

УДК 534.26

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ  
ДЛЯ АНАЛИЗА РАССЕЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН*Крылов В. В.*

Рассмотрены вопросы применимости теории дисперсионных соотношений для анализа рассеяния поверхностных волн. С помощью дисперсионного соотношения с двумя вычитаниями рассчитан фазовый сдвиг коэффициента прохождения рэлеевской волны через препятствие с вертикальными стенками; эта задача не поддается прямому аналитическому рассмотрению. Приведено сравнение результатов с известными данными экспериментов.

Изучение рассеяния поверхностных волн на неоднородностях свободной границы твердого тела имеет важное значение для сейсмологии, ультразвуковой поверхностной дефектоскопии, акустоэлектроники и физики поверхностных явлений [1—7]. Большая часть аналитических исследований по рассеянию поверхностных и объемных волн выполнена с помощью первого приближения теории возмущений. Это объясняется значительными трудностями, которые возникают во втором приближении даже для гладких периодических неоднородностей [8, 9]. Если же говорить об одиночных препятствиях, то для них второе приближение вообще не может быть получено аналитически ввиду того, что в координатном пространстве известные аналитические выражения для поверхностного тензора Грина справедливы лишь в дальней зоне излучения [4, 6]. Между тем некоторые эффекты второго приближения оказываются существенными и их необходимо учитывать при расчете ряда устройств, использующих рассеяние поверхностных волн. Сюда относится прежде всего эффект изменения фазы поверхностной волны при ее прохождении через препятствие, играющий важную роль в резонаторах на поверхностных волнах [10—12]. Определенное значение имеет также существующее во втором приближении отражение поверхностной волны от периодической решетки, не содержащей вторых брэгговских гармоник возмущений [8, 10].

Мощным средством, способствующим преодолению указанных трудностей, является использование общих закономерностей процессов рассеяния, не зависящих от конкретной физической природы препятствий. К таким закономерностям относятся, например, законы сохранения для рассеяния, которым сейчас уделяется повышенное внимание [13—15]. Наряду с законами сохранения важную роль в теории рассеяния играют дисперсионные соотношения, связывающие действительные и мнимые части функций, характеризующих рассеяние [16, 17]. Если законы сохранения, проявляющиеся в унитарности  $S$ -матрицы [15], обычно вытекают из однородности рассеивающей системы во времени, то дисперсионные соотношения следуют из другого общего принципа — принципа причинности, приводящего к аналитичности  $S$ -матрицы или однозначно связанных с ней амплитуд рассеяния в области комплексных волновых чисел. Насколько нам известно, эти вопросы применительно к рассеянию поверхностных волн в литературе не обсуждались.

Мы обсудим некоторые аспекты применения теории дисперсионных соотношений к анализу рассеяния поверхностных волн, акцентируя вни-

вание на характерных для этого случая особенностях, и приведем пример конкретного расчета с их помощью величины фазового сдвига коэффициента прохождения рэлеевской волны через препятствие с вертикальными стенками.

Как и при рассеянии объемных волн в неограниченном пространстве, условие причинности для поверхностных волн означает, что при падении на неоднородность ограниченного волнового пакета соответствующий рассеянный волновой пакет не может появиться в точке наблюдения, расположенной на большом расстоянии  $r$  от рассеивателя в направлении  $\psi$  (для определенности будем рассматривать двумерную задачу), раньше некоторого времени  $t_0$ , необходимого для прохождения пакета от рассеивателя до точки наблюдения. Следствием этого факта оказывается аналитичность амплитуды рассеяния  $f_{RR}(\pi, \psi, k_R)$  как функции комплексного волнового числа  $k_R$  в некоторой области комплексной плоскости  $k_R$  [16, 17]. Здесь индексы « $R$ » означают, что выписанные величины относятся к рэлеевской волне. Однако все полученные выводы будут справедливы и для поверхностных волн других типов. Нетрудно показать, что, как и в случае рассеяния объемных волн в неограниченной среде, наибольший интерес с точки зрения применения дисперсионных соотношений представляет амплитуда прямого рассеяния поверхностной волны, характеризуемая значением  $\psi=0$ . При этом в запись условия причинности не входят форма и размеры препятствия, следовательно, соответствующие дисперсионные соотношения, обусловленные аналитичностью  $f_{RR}(\pi, 0, k_R)$  справедливы для любых рассеивателей и имеют наиболее фундаментальное значение. Для краткости в дальнейшем будем вместо  $f_{RR}(\pi, 0, k_R)$  писать просто  $f_{RR}(k)$ . Нетрудно убедиться по аналогии с [17], что из условия причинности следует аналитичность функции  $f_{RR}(k)$  в нижней полуплоскости комплексного переменного  $k$ . Для ответа на вопрос о существовании дисперсионных соотношений нужно еще исследовать асимптотическое поведение  $f_{RR}(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Пусть рассеивающее препятствие представляет собой выемку на поверхности твердого тела. Тогда при больших вещественных  $k$  величина  $f_{RR}(k)$ , очевидно, описывает дополнительный фазовый набег при огибании препятствия рэлеевской волной и, следовательно, представляет собой функцию экспоненциального роста. По этой причине непосредственно к  $f_{RR}(k)$  дисперсионные соотношения неприменимы. Этот факт не является, однако, большой потерей, так как на практике обычно интересуются не самой амплитудой рассеяния вперед, а связанным с ней коэффициентом прохождения рэлеевской волны  $K_{tr}=1+f_{RR}(k)$ , модуль которого легко определяется экспериментально или же рассчитывается с помощью оптической теоремы [15] по известным  $|K_{ref}|$  и  $|K_v|$ , где  $K_{ref}$  и  $K_v$  — соответственно коэффициенты отражения и объемного рассеяния. В этом случае естественно рассмотреть дисперсионные соотношения для модуля и фазы аналитической функции  $K_{tr}(k)$  [17]. С этой целью проанализируем выражение

