АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 1

УДК 534.2:532

ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ, СОЗДАВАЕМОЕ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СФЕРОЙ

Петухов Ю. В.

В приближении Кирквуда – Бете рассчитаны поле давления и скорости от сферы, расширяющейся в воздухе с постоянной скоростью из нулевого начального радиуса. Полученные результаты сопоставлены с численным интегрированием точных автомодельных уравнений и с расчетами, выполненными с учетом квадратичной нелинейности в уравнениях движения.

При получении приближенных аналитических зависимостей для параметров волн, возбуждаемых взрывными источниками, в основном используются два метода: метод, в котором учитываются лишь квадратичные нелинейные члены в точных уравнениях [1]; метод Кирквуда — Бете (КБ) [2, 3], который в последнее время нашел более широкое применение [4], особенно при расчетах поля давления, создаваемого в результате электрического разряда в жидкости [5]. Однако, если область применения первого из них (число Маха $M \ll 1$) хорошо известна [1], то вопрос об ограничениях приближения Кирквуда — Бете менее изучен. В отличие от первого метод (КБ) дает хорошее совпадение с экспериментальными данными и при достаточно сильных взрывах [4]. Как правило, приближение (КБ) использовалось совместно с другими допущениями, касающихся процесса генерации ударной волны, например относящихся к расширению продуктов детонации (так называемое пиковое приближение [2, 4]); в такой постановке получены законы изменения амплитуды и постоянной времени ударной волны (длительности определяемой по уровню $1/e$), которые хорошо согласуются с экспериментальными данными [2, 4]. Следовательно, уже в определение начальных условий вносились погрешности, которые трудно отличить от погрешностей именно приближения (КБ). Следует также отметить, что вопрос о неточностях в определении профиля волны давления в приближении (КБ), по-видимому, не обсуждался, хотя при расчетах трансформации спектра ударной волны нелинейные искажения формы ее профиля могут существенно повлиять на поведение низких частот [6], которые представляют значительный интерес для акустиков.

Ниже рассмотрена классическая задача о расширении сферы с постоянной скоростью в воздухе из нулевого начального радиуса (автомодельная задача [7]). Полученные в приближении (КБ) результаты для профилей поля давления и скорости сопоставлены с численным интегрированием точных автомодельных уравнений [7] и с расчетами [1]. Показано, что использование метода (КБ) дает удовлетворительное согласие для поля скорости и существенное отличие для поля давлений, особенно вблизи границы сферы.

Общее решение в приближении (КБ) для сферически-симметричной волны давления p и скорости u, возникающих при расширении сферы по закону $R(t_R)$ со скоростью U, имеет следующий вид [5]:

$$t=t_R(G)+\frac{G}{c_0^2}\beta\left[\frac{1+2\beta u}{\beta u(1+\beta u)}-\frac{1+2\beta U}{\beta U(1+\beta U)}-2\ln\frac{(1+\beta u)\beta U}{\beta u(1+\beta U)}\right] \tag{1}$$

$$\beta u=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{n+1}{rc_0^2}G\right)^{1/2}-1\right], \tag{2}$$

$$p=A\left[\frac{2}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}\left(1+\frac{n+1}{rc_0^2}G\right)^{1/2}\right]^{2n/n-1}-B, \tag{3}$$

$$\beta U=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{n+1}{Rc_0^2}G\right)^{1/2}-1\right]. \tag{4}$$

Здесь r — расстояние, n — показатель адиабаты, $\beta=n+1/4c_0$, A и B — постоянные, равные для воздуха соответственно $A=\rho_0 c_0^2$, $B=0$, где ρ_0 — равновесная плотность среды, c_0 — скорость звука, $G=r\left(\int\limits_{p_\infty}^{p}\frac{dp}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)$ — величина, которая, согласно теории Кирквуда — Бете, распространяется со скоростью $c+u$, c — местная скорость звука, ρ — плотность среды. Для сферы, расширяющейся в воздухе по закону $R=Mc_0t_R$, из формул (1)—(3) получаем решение в параметрическом виде:

$$\xi^{-1}=aZ+(1+Z)^{1/2}-\frac{Z}{2}\left[\ln\frac{(1+Z)^{1/2}+1}{(1+Z)^{1/2}-1}+b\right], \tag{5}$$

