

УДК 534.26

**КАРТИНА ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН
В ГИДРОАКУСТИКЕ МОРСКОГО ШЕЛЬФА**

(модельный эксперимент)

Кузнецов В. К.

В прибрежной полосе шельфа в условиях изменяющейся в зависимости от расстояния от берега глубины моря наряду с горизонтальной рефракцией нормальных волн, описанной нами ранее, на характере распространения подводного звука сильно сказывается вертикальная рефракция нормальных волн. Она обуславливает затухание нормальной волны вследствие излучения звука в подводный грунт при прохождении нормальной волны через неволноводную зону. Приводятся теоретические данные и экспериментальные картины, снятые на модели, подробно описывающие это явление.

Термин «вертикальная рефракция нормальных волн» вводится здесь впервые для обозначения еще не описанного гидроакустического явления. В наших ранних работах было обнаружено в эксперименте на модели и подробно исследовано теоретически [1] гидроакустическое явление рефракции нормальных волн в горизонтальной плоскости, обусловленное изменением глубины моря с расстоянием. (Впоследствии в работах американских авторов это явление получило название «горизонтальной рефракции»¹ [2].) Поскольку до сих пор рассматривалось распространение нормальных волн в волноводных зонах, где роль вертикальной рефракции пренебрежимо мала по сравнению с ролью горизонтальной рефракции, то не было и необходимости вводить в употребление слова «горизонтальная» и «вертикальная». Положение меняется, как только мы приступаем к рассмотрению волновой картины в неволноводной зоне, где главную роль начинает играть вертикальная рефракция, приводящая к изучению нормальной волны в подстилающее полупространство [3]. Таким образом, для полного описания распространения подводного звука в море переменной глубины необходимо рассматривать как горизонтальную, так и вертикальную рефракции нормальных волн.

Характерно в этом отношении распространение в морском шельфе, смоделированное нами в лабораторных условиях. Для определенности мы взяли модель клиновидного шельфа как наиболее типичный в гидроакустике вариант. Основные черты полученной при этом картины характерны и во всех других случаях при условии достаточно плавного изменения глубины моря с расстоянием. Но прежде чем приступить к рассмотрению экспериментальных картин, необходимо привести несколько общих теоретических результатов [4].

В волноводной зоне клина $r > r_m$ профиль нормальной волны $F_m(\mu\phi)$ можно представить синусоидой, в пространстве — экспонентой:

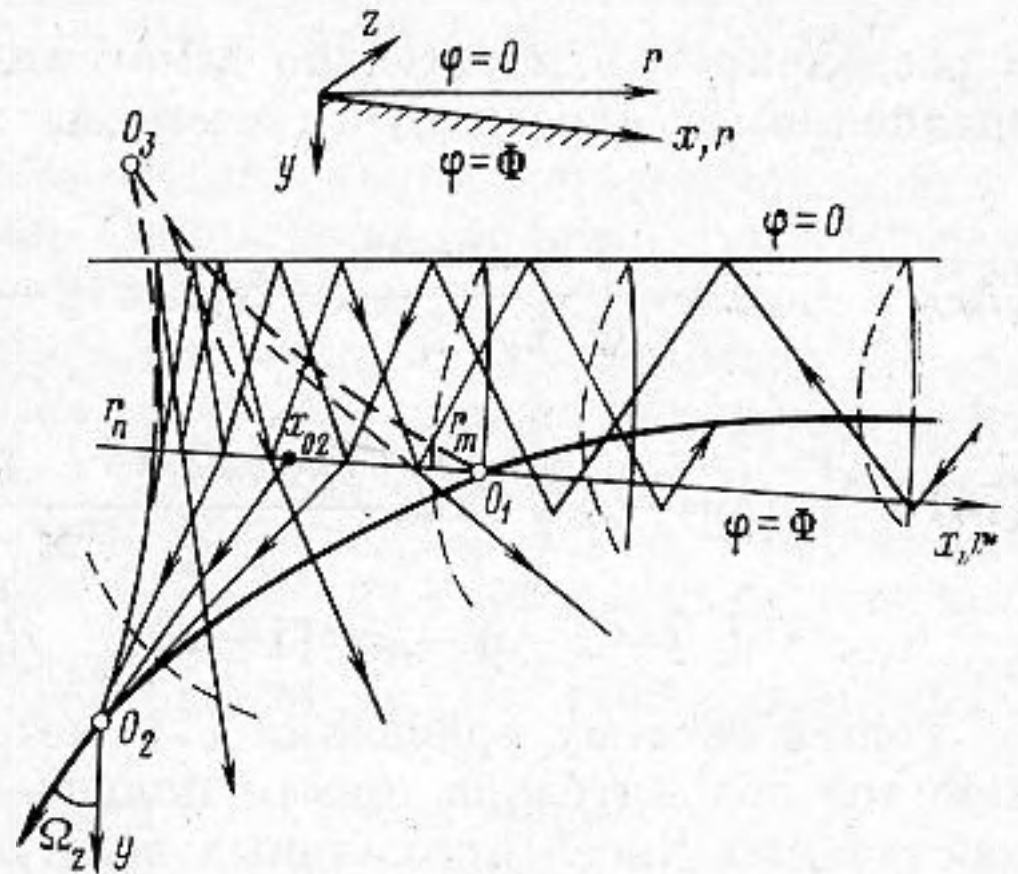
¹ Название «горизонтальная рефракция» является неопределенным, поскольку в гидроакустике известна другая горизонтальная рефракция, обусловленная изменением акустических параметров воды в горизонтальной плоскости и никак не связанная с изменением глубины моря и волноводным распространением звука. Здесь же речь идет о рефракции нормальных волн.

$$(1) \quad F_m(\mu\varphi) = \sin \mu\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \Phi; \quad F_m(\mu\varphi) = \\ = \sin \mu\Phi \exp[-\mu_1(\varphi - \Phi)], \quad \varphi \geq \Phi.$$

Здесь r, z, φ — цилиндрические координаты, изображенные на фиг. 1, Φ — угол наклона дна, величина μ определена дисперсионным уравнением

$$(2) \quad \mu\Phi = m\pi - \arctg l\mu/\sqrt{k^2r^2(1-n^2) - \mu^2}, \quad m=1, 2, \dots; \quad r \geq r_m,$$

$l = \rho_1/\rho > 1$ — отношение плотностей, $n = k_1/k < 1$ — отношение волновых чисел воды и подводного грунта. Граница волноводной зоны определяется формулой $r = r_m = (2m-1)\pi/2k\Phi\sqrt{1-n^2}$. Вертикальная рефракция нормальной волны в волноводной зоне проявляется в опускании профиля нормальной волны по мере приближения к границе волноводной зоны $r = r_m$ и в росте его экспоненциальной части в полупространстве. На самой границе зоны нижний максимум профиля опускается на дно. Все это обусловлено сдвигом фазы при полном отражении, нашедшем здесь свое выражение в арктангенсе дисперсионного уравнения (2).