$$(1) \quad G(k) = \ln K_{tr}(k) = \ln |K_{tr}(k)| + i\theta(k),$$

где  $\theta(k)$  — фаза коэффициента прохождения. Тогда

$$K_{tr}(k) = \exp [\ln |K_{tr}(k)| + i\theta(k)].$$

Поскольку величина  $K_{tr}(k)$  аналитична в нижней полуплоскости комплексного переменного  $k$ , функция  $G(k)$  также аналитична в этой полуплоскости везде, за исключением возможных нулей  $K_{tr}(k)$ , которые могли бы привести к логарифмическим особенностям у  $G(k)$ . В соответствии с общей теорией [17]  $K_{tr}(k)$  может иметь нули только на вещественной оси. Из физических соображений, однако, следует, что  $K_{tr}(k)$  не обращается в нуль и на вещественной оси (разумеется, это не относится к  $f_{RR}(k)$ , равной нулю при  $k=0$ ). Рассмотрим теперь асимптотическое поведение  $G(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно,  $G(k) = o(k)$ . Поэтому к функции  $G(k)$  не при-

менимы простейшие дисперсионные соотношения типа Крамерса — Кронига, для существования которых необходима квадратичная интегрируемость  $G(k)$ . Не справедливы также и соотношения с одним вычитанием. Однако дисперсионные соотношения с двумя и более вычитаниями остаются в силе. В частности, дисперсионное соотношение с двумя вычитаниями имеет вид

$$(2) \quad G(k) = G(k_0) + (k - k_0) G'(k_0) - \frac{(k - k_0)^2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k') - G(k_0) - (k' - k_0) G'(k_0)}{(k' - k_0)^2} \frac{dk'}{(k' - k)},$$

где  $k_0$  — некоторое вещественное значение  $k$ , а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что знак перед интегралом в формуле (2) отличается от знака в работе [17], так как функция  $G(k)$  аналитична в нижней полуплоскости  $k$ . Взяв действительную и мнимую части от выражения (2), нетрудно получить два соотношения, связывающие  $\text{Re } G(k)$  и  $\text{Im } G(k)$ . В частности, взятие мнимой части с учетом (1) дает интересующее нас дисперсионное соотношение, выражающее  $\theta(k)$  через значения  $\ln |K_{tr}(k)|$  на вещественной оси

$$(3) \quad \theta(k) = \theta(k_0) + (k - k_0) \theta'(k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K_{tr}(k')| - \ln |K_{tr}(k_0)| - (k' - k_0) [\ln |K_{tr}(k_0)|]'}{(k' - k_0)^2} \frac{dk'}{k' - k}.$$

Применим дисперсионное соотношение (3) для оценки фазового сдвига коэффициента прохождения рэлеевской волны через препятствие с вертикальными стенками. При этом мы воспользуемся известной зависимостью  $|K_{tr}(h/\lambda)|$ , рассчитанной численными методами [18] в диапазоне  $0 \leq h/\lambda \leq 1$ . Здесь  $\lambda = 2\pi/k$ , а  $h$  — глубина препятствия. Поскольку фазовые сдвиги для таких препятствий не поддаются расчету с помощью теории возмущений, а численный расчет фаз существенно более сложен по сравнению с расчетом амплитуд и не отличается точностью [18], такая оценка представляет значительный интерес.