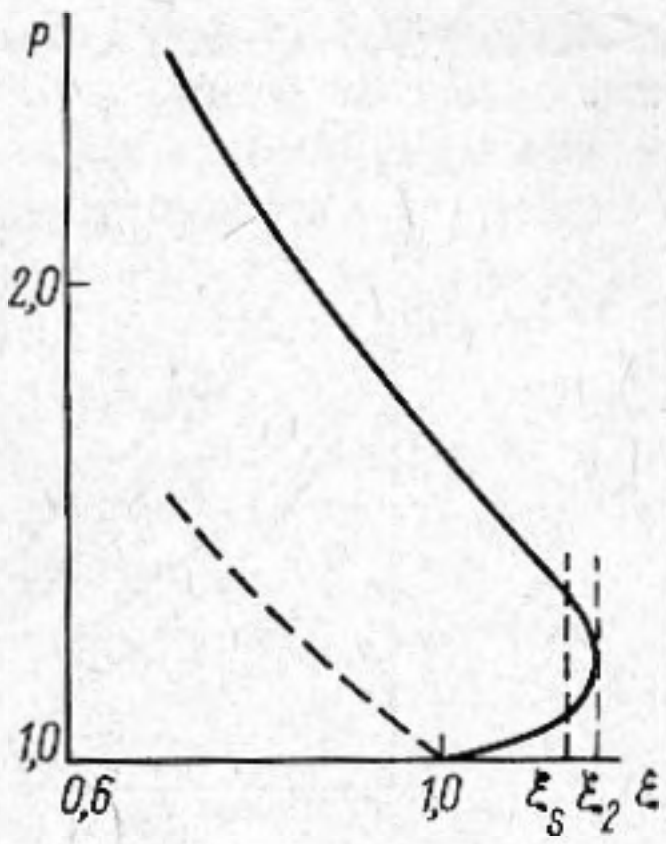
$$P=\left[\frac{2}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}(1+Z)^{1/2}\right]^{2n/(n-1)} \tag{6}$$

$$V=\frac{2}{n+1}\left[(1+Z)^{1/2}-1\right], \tag{7}$$

где для удобства введены следующие безразмерные величины: $\xi=r/c_0t$, $P=p/\rho_0c_0^2$, $Z=4\beta/c_0rG$, $V=u/c_0$. Постоянные a и b зависят от M и n:

$$a=\frac{4}{M^2(n+1)[4+M(n+1)]},$$

$$b=\frac{2+(n+1)M}{M(n+1)\left(1+\frac{n+1}{4}M\right)}+\ln\frac{(n+1)M}{4+(n+1)M}.$$



Фиг. 1. Профиль волны давления, окружающий расширяющуюся сферу. Сплошная линия построена с использованием выражений (5) и (6), для $M=0{,}7$, штриховая — соответствует линейному решению ($P=p/\rho_0c_0^2$, $\xi=r/c_0t$), ξ_s и ξ_1 — координаты ударного фронта и точки перегиба

В выражениях (5)—(7) безразмерная величина Z изменяется от нуля до $1/(Ma)$ — ее значения на сфере ($r=R$). Анализ (5)—(7) показывает, что при любых сколь угодно малых скоростях расширения в решениях имеется неоднозначность, которая устраняется введением разрыва (ударного фронта) в профиле волны фиг. 1. Для определения координаты ударного фронта ξ_s воспользуемся точным выражением для его скорости (8).

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_s}=c_0(\beta u+\sqrt{1+(\beta u)^2}). \tag{8}$$

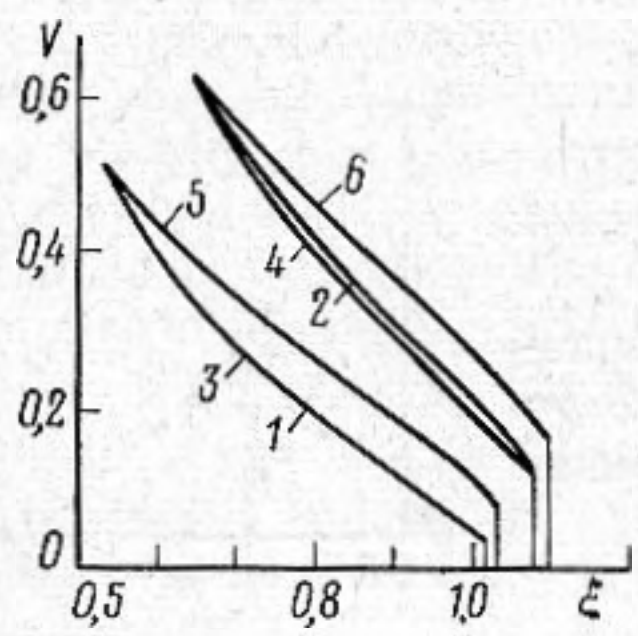
Если теперь определить производную dr/dt из формулы (5) и приравнять полученное выражение к правой части формулы (8), то, используя равенство (7), окончательно получим уравнение для определения параметра $Z=Z_s$ на ударном фронте,

