–264.
5. *Сахарова М. П.* Асимптотическое представление звукового поля точечного источника в клиновидной области.– Акуст. ж., 1959, т. 5, № 2, с. 215–220.
6. *Сахарова М. П.* Об одном асимптотическом представлении поля распределенного излучателя с заданным распределением объемной скорости, расположенного в клиновидной области.– Акуст. ж., 1959, т. 9, № 2, с. 215–221.
7. *Карновский А. М., Красный Л. Г.* Пространственно-временная обработка акустических сигналов в волноводах.– Акуст. ж., 1979, т. 25, № 2, с. 251–257.
8. *Захаров Л. Н., Киршов В. Н., Матвеев А. К., Наумова В. В.* О характеристике направленности точечного источника, расположенного в вершине клиновидной области пресного водоема.– Акуст. ж., 1973, т. 19, № 6, с. 912–913.
9. *Saender R.* An estimate of the offshore ambient noise spectrum produced by pounding surf.– J. Acoust. Soc. America, 1961, v. 33, № 11, p. 1964–1975.

Поступила в редакцию
29.X.1979
После исправления
23.X.1980