Выбрав  $k_0 = 0$  и учитывая, что  $\theta(0) = \ln |K_{tr}(0)| = 0$  и  $\theta'(0) = [\ln |K_{tr}(0)]' = 0$  (последнее равенство является следствием теории возмущений, показывающей, что в первом приближении по  $k$  прямое рассеяние от препятствия с вертикальными стенками отсутствует), перейдем от (3) к более простой записи

$$(4) \quad \theta(k) = \frac{k^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K_{tr}(k')|}{(k')^2 (k' - k)} dk'.$$

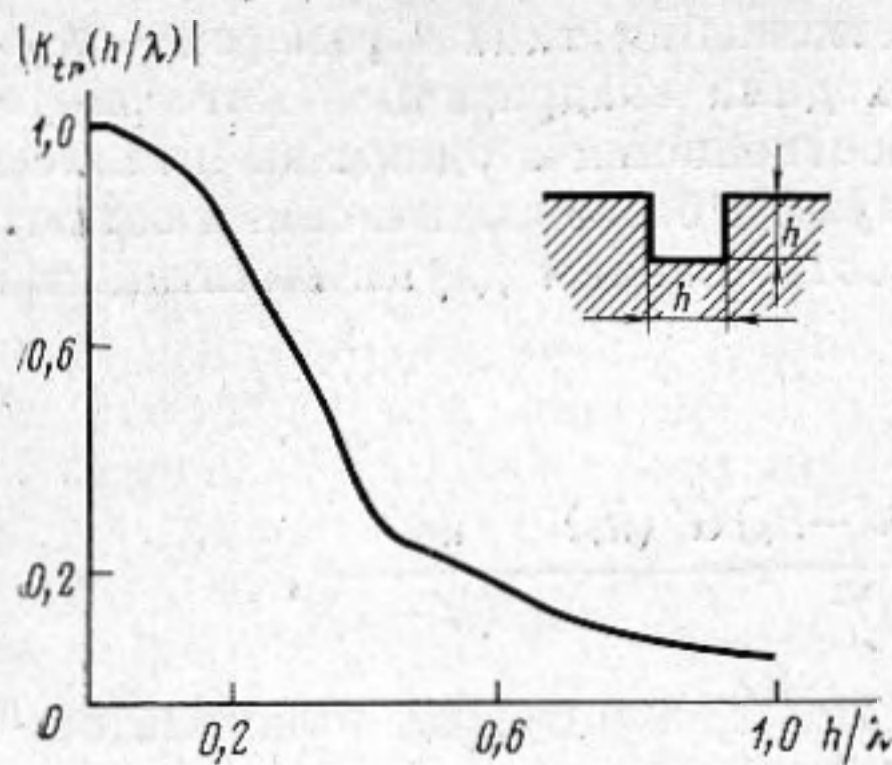
Величину  $\ln |K_{tr}(x)|$ , где  $x = h/\lambda$ , построенную в соответствии с [18] (см. фиг. 1), можно аппроксимировать следующей простой зависимостью:

$$(5) \quad \ln |K_{tr}(x)| = -20x^2 / (1 + 3x + 4x^2).$$

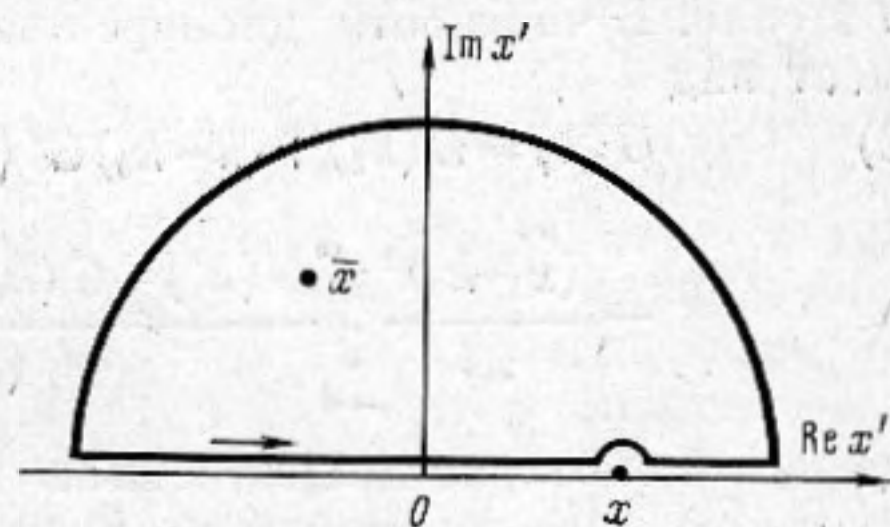
Подставляя это выражение в (4) и переходя к переменной  $x$ , получим

$$(6) \quad \theta(x) = -\frac{20x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(1 + 3x' + 4x'^2)(x' - x)}$$