$$\frac{dZ_s}{d(\ln r)}=\frac{\frac{1}{2}(y_s+1)-\sqrt{1+\frac{1}{4}(y_s-1)^2}}{\left\{1+ay_s-\frac{1}{2}y_s\left[\ln\frac{y_s+1}{y_s-1}+b\right]\right\}\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}(y_s-1)^2}+\frac{1}{2}(y_s-1)\right]}-Z_s, \tag{9}$$

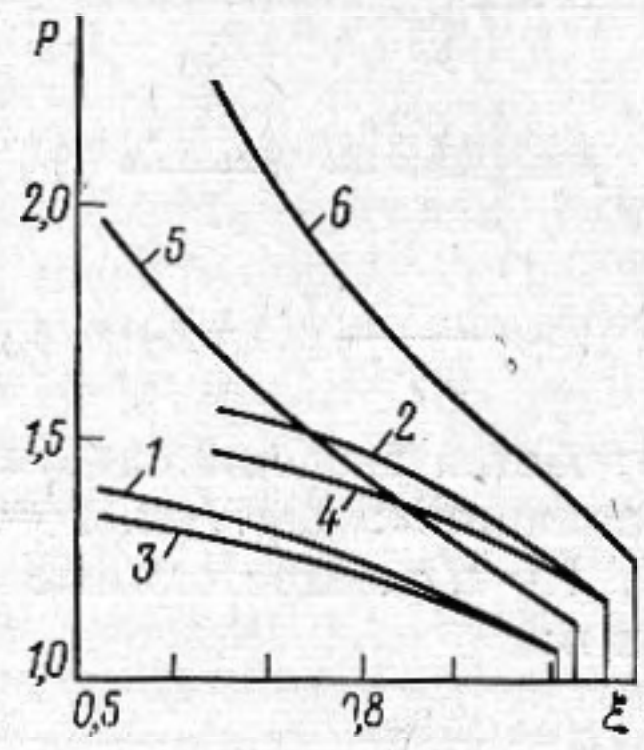
где $y_s=(1+Z_s)^{1/2}$. Анализ уравнения (9) показал, что с уменьшением Z_s, т. е. с уменьшением амплитуды удара, величина $\ln r\to-\infty$; очевидно, остается единственная возможность положить $Z_s=\text{const}$. Тогда из формулы (9) получаем трансцендентное уравнение:

$$(10)\qquad Z_s=\frac{\frac{1}{2}(y_s+1)-\sqrt{1+\frac{1}{4}(y_s-1)^2}}{\left[1+ay_s-\frac{1}{2}y_s\left(\ln\frac{y_s+1}{y_s-1}+b\right)\right]\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}(y_s-1)^2}+\frac{1}{2}(y_s-1)\right]}.$$

Это уравнение имеет два решения, одно из которых Z_1 — отвечает ударному фронту, а другое Z_2 — точке перегиба в профиле волны, причем $Z_1<Z_2(\xi_s=\xi(Z_1)<\xi_2=\xi(Z_2)$ (см. фиг. 1). На фиг. 2, 3 представлены для



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Распределение скорости воздуха вокруг расширяющейся сферы. Кривые *1*, *2* отвечают точным расчетам [7], *3*, *4* — вычислениям во-втором приближении [1], *5*, *6* — вычислениям по формулам (5) и (7), для $M=0{,}523$ и $M=0{,}638$ соответственно ($V=u/c_0$, $\xi=r/c_0t$)

Фиг. 3. Распределение давления воздуха вокруг расширяющейся сферы. Кривые *1*, *2* отвечают точным расчетам [7], *3*, *4* — вычислениям во-втором приближении [1], *5*, *6* — вычислениям по формулам (5) и (6), для $M=0{,}523$ и $M=0{,}638$ соответственно ($P=p/\rho_0c_0^2$, $\xi=r/c_0t$)

сравнения профили скорости и давления, рассчитанные по формулам (5)—(7), (10), с соответственными характеристиками, вычисленными в работах [1, 7]. Как видно, использование приближения (КБ) приводит к существенно завышенным значениям для указанных величин. Особенно сильные расхождения наблюдаются для поля давления вблизи сферы, где значения давления превышают даже значения, вычисленные на основе линейной теории [7]. Следует отметить, что метод расчета с учетом только квадратичных нелинейных слагаемых приводит к значительно лучшему совпадению значений скорости и давления с результатами численного расчета [7].

