

УДК 534-231

## ИМПЕДАНЦЫ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И СДВИГА

*Шендеров Е. Л.*

Получены выражения для расчета импеданцев колебаний умеренно тонкой упругой сферической оболочки с учетом инерции вращения и сдвига поперечных сечений.

Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными без учета указанных эффектов. Показано, что влияние инерции вращения и сдвига увеличивается при увеличении номера моды колебаний.

При решении задач, связанных с излучением звука упругими оболочками и дифракцией на них, необходимо иметь выражения для механических импеданцев оболочки, соответствующих отдельным модам осесимметричных колебаний<sup>1</sup>. Для сферической оболочки импеданцы определены в работе [1], причем при их выводе были использованы моментные уравнения равновесия [2].

Выражения для импеданцев, полученные на основе этих уравнений, являются достаточно точными в случае тонких оболочек при  $k_n h \ll 1$  ( $k_n$  — волновое число изгибных волн в оболочке,  $h$  — ее толщина) и при не очень больших номерах мод колебаний, когда длина пространственного периода в данной моде больше длины изгибной волны. Однако в некоторых приложениях (например, при вычислении полюсов комплексных функций, возникающих при применении преобразования Ватсона к рядам, определяющим излучение звука оболочкой) приходится вычислять импеданцы колебаний на частотах, лежащих вблизи критической частоты для пластины равной толщины.

Известно, что значение критической частоты для стальной пластины в воде, вычисленное по простейшей теории изгибных волн без учета инерции вращения и сдвига, отличается от истинного значения на 22%. В указанной области частот необходимо использовать импеданцы, вычисленные с учетом инерции вращения и сдвига. Разумеется, всегда остается возможность рассматривать оболочку как упругий сферический слой произвольной волновой толщины и найти на основе уравнений теории упругости точные выражения импеданцев в виде определителей, состоящих из сферических функций Бесселя. Однако вычисление таких определителей при комплексных значениях индекса указанных функций и небольшой волновой толщине оболочки возможно лишь с помощью достаточно больших ЭВМ.

Уравнения движения сферической оболочки в перемещениях с учетом инерции вращения и сдвига приведены в работах [3, 4]. Мы воспользуемся уравнениями движения в форме, записанной в работе [5], где учтены дополнительные члены.

<sup>1</sup> Заметим, что для решения указанных задач даже при неосесимметричном возбуждении достаточно иметь выражения для импеданцев осесимметричных колебаний.

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta w + a_1 w + \Delta Y + a_2 \Delta \Psi &= -\frac{qR^2}{\mu h \kappa^2}, \\
 \Delta \Psi + a_3 \Psi + a_4 w + a_5 Y &= -\frac{1-\sigma^2}{Eh} P_1 R^2, \\
 \Delta Y + a_6 Y + a_7 w + a_8 \Psi &= 0, \\
 \Delta \Omega + a_9 \Omega + a_{10} \Gamma &= -\frac{P_2 R^2}{\mu h}, \\
 \Delta \Gamma + a_{11} \Gamma + a_{12} \Omega &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь и далее введены следующие обозначения:  $q$ ,  $p_\theta$ ,  $p_\varphi$  — составляющие внешней нагрузки, т. е. силы, действующей на единицу площади в  $r$ -,  $\theta$ - и  $\varphi$ -направлениях соответственно,  $\theta$ ,  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы сферической системы координат соответственно,  $\mu$  — модуль сдвига,  $E$  — модуль Юнга,  $\rho_m$  — плотность,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $R$  и  $h$  — радиус и толщина оболочки соответственно,  $\kappa^2$  — коэффициент сдвига, обычно принимаемый равным  $\pi^2/12$  или  $5/6$  [6];  $w$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\varphi$  — составляющие смещения в  $r$ -,  $\theta$ -,  $\varphi$ -направлениях соответственно,  $\beta_\theta$  и  $\beta_\varphi$  — углы поворота поперечных сечений в соответствующих направлениях;  $\Psi$ ,  $\Omega$ ,  $Y$ ,  $\Gamma$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  — потенциалы смещений и нагрузки, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}, & u_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \\
 \beta_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right), & \beta_\varphi &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right), \\
 p_\theta &= \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi}, & p_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_2}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты системы (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{1}{\kappa^2} \left( 4 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \frac{\rho_m K_1 R^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), & a_2 &= -\left( 1 + \frac{2}{\kappa^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right), \\
 a_3 &= (1-\sigma) \left( 1 - \frac{\kappa^2}{2} \right) - \frac{R^2 \rho_m K_1 (1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, & a_4 &= 1 + \sigma + (1-\sigma) \frac{\kappa^2}{2}, \\
 a_5 &= \frac{\kappa^2}{2} (1-\sigma) \left( 1 - \frac{\rho_m h^2}{6\mu \kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \\
 a_6 &= (1-\sigma) \left( 1 - \frac{6\kappa^2 R^2}{h^2} - \frac{\rho_m R^2 K_2 (1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \\
 a_7 &= -6(1-\sigma) \frac{\kappa^2 R^2}{h^2}, & a_8 &= (1-\sigma) \left( \frac{6\kappa^2 R^2}{h^2} - \frac{\rho_m R^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \\
 a_9 &= 2 - \kappa^2 - \frac{\rho_m R^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, & a_{10} &= \kappa^2 \left( 1 - \frac{\rho_m h^2}{6\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \\
 a_{11} &= 2 - \frac{12\kappa^2 R^2}{h^2} - \frac{\rho_m R^2 K_2 (1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
 a_{12} &= \frac{12\kappa^2 R^2}{h^2} - \frac{2\rho_m (1-\sigma^2) R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