Для расчета (6) перейдем к интегрированию по комплексной переменной  $x'$ , воспользовавшись контуром интегрирования, изображенным на фиг. 2. Интеграл (6) равен при этом сумме полувычета в точке  $x' = x$  и



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Расчетная зависимость модуля коэффициента прохождения рэлеевской волны через прямоугольную выемку [18]

Фиг. 2. Контур интегрирования на плоскости комплексного переменного  $x'$

вычета в точке  $x' = \bar{x} = (-3 + i\sqrt{7})/8$ , соответствующей корню уравнения  $1 + 3x' + 4x'^2 = 0$ , лежащему в верхней полуплоскости. Таким образом,

$$(7) \quad \theta(x) \approx (22,6x^2 + 62x^3) / (1 + 3x + 4x^2).$$

Легко убедиться, что при  $x \ll 1$   $\theta(x) \approx 22,6x^2$ . Сравнивая это выражение с экспериментальной зависимостью фазового сдвига [11]  $\theta(x) = 25,2x^2$ , измеренной для кристалла  $Y-ZLiNbO_3$ , характеризуемого тем же эквивалентным коэффициентом Пуассона ( $\sigma = 0,31$ ), который использовался в работе [18]; видим, что согласие очень хорошее. При  $x \gg 1$  сдвиг фазы коэффициента прохождения принимает значение  $\theta(x) \approx 5,56 + 15,5x$ . Оба слагаемых допускают при этом весьма простое толкование. Действительно, 5,56 (рад) — это, очевидно, сумма фазовых сдвигов, возникающих при прохождении рэлеевской волны через четыре прямых угла прямоугольного препятствия [19, 20], а  $15,5x$  — дополнительный линейный фазовый набег, обусловленный огибанием препятствия поверхностной волной. Из простых геометрических соображений следует, что последний равен  $2h \cdot k = 4\pi k \approx 12,5x$ , что хорошо согласуется со значением, рассчитанным с помощью дисперсионного соотношения. Приведенный пример показывает, что на первый взгляд различные параметры, характеризующие рассеяние поверхностной волны, оказываются связанными между собой соотношениями вида (2) — (4), вытекающими из принципа причинности. Эти соотношения позволяют не только полностью восстановить функцию  $G(x)$ , или, что то же,  $K_{tr}(x)$  и  $f_{RR}(x)$  по известной зависимости действительной или мнимой частей, как это делалось выше, но и пользоваться для этой цели различными предельными случаями (в соответствии с настоящим обсуждением) и качественными соображениями.

Укажем здесь еще на один факт, характерный для рассеяния поверхностных волн, а именно на несимметричность функции  $\ln |K_{tr}(x)|$  и  $\theta(x)$  относительно изменения знака  $x$  (см. (5) и (7)). То же самое, разумеется, относится к действительной и мнимой частям амплитуды рассеяния. Как известно, в случае рассеяния однородных волн действительные и мнимые части амплитуд рассеяния или их модули и фазы являются соответственно четными и нечетными функциями частоты [17]. Можно показать, что для поверхностных волн это в общем случае не имеет места вследствие нарушения трансляционной инвариантности пространства, обусловленного наличием границы. Похожая асимметрия проявляется и в нарушении четности коэффициента затухания рэлеевской волны, распространяющейся вдоль трехмерной изотропной шероховатой поверхности [5—7] (см. также [21]). При этом затухание в длинноволновом пределе пропорционально