Фиг. 1

Хорошо известно, что сдвиг фазы при полном внутреннем отражении можно представить как

результат смещения отраженного луча вдоль границы раздела сред из-за его углубления во вторую среду [5]. Поскольку здесь угол падения луча Бриллюэна ψ приближается к критическому углу $\psi_k = \arcsin n$ по мере приближения к границе волноводной зоны $r = r_m$, растет и сдвиг фазы при его отражении от подводного грунта и углубление в полупространство, что и проявляется в виде роста экспоненциальной части профиля нормальной волны. Все это — и ход луча Бриллюэна в клине, и изменение профиля нормальной волны — схематически изображено на фиг. 1.

Угол падения луча Бриллюэна на границу $\varphi = \text{const}$ определяется формулой

$$(3) \quad \psi = \arccos \mu/kr.$$

В волноводной зоне вертикальная рефракция проявляется в деформации профиля несущественным образом, и если нормальная волна отражается в результате горизонтальной рефракции, не доходя до границы волноводной зоны, ее профиль восстанавливает свой первоначальный вид по мере удаления от неволноводной зоны. Распространение в конечном итоге происходит без потерь на излучение в полупространство, его характер определяется в основном горизонтальной рефракцией, действительным значением волнового числа нормальной волны:

$$(4) \quad k_m = k\sqrt{1 - \mu^2/k^2r^2} = k \sin \psi.$$

В неволноводной зоне $r < r_m$ отражение на границе сред $\varphi = \Phi$ неполно, величина μ становится комплексной, профиль нормальной волны в клине $0 \leq \varphi \leq \Phi$ теряет вид стоячей волны и описывается таким выражением:

$$(5) \quad F_m(\mu\varphi) = |F_m(\mu\varphi)| e^{i\eta\varphi}, \quad |F_m(\mu\varphi)| = \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \sin^2 \alpha}, \\ \text{tg } \eta = \text{ctg } \alpha\varphi \text{tg } \beta\varphi,$$

а в полупространство излучается преломленная волна. Комплексная величина μ определена комплексным дисперсионным уравнением, которое

получается из уравнения (2) путем аналитического продолжения в область неволноводных значений $r < r_m$:

$$(6) \quad \mu = \alpha + i\beta = \frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{2m-1}{2} \pi - i \operatorname{Arth} \left[\frac{\sqrt{\mu^2 - k^2 r^2 (1-n^2)}}{l\mu} \right] \right\}, \quad m=1, 2, \dots$$

Записанное через параметр ψ (3) оно принимает простой вид:

$$(6a) \quad \mu = \alpha + i\beta = \frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{2m-1}{2} \pi - i \operatorname{Arth} \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \psi}}{l \cos \psi} \right] \right\}, \quad m=1, 2, \dots$$

В разделенном относительно действительной α и мнимой β частей виде уравнение (6) переходит в систему двух уравнений:

$$(7a) \quad \alpha = \frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{2m-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} l \{ \alpha \sqrt{R - [\]} + \beta \sqrt{R + [\]} \}}{l^2 M^2 - R} \right\}$$

$$(7b) \quad \beta = -\frac{1}{2} \Phi \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{2} l \{ \alpha \sqrt{R + [\]} - \beta \sqrt{R - [\]} \}}{l^2 M^2 + R}$$

$$[\] = \alpha^2 - \beta^2 - k^2 r^2 (1-n^2); \quad R = \sqrt{[\]^2 - 4\alpha^2 \beta^2}; \quad M^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Решая систему уравнений (7) методом последовательных приближений, мы сравнительно просто получаем действительные и мнимые части собственных чисел нормальных волн в неволноводной зоне клиновидного шельфа. В случае шельфа произвольного изменения глубины моря $H(y)$ с расстоянием от берега y дисперсионное уравнение имеет аналогичный уравнениям (2), (6) и (7) вид:

$$\mu H(y) = m\pi - \operatorname{arctg} \frac{l\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2 (1-n^2)}}, \quad r \geq r_m,$$

$$(6b) \quad \mu = \alpha + i\beta = \frac{1}{H(y)} \left\{ \frac{2m-1}{2} \pi - i \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \psi}}{l \cos \psi} \right\}, \quad m=1, 2, \dots, \quad \cos \psi = \mu/k, \quad r \leq r_m,$$

$$(7b) \quad \alpha = \frac{1}{H(y)} \left\{ \frac{2m-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} l \{ \alpha \sqrt{R - [\]} + \beta \sqrt{R + [\]} \}}{l^2 M^2 - R} \right\}$$

$$(7c) \quad \beta = -\frac{1}{2H(y)} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{2} l \{ \alpha \sqrt{R + [\]} - \beta \sqrt{R - [\]} \}}{l^2 M^2 + R}$$

$$R = \sqrt{[\]^2 - 4\alpha^2 \beta^2}, \quad [\] = \alpha^2 - \beta^2 - k^2 (1-n^2), \quad M^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

arctg в уравнении (7) берется в пределах $(-\pi, +\pi)$ в соответствии с сигнатурой дроби. Профиль нормальной волны в этом случае имеет вид $Z = \sin \mu z$, где z — координата по вертикали. Говоря о распространении не взаимодействующих нормальных волн в шельфе с произвольным изменением глубины, следует иметь в виду, что на характер изменения глубины, т. е. на функцию $H(y)$, налагается при этом условие достаточной медленности изменения с расстоянием, известное в физике как условие адиабатического изменения. Применительно к данной задаче это условие можно представить в наглядной форме: любой участок распространения нормальной волны, на котором укладывается несколько циклов луча Бриллюэна, можно аппроксимировать отрезком клина. В гидроакустике шельфа