$$K_1 = 1 + \frac{h^2}{12R^2}, \quad K_2 = 1 + \frac{3h^2}{20R^2}, \quad h_R = \frac{h^2}{3\kappa^2 R^2},$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  — «угловая» часть оператора Лапласа.

Первые три дифференциальных уравнения (1) образуют систему, независимую от других. Исключая из этих уравнений  $Y$  и  $\Psi$ , после громоздких преобразований получим дифференциальное уравнение шестого порядка, связывающее радиальное смещение и нормальную нагрузку  $q$ :

$$(2) \quad \Delta^3 w + r_1 \Delta^2 w + r_2 \Delta w + r_3 w = - \frac{R^2}{\mu h \kappa^2} (\Delta^2 q + r_4 \Delta q + r_5 q) + \\ + \frac{R^2 (1 - \sigma^2)}{Eh} (a_2 \Delta^2 P_1 - r_6 \Delta P_1).$$

Коэффициенты определяются следующим образом:

$$r_1 = a_1 + a_3 + a_6 - a_7 - a_2 a_4,$$

$$r_2 = a_1 a_6 - a_2 a_4 a_6 + a_1 a_3 - a_7 a_3 + a_3 a_6 + a_4 a_8 + a_2 a_5 a_7 - a_5 a_8,$$

$$r_3 = a_1 (a_3 a_6 - a_5 a_8),$$

$$r_4 = a_3 + a_6,$$

$$r_5 = a_3 a_6 - a_5 a_8,$$

$$r_6 = a_8 - a_2 a_6,$$

$$\Delta P_1 = \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta p_\theta) + \frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Заметим, что коэффициенты  $a_1 - a_{12}$  являются, вообще говоря, операторами, так как они содержат производные по времени. Так, например, величины  $r_2$  и  $r_3$  — операторами шестого порядка.

Запишем теперь уравнение колебаний в установившемся режиме. Для монохроматических колебаний коэффициенты  $a_i$ , входящие в уравнение (2), приобретают вид

$$a_1 = - \frac{2}{\kappa^2} \left( 2 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} - \frac{K_1 x_i^2}{2} \right), \quad a_2 = -1 - \frac{2}{\kappa^2} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma},$$

$$a_3 = (1 - \sigma) \left( 1 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{K_1 x_i^2}{2} \right), \quad a_4 = 1 + \sigma + (1 - \sigma) \frac{\kappa^2}{2},$$

$$a_5 = \frac{\kappa^2}{2} (1 - \sigma) \left( 1 + \frac{h_R}{2} x_i^2 \right), \quad a_6 = (1 - \sigma) \left( 1 - \frac{2}{h_R} + \frac{K_2 x_i^2}{2} \right),$$

$$a_7 = - (1 - \sigma) \frac{2}{h_R}, \quad a_8 = (1 - \sigma) \left( \frac{2}{h_R} + x_i^2 \right),$$

где  $x_i^2 = \rho_\kappa \omega^2 R^2 / \mu$  — квадрат волнового числа для волн сдвига.