Используя формулы (5)—(7) и решение уравнения (10) можно определить импульс давления в волне $I=\int\limits_{t_s}^{t_R}(P-1)\,dt$, где t_s — время прихода ударной волны в точку с радиусом r. Для безразмерной величины $J=c_0/r\cdot I$ нетрудно получить удобное для вычислений интегральное представление, если перейти к интегрированию по параметру Z вместо интегрирования по времени:

$$(11)\qquad J=\int\limits_{Z_1}^{(Ma)^{-1}}\left[\left(\frac{2}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}y\right)^{\frac{2n}{n-1}}-1\right]\times$$

$$\times\left[a+y^{-1}-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{y+1}{y-1}+b\right)\right]dZ,$$

$$y=(1+Z)^{1/2}.$$

Как видно из выражения (11), величина J является постоянной, численное значение которой зависит от M и n; при $M=0{,}523$ и $M=0{,}638$ в воздухе ($n=1{,}4$) получаем соответственно $Z_1=0{,}1716$, $J=0{,}5689$ и $Z_1=0{,}4157$, $J=0{,}5437$. Следовательно, импульс давления в волне нарастает с увеличением расстояния, пройденного волной, причем, чем больше скорость расширения сферы, тем медленнее нарастание. Из положения кривых на фиг. 3 ясно, что значение импульса давления по выражению (11) будет существенно завышено по сравнению с его истинной величиной.

Результаты работы позволяют предположить что использование приближения Кирквуда — Бете для расчетов ударных волн приведет к появлению существенных отличий в определение формы возбуждаемой волны и ее параметров. Это, по-видимому, может служить одним из объяснений расхождения результатов расчета параметров волны, генерируемой полостью в жидкости, образующейся вследствие электрического разряда [5], где расчетные значения давления превышали экспериментальные в 1,5—2 раза (аналогичные отличия имеют место на фиг. 3). Поскольку отличия давления за ударным фронтом значительные (см. фиг. 3), то следует ожидать завышенных значений для постоянной времени ударной волны (длительности, определяемой по уровню $1/e$), что также имеет место на практике (см., [5]). Однако, несмотря на указанные недостатки метода (КБ), с его помощью достаточно хорошо описываются характеристики ударного фронта в процессе распространения волны [4], что связано, по всей видимости, с применимостью этого метода лишь вблизи ударного фронта, поскольку только в области фронта волны можно считать, что для скорости распространения величины G можно использовать выражение, аналогичное для плоской волны Римана [2] которое применялось в [3] при выводе зависимостей (1)—(4), и в [4] при получении значений для амплитуды ударной волны и ее постоянной времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наугольных К. А.* Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой.— Акуст. ж., 1965, т. 11, № 3, с. 351—358.
2. *Коул Р.* Проводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
3. *Акуличев В. А., Богуславский Ю. Л., Иоффе А. И., Наугольных К. А.* Излучение сферических волн конечной амплитуды.— Акуст. ж., 1967, т. 13, № 3, с. 321—328.
4. *Кидринский В. К.* Приближение Кирквуда — Бете для цилиндрической симметрии подводного взрыва.— Физика горения и взрыва, 1972, т. 8, № 1, с. 115—123.
5. *Иоффе А. И., Наугольных К. А.* К образованию ударных волн при электрическом разряде в воде.— ПМТФ, 1968, № 1, с. 134—137.
6. *Петухов Ю. В., Фридман В. Е.* Трансформация спектра при распространении гидроакустического импульса конечной амплитуды.— Тр. VII симп. по дифракции и распространению волн. Т. 2. М.: Наука, 1977, с. 283—286.
7. *Taylor G. L.* The air surrounding an expanding sphere.— Proc. Roy. Soc. Ser, A, 1946, № 186, p. 273—292.
8. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

Горьковский
научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
26.XII.1980