это условие выполняется по крайней мере в большинстве случаев. Заметим, что система уравнений (7) полезна и для расчета комплексных собственных чисел неволноводных мод в случае моря постоянной глубины H . Волновые числа нормальной волны во всех этих случаях тоже комплексны:

$$k_m = k'_m + ik''_m,$$

$$(8a) \quad k'_m = \frac{1}{\sqrt{2r}} \sqrt{\sqrt{(k^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} + (k^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2)},$$

$$(8b) \quad k''_m = \frac{1}{\sqrt{2r}} \sqrt{\sqrt{(k^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} - (k^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2)}.$$

Мнимая величина k''_m , коэффициент затухания нормальной волны в клине, учитывает потери на излучение в полупространство, так что, грубо говоря, мнимая часть k_m представляет вертикальную рефракцию, действительная — горизонтальную. На фиг. 2 приведены графики зависимости от r величин β , k'_m , k''_m , k_m в одной из типичных гидроакустических ситуаций — песчаное дно, $l=2,7$, $n=0,83$, с небольшим наклоном Φ . Для определенности взято $\Phi=3^\circ$, звуковая частота $f=100$ Гц, порядок нормальной волны $m=2$. Коэффициент затухания k''_m быстро растет с уменьшением r , и на критическом расстоянии от берега $r=r_k = \frac{2m-1}{2k\Phi} \pi$ становится равным

действительной части k'_m . С точки зрения лучевых представлений в этом месте луч Бриллюэна падает на границу раздела сред $\varphi=\Phi$ под прямым углом $\psi=90^\circ$ и, отражаясь, начинает свой обратный ход в волноводную зону. Характерным для графика k_m является существование точки перегиба на границе волноводной зоны $r=r_m$, где $\frac{dk'_m}{dr} = 0$, как это видно из

фиг. 2. Общий вид выражения, описывающего структуру плоской нормальной волны в клине в ВКБ-приближении, такой:

$$(9) \quad C_m r^{-1/2} F_m(\mu\varphi) (k_m^2 - \cos^2 \gamma_0)^{-1/4} \exp \left[i \int (k'_m + ik''_m) ds \right].$$

Интеграл в экспоненте берется по криволинейному контуру в плоскости (r, z) вдоль траектории луча нормальной волны. Константа C_m — спектральный множитель спектра нормальных волн, возбуждаемых конкретным источником,

$$(10) \quad \cos \gamma_0 = \cos \vartheta_0 \sin \psi(r_0),$$

где r_0 — координата источника плоской волны, ϑ_0 — угол выхода волны из источника относительно береговой линии. Если r_0 велико, то $\vartheta_0 \approx \gamma_0$. При $\vartheta_0=90^\circ$ контур интегрирования в экспоненте обращается в прямую линию, и интеграл берется по r .

На фиг. 3 изображен график экспоненты $D(r) = \exp \left[- \int_{r_m}^r k''_m dr \right]$ для

нормальной волны второго порядка, распространяющейся перпендикулярно берегу, $\vartheta_0=90^\circ$ и последовательность профилей с учетом этого затухания, т. е. графики функции $F(\mu\varphi)D(r)$. По форме профилей видно, что гидроакустические приемники звукового давления в неволноводной зоне лучше всего располагать на дне, где звуковое давление принимает наибольшее значение. Во всех этих расчетах за основу брались нулевые приближения α и β :

$$(11a) \quad \alpha \approx \alpha_0 = \frac{2m-1}{2\Phi} \pi, \quad m=2,$$

$$(116) \quad \beta \approx \beta_0 = \frac{1}{\Phi} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{l}, \quad \zeta = \frac{r}{r_m}.$$

Эти приближения тем точнее, чем выше порядок нормальной волны.

Из графиков видно, что волна затухает практически полностью, не доходя до точки поворота, которая совпадает в частном случае $\vartheta_0 = 90^\circ$ с критической точкой $r = r_k$. Так что отражения «от берега» в волноводной зоне практически отсутствуют в этом случае. В общем случае $\vartheta_0 \neq 90^\circ$ коэффициент отражения «от берега»

$$V = \exp \left[- \int_{r_m, r_{\pi}}^r k_m'' ds \right].$$

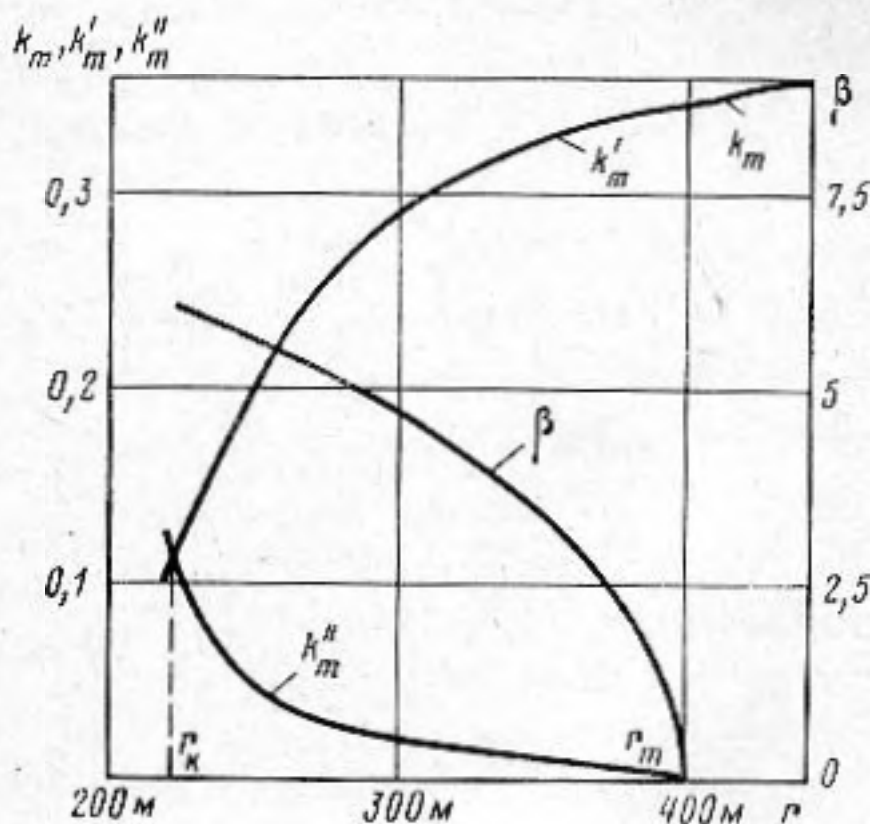
Интеграл берется вдоль всего отрезка траектории луча нормальной волны, расположенного в неволноводной зоне, от границы волноводной зоны $r = r_m$ до точки поворота $r = r_{\pi}$ и обратно от точки поворота до границы волноводной зоны:

$$r_{\pi} = \frac{2m-1}{2k\Phi \sin \gamma_0} \pi.$$

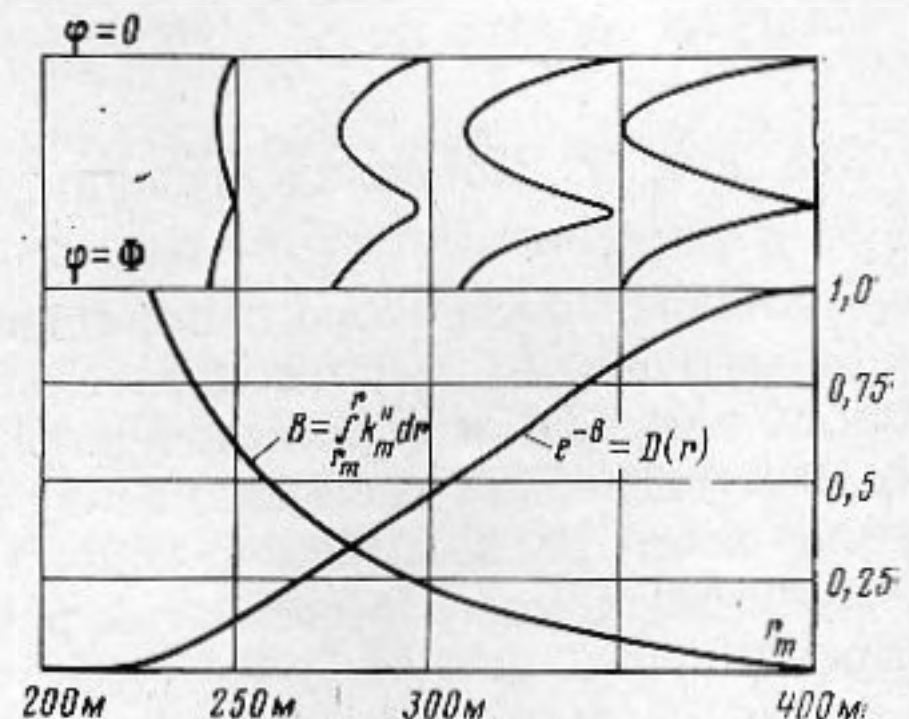
Для углов $\gamma_0 \leq \arccos n$ волна отражается «от берега», не заходя в неволноводную зону и, следовательно, $V=1$. Расчет преломленной в полупространство волны основывается на представлении нормальной волны в клине волной Бриллюэна, испытывающей преломление на границе $\varphi = \Phi$ в неволноводной зоне [4]. Угол падения ψ , определенный формулой (3), становится комплексным здесь из-за комплексности μ , однако в нулевом приближении он получается действительным, так как $\mu_0 = \alpha_0$. Здесь мы приведем лишь один из характерных результатов расчета — параметрическую систему уравнений каустики, образованной в полупространстве преломленной плоской волной:

$$(12) \quad \begin{aligned} \pm y \sqrt{x_0^2 \sin^2 \gamma_0 - r_m^2 (1-n^2)} + \sqrt{1-n^2} \sqrt{r_m^2 - x_0^2} (x-x_0) &= 0, \\ (1-n^2) (x-x_0) (r_m^2 - 2x_0^2 + xx_0) + y^2 x_0 \sin^2 \gamma_0 &= 0, \end{aligned}$$

x, y — декартовы координаты, изображенные на фиг. 1, параметр x_0 есть координата места преломления луча, касающегося каустики в точке (x, y) . Каустика плоской нормальной волны — цилиндрическая поверхность. В пересечении ее с плоскостью $z = \text{const}$ получается замкнутая кривая с тремя точками возврата: точки O_1, O_2, O_3 на фиг. 1, координаты которых x_b, y_b .



Фиг. 2



Фиг. 3

определяется формулами:

$$(12a) \quad x_b = \frac{3r_m^2 x_0^4 \sin^2 \gamma_0 - 2x_0^6 \sin^2 \gamma_0 - r_m^6 (1-n^2)}{r_m^2 x_0^3 (n^2 - \cos^2 \gamma_0)}$$

$$(12b) \quad y_b = \pm \sqrt{1-n^2} (r_m^2 - x_0^2) \cdot \sqrt{[r_m^2 (1-n^2) (r_m^2 - x_0^2) - 2x_0^4 \sin^2 \gamma_0]} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \frac{[(n^2 - \cos^2 \gamma_0) r_m^2 x_0^2 - r_m^2 (1-n^2) (r_m^2 + x_0^2) + 2x_0^4 \sin^2 \gamma_0]}{r_m^2 x_0^3 (n^2 - \cos^2 \gamma_0) \sin \gamma_0}$$

Значения параметров x_0 в этих формулах надо взять такими:

$$(12b) \quad x_{01} = r_m; \quad x_{02} = x_{03} = r_m \sqrt{(1-n^2) + \sqrt{(1-n^2)(1-n^2 + 3 \sin^2 \gamma_0)}} / \sqrt{3 \sin \gamma_0}$$