Пусть на оболочку действует осесимметричная радиальная нагрузка  $q$ , которая может быть представлена в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$(3) \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n(\cos \theta).$$

Представим радиальное смещение  $w$  аналогичным рядом

$$(4) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(\cos \theta).$$

Определим модовые удельные механические импеданцы оболочки  $Z_n$  в виде отношения амплитуд нагрузки и колебательной скорости для соответствующих мод колебаний:

$$(5) \quad Z_n = \frac{q_n}{-i\omega w_n}.$$

Подставив разложения (3)–(5) в уравнение (2) и учитывая, что

$$(6) \quad \Delta P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta),$$

получим следующее выражение для удельных механических модовых импеданцев оболочки, учитывающее инерцию вращения и сдвиг поперечных сечений:

$$(7) \quad Z_n = -i\omega M \varphi_n,$$

где  $M = \rho_m h$ ,  $\xi_n$  – безразмерная величина, определяемая выражением

$$(8) \quad \xi_n = -\frac{\kappa^2 n^3(n+1)^3 - r_1 n^2(n+1)^2 + r_2 n(n+1) - r_3}{x_{np}^2 n^2(n+1)^2 - r_4 n(n+1) + r_5}.$$

Формулу для определения импеданца без учета инерции вращения и сдвига, приведенную в книге [1], можно записать в виде

$$(9) \quad \xi_n = \frac{h_{1R} n^3(n+1)^3 + n^2(n+1)^2 g_1 + n(n+1) g_2 + g_3}{x_{np}^2 (-n(n+1) + g_4)},$$

где

$$g_1 = -(x_{np}^2 + 3 + \sigma), \quad g_2 = (1 - \sigma^2 - x_{np}^2)/h_{1R},$$

$$g_3 = (x_{np}^2 + 1 - \sigma)(x_{np}^2 - 2 - 2\sigma)/h_{1R}, \quad g_4 = x_{np}^2 + 1 - \sigma,$$

$$h_{1R} = \frac{h^2}{12a^2}, \quad x_{np}^2 = (k_{np}a)^2 = \frac{1 - \sigma^2}{E} R^2 \rho_m \omega^2.$$

На фигуре приведены результаты расчетов по формулам (8) и (9). При  $n=0, 1, 2, 3, 10$  штриховая и сплошная кривые, соответствующие расчетам по формулам (8) и (9), сливаются. На горизонтальной оси нанесены две шкалы, одна из которых соответствует значениям  $k_{np}R$ , а вторая  $k_n'R$ , причем волновое число для волн изгиба в пластине  $k_n'$  определено из уравнения движения пластины в соответствии с [6, 7] с учетом инерции вращения и сдвига:

$$(10) \quad k_n' = \left( \sqrt{k_n^4 + \left( \frac{k_R^2 - k_{np}^2}{2} \right)^2} + \frac{k_R^2 + k_{np}^2}{2} \right)^{1/2},$$