$\omega^5$ , где  $\omega$  — круговая частота, и не удовлетворяет известному для однородных волн свойству симметрии коэффициентов преломления  $n(\omega)$ , характеризующих затухание и дисперсию,  $n(-\omega) = n^*(\omega)$  или  $\text{Re } n(-\omega) = \text{Re } n(\omega)$  и  $\text{Im } n(-\omega) = -\text{Im } n(\omega)$  [16, 17]. Заметим, что закон  $\sim \omega^5$  для затухания рэлеевской волны наблюдался экспериментально в работе [22] оптическими методами. Применительно к дисперсионным соотношениям вида (2) описанное нарушение симметрии вызывает некоторые затруднения, заключающиеся в невозможности перехода к интегрированию по физической области частот  $\omega > 0$  [16, 17]. Простейший способ преодоления этих трудностей состоит в аппроксимации зависимостей, используемых в дисперсионных соотношениях, аналитическими функциями при  $\omega > 0$  и в последующем их аналитическом продолжении на нефизическую область  $\omega < 0$ . Именно такая процедура и была проделана в приведенном примере расчета фазового сдвига коэффициента прохождения рэлеевской волны.

Автор глубоко признателен В. А. Красильникову за постоянное внимание и интерес к работе, а также Л. М. Бреховских и участникам руководимого им семинара за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. О распространении поверхностных акустических волн Рэля вдоль неровной границы упругого тела.— Акуст. ж., 1959, т. 5, № 3, с. 282–289.
2. Gilbert F., Knopoff L. Seismic scattering from topographic irregularities.— J. Geophys. Res., 1960, v. 65, № 10, p. 3437–3444.
3. Parekh J. P., Tuan H. S. Reflection and bulk wave conversion of Rayleigh wave at single shallow groove.— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, № 3, p. 994–1003.
4. Simons D. A. Reflection of Rayleigh waves by strips, grooves, and periodic arrays of strips and grooves.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 63, № 5, p. 1292–1301.
5. Sakuma T. Elastic-surface-wave scattering from point-mass defects in a solid surface.— Phys. Rev. B, 1973, v. 8, № 4, p. 1433–1440.
6. Maradudin A. A., Mills D. L. The attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness.— Annals of Physics, 1976, v. 100, p. 262–309.
7. Wallis R. F., Mills D. L., Maradudin A. A. Attenuation of Rayleigh waves by point defects.— Phys. Rev. B, 1979, v. 19, № 8, p. 3981–3995.
8. Гуляев Ю. В., Курач Т. Н., Плесский В. П. Отражение поверхностных акустических волн от конечной системы периодических возмущений.— Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, № 5, с. 275–278.
9. Лапин А. Д. Влияние формы зубцов отражательной решетки для рэлеевских волн на ее резонансные свойства.— Акуст. ж., 1980, т. 26, № 1, с. 104–111.
10. Li R. C. M., Melngailis J. The influence of stored energy at step discontinuities on the behaviour of surface wave grating.— IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1975, v. 22, № 3, p. 189–198.
11. Melngailis J., Williamson R. C. Interaction of surface waves and bulk waves in gratings: phase shifts and sharp surface-wave/reflected bulk wave resonances.— In: Ultrason. Symp. Proc., Cherry Hill, N. J., 1978, p. 623–629.
12. Белл, Ли. Резонаторы на поверхностных акустических волнах.— ТИИЭР, 1976; т. 64, № 5, с. 171–183.
13. Waterman P. S. Matrix theory of elastic wave scattering.— J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v. 60, № 3, p. 567–579.
14. Mei C. C. Extensions of some identities in elastodynamics with rigid inclusions.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 64, № 5, p. 1514–1522.
15. Крылов В. В. Оптическая теорема для рассеяния волн деформации на неоднородностях плоской границы твердого тела.— Акуст. ж., 1980, т. 26, № 2, с. 214–217.
16. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
17. Нуссенцевейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976.
18. Damiano J.-P., Rivier E. A powerful method to obtain a general analysis of lossy grooves.— In: Ultrason. Symp. Proc., Annapolis, Mar., 1976, p. 498–500.
19. Kane J., Spence J. Rayleigh wave transmission on elastic wedges.— Geophysics, 1963, v. 28, № 5, p. 715–723.
20. Mal A. K., Knopoff L. Transmission of Rayleigh waves at a corner.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1966, v. 56, № 2, p. 455–466.
21. Крылов В. В., Лямов В. Е. Дисперсия и поглощение рэлеевской волны, распространяющейся вдоль шероховатой поверхности.— ЖТФ, 1979, т. 49, № 11.
22. De Vries A. J., Miller R. L. Optical measurement of surface-wave scatter losses in piezoelectric ceramics.— Appl. Phys. Lett., 1972, v. 20, № 6, p. 210–212.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова,  
физический факультет

Поступила в редакцию  
5.VI.1980