Хотя мы приводим здесь расчеты для клиновидного шельфа, но таким же методом рассчитываются и все другие случаи достаточно плавного изменения глубины моря $H(y)$ с расстоянием. Ход лучей Бриллюэна (угол ψ) определяется формулой (6б) на основе решения дисперсионного уравнения (6б), (7в), (7г). Изображенные на фиг. 4 каустики рассчитаны для упоминавшейся гидроакустической ситуации: $l=2,7$ г/см³, $n=0,84$, $\Phi=3^\circ$, $m=2$, $f=100$ Гц, $\gamma_0=90, 50, 40^\circ$. Нижняя ветвь каустики, обозначенная сплошной линией, образована преломленными в полупространство лучами прямой волны, верхняя, пунктирная ветвь — мнимыми продолжениями в верхнее полупространство преломленных лучей отраженной «от берега» волны (прошедшей точку поворота). Верхняя ветвь каустики мнимая. Практически интересен участок нижней ветви O_1, O_2 . Он обозначает границу тени в преломленной волне, поскольку в этот сектор полупространства за пределы каустики приходят лишь очень слабые лучи «отраженной от берега» волны. Кроме того, общая волновая картина выглядит так, что как будто нижний максимум профиля нормальной волны волноводной зоны сходит в полупространство на границе $r=r_m$ и располагается вдоль участка каустики O_1, O_2 , а здесь идет вдоль фокального луча x_{02} . Этот луч проходит через точку возврата каустики O_2 как через фокус (см. фиг. 1) и обозначает ось характеристики направленности преломленной волны в полупространстве. С осью y он образует угол

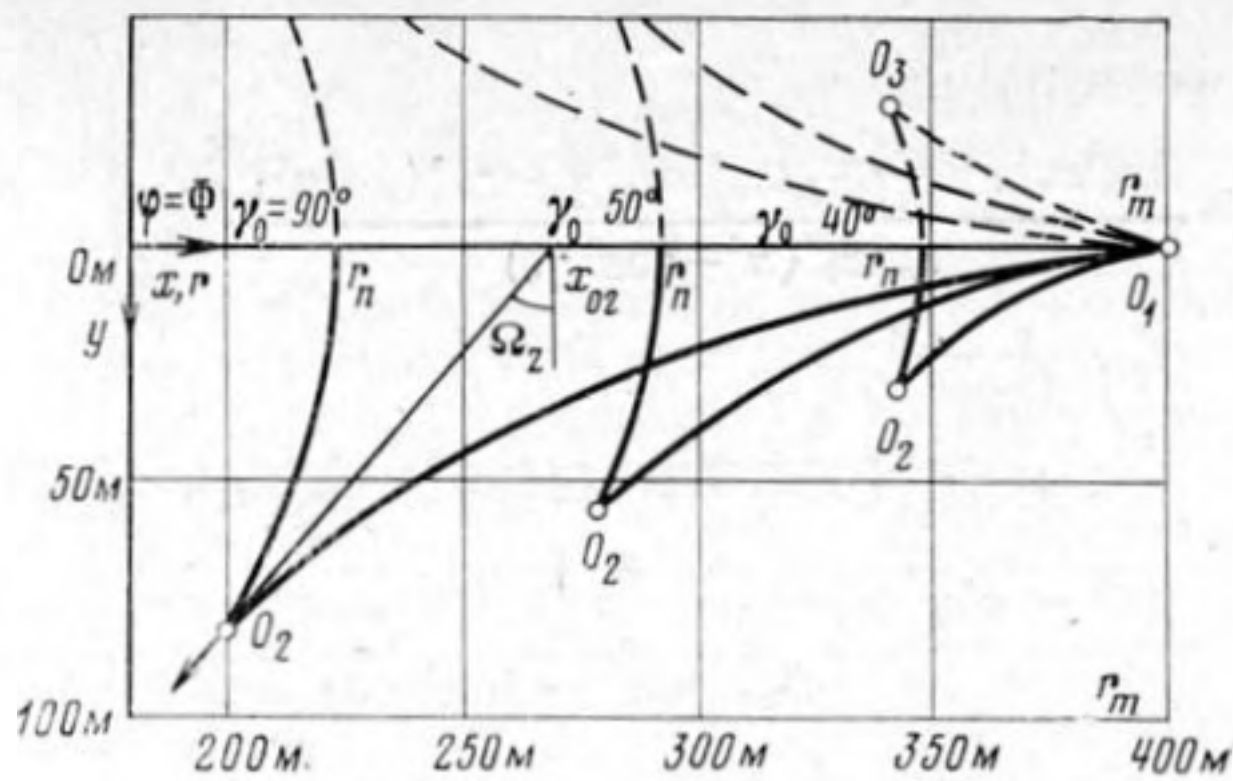
$$(13a) \quad \Omega = \arccos \sqrt{(r_m^2 - x_{02}^2) (1-n^2)} / x_{02} n$$

или в проекции на плоскость $z = \text{const}$ угол

$$(13b) \quad \Omega_z = \arccos \sqrt{(r_m^2 - x_{02}^2) (1-n^2)} / x_{02} \sqrt{n^2 - \cos^2 \gamma_0}$$

Из всего этого напрашивается определение траектории вертикальной рефракции нормальной волны в плоскости $z = \text{const}$ как линии расположения нижнего максимума ее профиля в волноводной зоне, продолженной в полупространство по участку каустики O_1, O_2 и далее по проекции фокального луча x_{02} , как изображено на фиг. 1. Эта траектория дает наглядное представление об общем характере явления и хорошо прослеживается на наших экспериментальных записях.