где

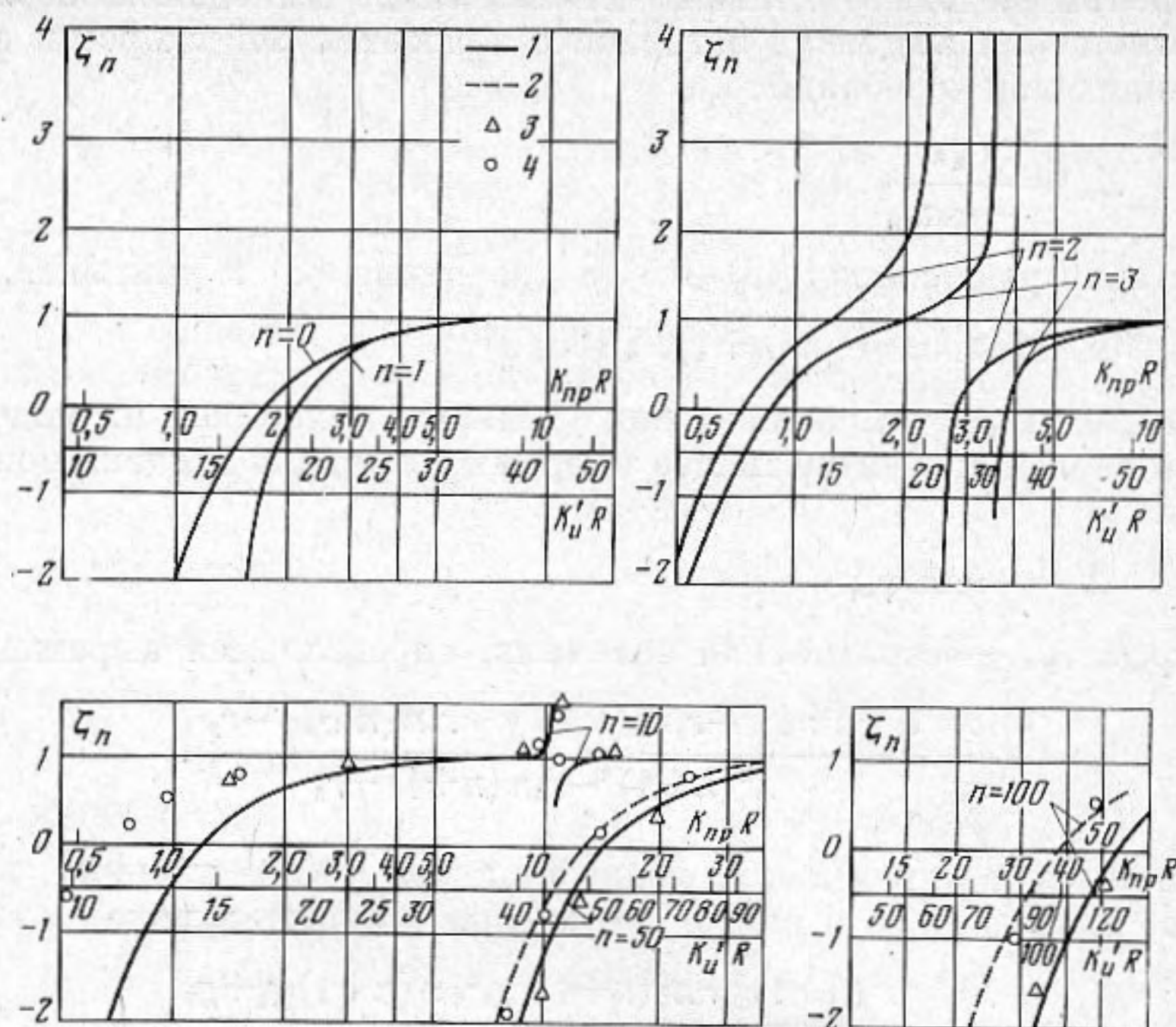
$$k_R = \left( \frac{\omega^2 \rho_m 2(1 + \sigma)}{E \kappa^2} \right)^{1/2}, \quad k_n = \left( \frac{\omega^2 12(1 - \sigma^2) \rho_m}{E h^2} \right)^{1/4},$$

$$k_{np} = \left( \frac{\omega^2 \rho_m (1 - \sigma^2)}{E} \right)^{1/2}$$

– волновые числа волн Рэлея, изгибных волн без учета инерции вращения и сдвига и продольных волн в тонкой пластине соответственно.