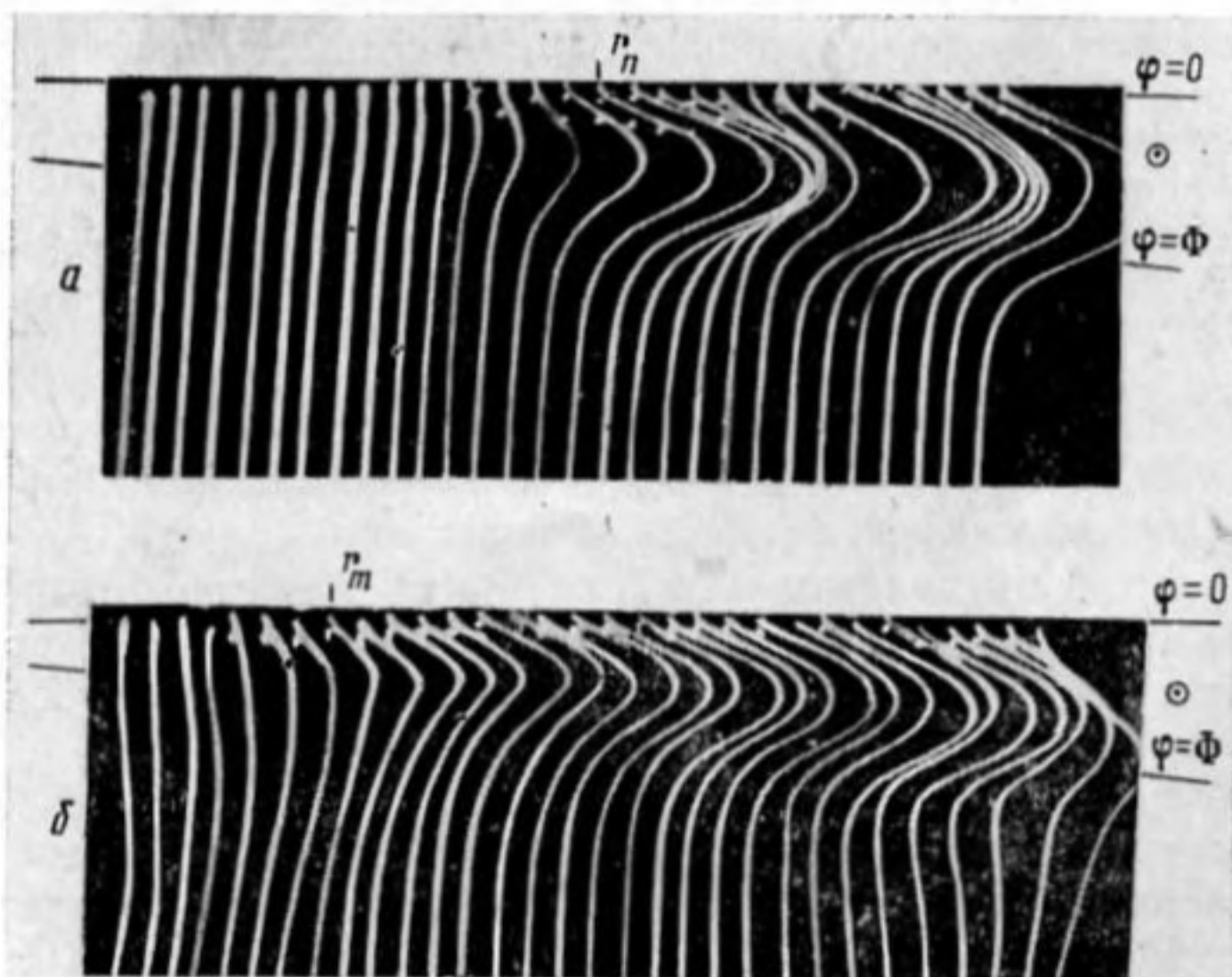
Эксперимент проводился на двух разного рода моделях, описанных ранее [3], — натуральной и аналоговой. В натуральной модели клиновидная область заполнялась четыреххлористым углеродом, «полупространство» — водой, так что $n=0,84$, $l=1,7$ г/см³. В аналоговой модели использовалась лишь вода, роль границы раздела сред $\Phi = \Phi$ играла граница между двумя плоскими волноводами различной толщины h_1, h_2 , состыкованными в одной плоскости. Клиновидная область бралась в волноводе большей