Значения волновых размеров, при которых величины  $\xi_n$  обращаются в нуль, являются резонансными. Анализ соотношений (8) показывает, что при  $n \gg 1$  имеется два типа резонансов, один из которых связан в основном с изгибными колебаниями оболочек, а другой – с продольными. Эти резонансы возникают при выполнении условий

$$(11) \quad k_n'R \approx n, \quad k_{np}R \approx n.$$



Импеданцы для различных форм колебаний упругой сферической оболочки из стали с параметрами:  $h/R=50$ ,  $E=2 \cdot 10^{12}$  г·см/с<sup>2</sup>,  $\rho=7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma=0,3$ . 1 — расчет по формуле (9), 2 — по формуле (8), 3 — по формуле (17), причем  $k_n$  определено без учета инерции вращения и сдвига, 4 — то же, но  $k_n$  определено с учетом инерции вращения и сдвига по формуле (10)

Заметим, что в оболочке двойной кривизны, строго говоря, невозможно разделить изгибные и продольные колебания (как, например, в пластине или цилиндрической оболочке), так как изгиб оболочки неизбежно приводит к растяжению средней линии и возникновению продольных смещений. Однако при больших номерах мод колебаний взаимодействие между изгибными и продольными движениями уменьшается, и приближенно можно говорить об изгибных и продольных колебаниях по отдельности.

Из фигуры следует, что кривые, вычисленные по формуле (8) для  $n=50, 100$ , пересекают ось абсцисс в точках, близко совпадающих со значениями, даваемыми (11), в то время как кривые, вычисленные по формуле (9), дают завышенные значения резонансных частот. При малых значениях  $n$  кривые, рассчитанные по различным формулам, практически совпадают.

Интересно также сравнить значения импеданцев, рассчитанные на основании теории оболочек и вычисленные простейшим образом исходя из уравнений плоских пластин.

Импеданцы изгибных и продольных колебаний пластин по отношению к силе, распределенной по поверхности по закону  $\exp(ikx \sin \theta)$  (т. е. по отношению к нагрузке в виде волны, бегущей вдоль пластины), определены в работе [8].

Полный входной импеданц на поверхности пластины  $Z_{пл}$  можно легко определить, даже не решая уравнений движения. Для этого следует воспользоваться известным выражением для коэффициента отражения звука  $A$  от пластины, лежащей на границе раздела среды и вакуума:

$$(12) \quad A = \frac{Z_{пл} - Z_0^{(1)}}{Z_{пл} + Z_0^{(1)}}$$

$Z_0^{(1)} = \rho c / \cos \theta$  — волновой импеданц среды.

С другой стороны, для коэффициента отражения справедливо выражение

$$(13) \quad A = \frac{ZZ_{\text{пр}} - Z_0^{(1)}(Z + Z_{\text{пр}})}{ZZ_{\text{пр}} + Z_0^{(1)}(Z + Z_{\text{пр}})},$$

которое получается из формул (32.21) работы [1], если положить импеданс второй среды равным нулю. В выражении (13)  $Z$  и  $Z_{\text{пр}}$  — импедансы изгибных и продольных колебаний пластины соответственно.

Сравнивая выражения (12) и (13), получим

$$(14) \quad Z_{\text{пл}} = \frac{ZZ_{\text{пр}}}{Z + Z_{\text{пр}}},$$

т. е. полная проводимость пластины складывается из проводимостей на продольных и изгибных колебаниях.

Как известно, импеданс пластины

$$Z = \frac{q_0}{-i\omega w_0} = -i\omega M \left( 1 - \frac{k^4}{k_n^4} \sin^4 \theta \right)$$

по отношению к нагрузке  $q = q_0 \exp(ikx \sin \theta)$  определяется из уравнения движения пластины  $\Delta^2 - k_n^4 w = q/g$ , где  $g$  — цилиндрическая жесткость, путем подстановки  $w = w_0 \exp(ikx \sin \theta)$ .

Теперь будем считать, что пластина изогнута по сферической поверхности, но локальные механические свойства ее совпадают со свойствами плоской пластины.

Введем угол  $\theta = x/R$ , где  $x$  — координата вдоль поверхности, и определим импеданс по отношению к нагрузке  $q = q_n P_n(\cos \theta)$ .

Подстановка в уравнение движения пластины смещения в виде  $w = w_n P_n(\cos \theta)$  с учетом соотношения (6) приводит к результату

$$Z = -i\omega M \left( 1 - \frac{n^2(n+1)^2}{(k_n R)^4} \right).$$

Таким образом, импедансы по отношению к нагрузке  $P_n(\cos \theta)$  в указанном приближении можно получить из выражений для импеданца по отношению к нагрузке  $\exp(ikx \sin \theta)$  формальной заменой

$$\sin \theta \rightarrow \frac{\sqrt{n(n+1)}}{kR}.$$

Это связано с тем, что импеданс определяется величиной, характеризующей быстроту изменения нагрузки вдоль конструкции. Параметром, характеризующим степень изменения нагрузки, является длина следа волны на поверхности. Для плоской волны эта величина зависит от  $k \sin \theta$ , а для собственной функции в виде полинома Лежандра — от  $\sqrt{n(n+1)}/R$ . Поэтому при указанной формальной замене сохраняются и выражения для импеданцев.

Аналогичный результат получается и для импеданцев на продольных колебаниях. С учетом этой замены из формул (32.5) и (32.9) работы [1] найдем

$$(15) \quad Z = -i\omega M \zeta_n, \quad \zeta_n = 1 - \frac{n^2(n+1)^2}{(k_n R)^4}$$

$$(16) \quad Z_{\text{пр}} = \frac{i4E}{\omega h(1-\sigma^2)} \zeta_{\text{пр}}, \quad \zeta_{\text{пр}} = \frac{1 - \frac{n(n+1)}{(k_{\text{пр}} R)^2}}{1 - \sigma - \frac{n(n+1)}{(k_{\text{пр}} R)^2}}$$

В выражении (15) в качестве  $k_n$  можно использовать также значение  $k_n'$ , определенное по формуле (10). Подставляя (15) и (16) в (14), получим

$$Z_{пл} = -i\omega M \zeta_{пл},$$

$$(17) \quad \zeta_{пл} = \frac{\zeta}{1 - \frac{(k_{пр}h)^2}{4} \frac{\zeta}{\zeta_{пр}}}.$$

Значения, рассчитанные по формуле (17), показаны на фигуре. Волновое число для волн изгиба, входящее в выражение (15), при этом вычислялось как без учета инерции вращения и сдвига (треугольники на фигуре), так и с учетом этих эффектов по формуле (10) (кружки на фигуре). При больших номерах мод колебаний ( $n=50, 100$ ) значения, вычисленные по формуле (15), хорошо совпадают с результатами, полученными по теории оболочек, причем, как и следовало ожидать, кружки и треугольники хорошо ложатся на кривые, рассчитанные по формулам (8) и (9) соответственно. При малых номерах мод колебаний результаты расчета по формуле (17) не согласуются с результатами, полученными по теории оболочек, так как при малых номерах становится несправедливым разделение колебаний на изгибные и продольные.

Таким образом, выражение (8) является более точным по сравнению с выражением (9) примерно в такой же степени, в какой уравнение Тимошенко — Миндлина уточняет обычное уравнение изгибных колебаний. Можно полагать, что выражение (8) справедливо по крайней мере в диапазоне, где возбуждаются лишь первая симметрия и антисимметричная моды волн Лэмба, т. е. при  $k_l h < 2$  ( $k_l$  — волновое число для продольных волн). Однако окончательно определить границы применимости полученных выражений можно будет в дальнейшем путем сравнения с результатами, полученными на основе представления оболочки как упругого сферического слоя произвольной волновой толщины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1953.
3. Wilkinson T., Kalnins A. On Nonsymmetrical Dynamic Problems of Elastic spherical Shells. — J. Appl. Mech., 1965, v. 32, № 3, p. 51–58.
4. Prasad C. On Vibration of spherical shells. J. Acoust. Soc. America, 1964, v. 36, № 3, p. 489–494.
5. Yahanshahi A. Equation of Motion of Spherical shells. J. Acoust. Soc. America, 1965, v. 38, № 5, p. 883–885.
6. Mindlin R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. J. Appl. Mech., 1951, v. 18, № 4, p. 31–45.
7. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
8. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955.

Поступила в редакцию  
4.VII.1979  
После исправления  
10.XII.1979