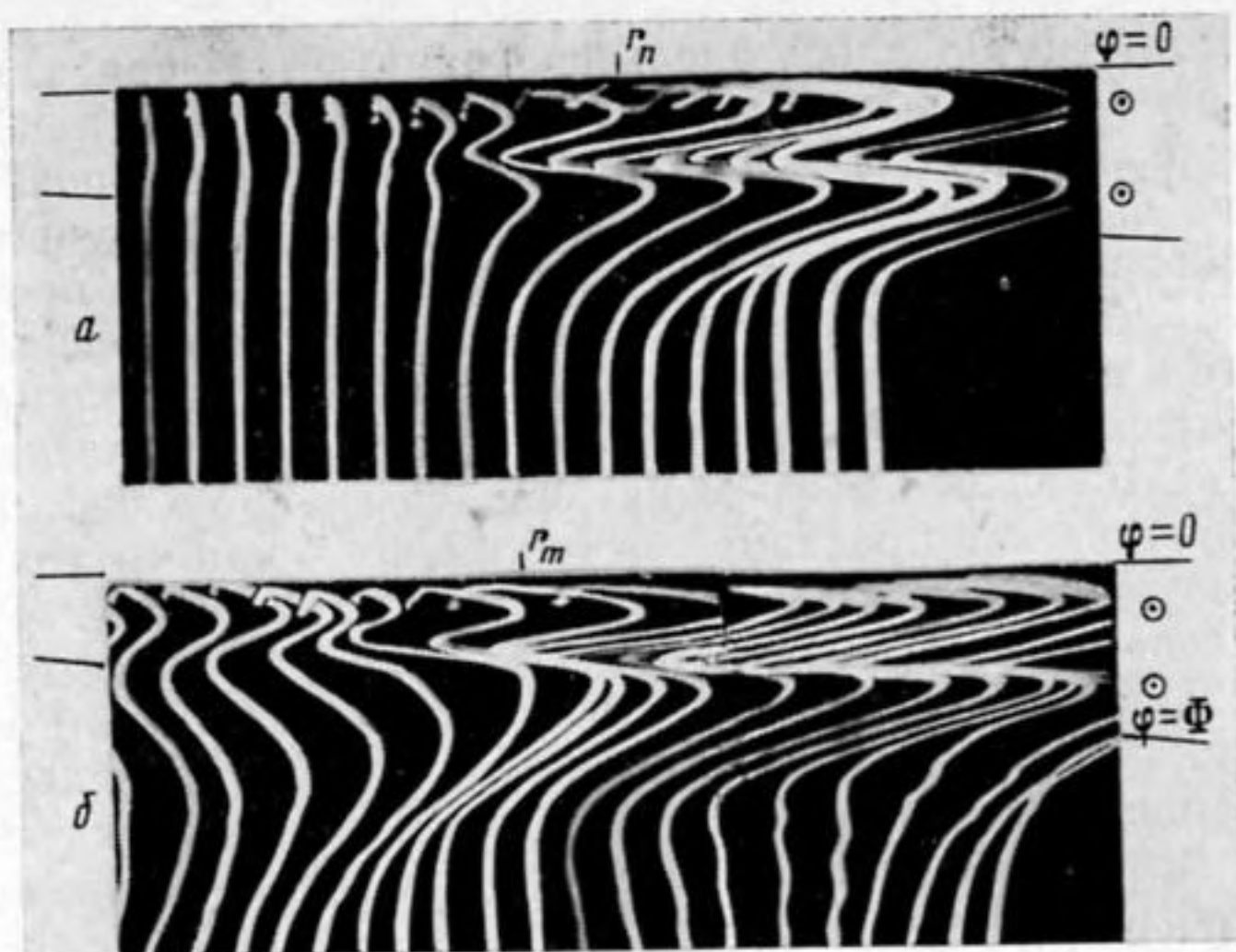
Фиг. 4

толщины h_1 , чтобы приведенный показатель преломления n был меньше единицы. Из расчетов следует $n = h_2/h_1$. Дисперсионное уравнение для аналоговой модели получается из уравнения (6), если положить в нем $n = h_2/h_1$, $l = 1$. Угол падения волны Бриллюэна ψ , граница волноводной зоны $r = r_m$ и угол γ_0 рассчитываются по формулам $\cos \psi = \mu h_2 / \pi r$, $r_m = (2m - 1) h_2 / 2\Phi \sqrt{1 - n^2}$, $\gamma_0 = \arccos \pi / kh_1$, а каустика — по формулам (12), где надо взять $n = h_2/h_1$.

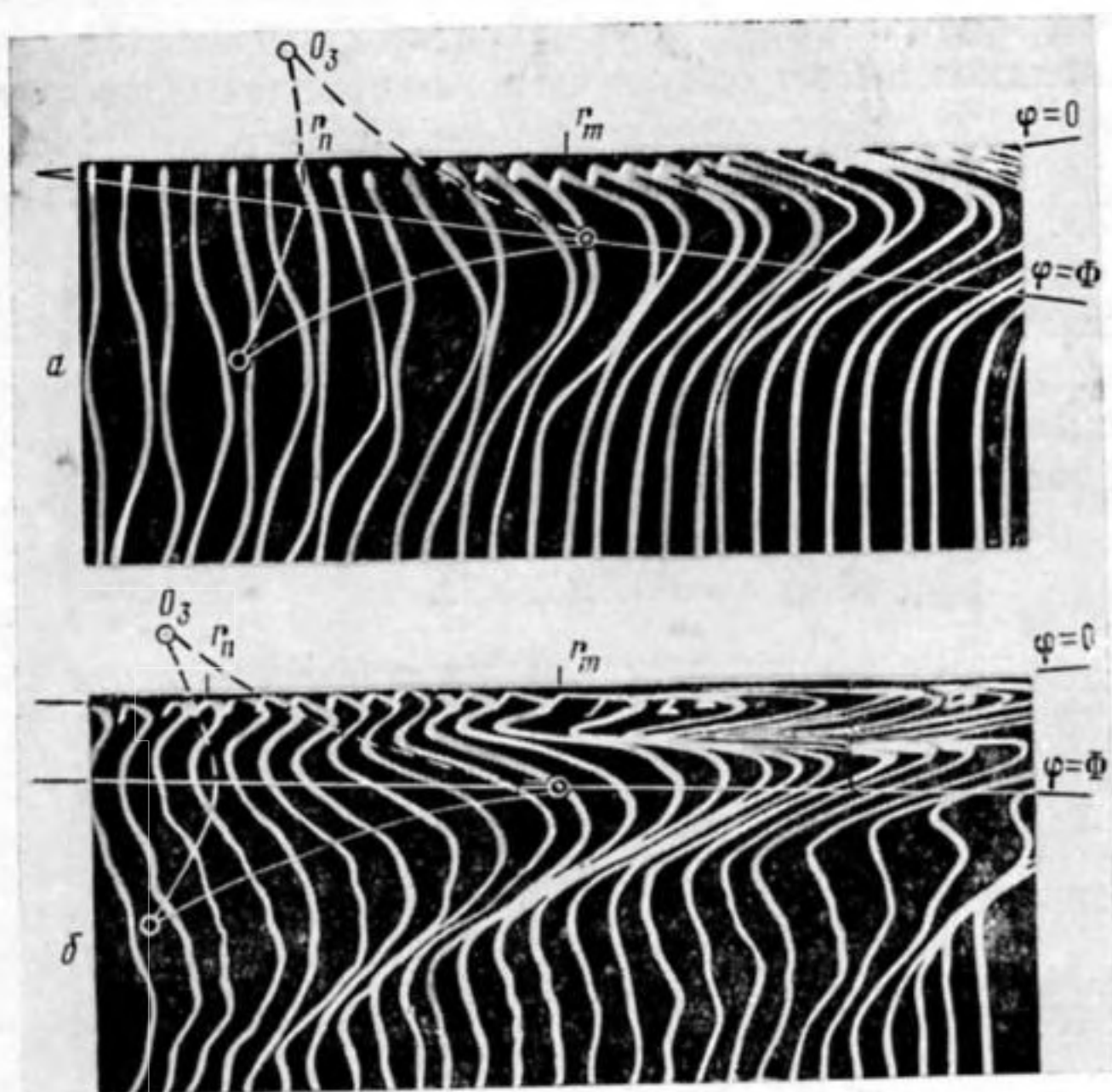
На фиг. 5–8 приведены экспериментальные картины. Это растровые осциллограммы, снятые в плоскости $z = \text{const}$ для нормальных волн различных порядков — первого, второго. Преимущественное возбуждение одной нормальной волны порядка m достигалось подачей синусоидального сигнала на цепочку излучателей со сдвигом фазы на π между соседними излучателями. Излучатели располагались в волноводной зоне по профилю нормальной волны в его максимумах (места расположения излучателей обозначены кружками). На фиг. 5, а, б, в иллюстрируются случаи полного отражения «от берега» волны путем горизонтальной рефракции, когда $\gamma_0 < \arccos n$, и волна не выходит за пределы волноводной зоны. Здесь вертикальная рефракция не играет заметной роли, и в полупространстве нет преломленной волны. Сканирование поля при записи этих растров



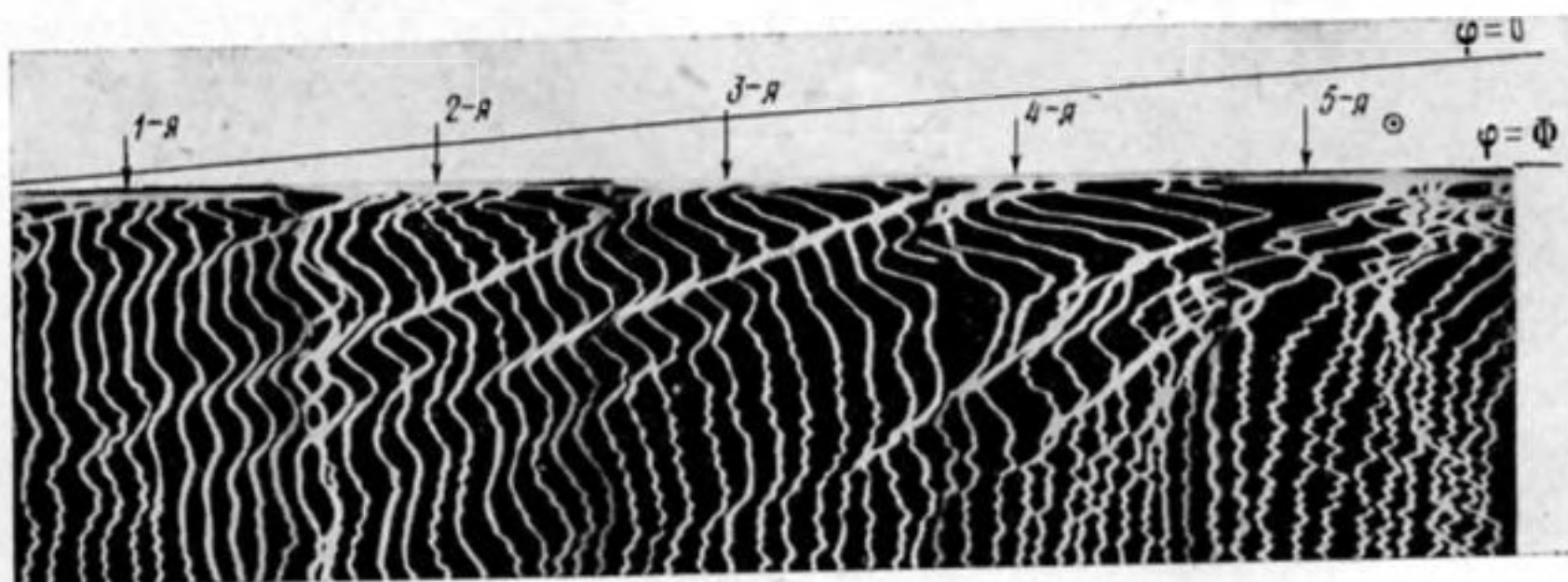
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

в пределах клина проводилось вдоль координаты φ (вернее, вдоль хорды угла φ , которая при малых φ почти совпадает с дугой), так что каждая отдельная строка растра есть график профиля нормальной волны. Поэтому все, что было сказано в теоретической части об изменении формы профиля в зависимости от r , здесь получает наглядное подтверждение.

На фиг. 5, б, 6, б, 7 представлен случай $\gamma_0 > \arccos n$, когда нормальная волна заходит в неволноводную зону и преломляется в полупространство. Общий ход преломленной волны согласуется с теоретической кривой — траекторией вертикальной рефракции, как это видно из фиг. 7.

В гидроакустической практике обычно имеют дело с ситуациями, когда источник возбуждает сразу несколько нормальных волн. Этот случай представлен осциллограммой фиг. 8 (натуральная модель; на ней клиновидная область осталась за кадром, потому что тонкая перегородка между водой и четыреххлористым углеродом на линии $\varphi = \Phi$ не позволяла распространить сканирование и на эту область). Стрелками указаны границы волноводных зон r_m , $m=1, 2, 3, 4, 5$, места «выхода» в полупространство нормальных волн (мод) различных порядков. Клиновидная область, следовательно, работает как модовый анализатор. Траектории вертикальной рефракции у нормальных волн различных порядков, но определяемых одним и тем же направлением распространения — углом γ_0 , подобны друг другу и отличаются друг от друга лишь своими масштабами. Поэтому преломленные волны всех порядков имеют одну и ту же направленность в полупространстве, и это видно из приведенных здесь осциллограмм. Общая для всех нормальных волн направленность в заданной ситуации определяется по формулам (13).

Из всего сказанного здесь легко видеть, какое место в гидроакустике шельфа занимает вертикальная рефракция нормальных волн. Полученные результаты могут быть использованы в различных гидроакустических исследованиях, а также в исследованиях геофизических, где применяется акустический зондаж слоистых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. К. О новом методе решения задачи о звуковом поле в жидком клине. — Акуст. ж., 1959, т. 5, № 2, с. 170–175.
2. Harrison C. H. Acoustic shadow zones in the horizontal plane. — JASA, 1979, v. 65, № 1, p. 56–64.
3. Кузнецов В. К. О явлении выхода нормальных волн, распространяющихся в клине, лежащем на полупространстве, из клина в полупространство. — Акуст. ж., 1959, т. 5, № 2, с. 170–175.
4. Кузнецов В. К. Рефракция нормальных волн в клине. — Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1972, № 3, с. 293–300.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
2.I.1980