

УДК 534.26

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ КРУГОВОГО ПОРШНЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Антонов С. Н., Пупырев В. А.

Изучается влияние герметизирующего уплотнения на дальнее поле, создаваемое низкочастотными пульсациями круглого экранированного излучателя. Для анализа краевого эффекта предлагается простейшая расчетная схема, представляющая собой линейную колебательную систему с двумя степенями свободы.

В статье [1] обращено внимание на трудности, связанные с выбором параметров уплотнения, предназначенного для герметизации поршня — подводного излучателя звука. Уплотнение должно быть достаточно податливым, чтобы обеспечить необходимый ход поршня; в то же время не исключена возможность, что такое уплотнение в определенном частотном диапазоне будет колебаться в противофазе с поршнем, что может привести к нежелательному снижению звукового давления в дальнем поле. Вероятен и другой неблагоприятный факт: уплотнение может «сыграть роль» динамического гасителя колебаний поршня.

В настоящей статье сделана попытка на основании простейшей расчетной схемы — линейной системы с двумя степенями свободы — оценить влияние параметров уплотнения на амплитудно-частотную характеристику излучателя в целом и дать рекомендации по их оптимальному выбору.

Рассматривается следующая модель (фиг. 1). Излучатель 1 — твердый круглый поршень массы M_{00} и радиуса r_0 ; уплотнение 2 — твердое безынерционное круговое кольцо с внешним радиусом r_1 ; податливость уплотнения задается величиной $2/c_k$, где c_k — жесткость линейных пружин, связывающих кольцо с диском и неподвижным бесконечным плоским экраном — корпусом 3; внутренними диссипативными свойствами системы пренебрегаем.

Пусть x_0 и x_k — комплексные амплитуды перемещений поршня и кольца соответственно. Уравнения движения модели в этих обозначениях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 M_{00} x_0 + c_k (x_0 - x_k) + F_0 + F_{0k} &= F \\ c_k (x_k - x_0) + c_k x_k + F_k + F_{k0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где силы F_0 , F_k , F_{0k} , F_{k0} суть реакции среды — 4, F — заданная возбуждающая сила (здесь и всюду ниже временной множитель $\exp(i\omega t)$ и слова «комплексная амплитуда» опускаются). Указанные реакции могут быть представлены в стандартной форме с использованием активных импедансов (R_0 , R_k , R_{0k}) и присоединенных масс (M_0 , M_k , M_{0k}) [2]:

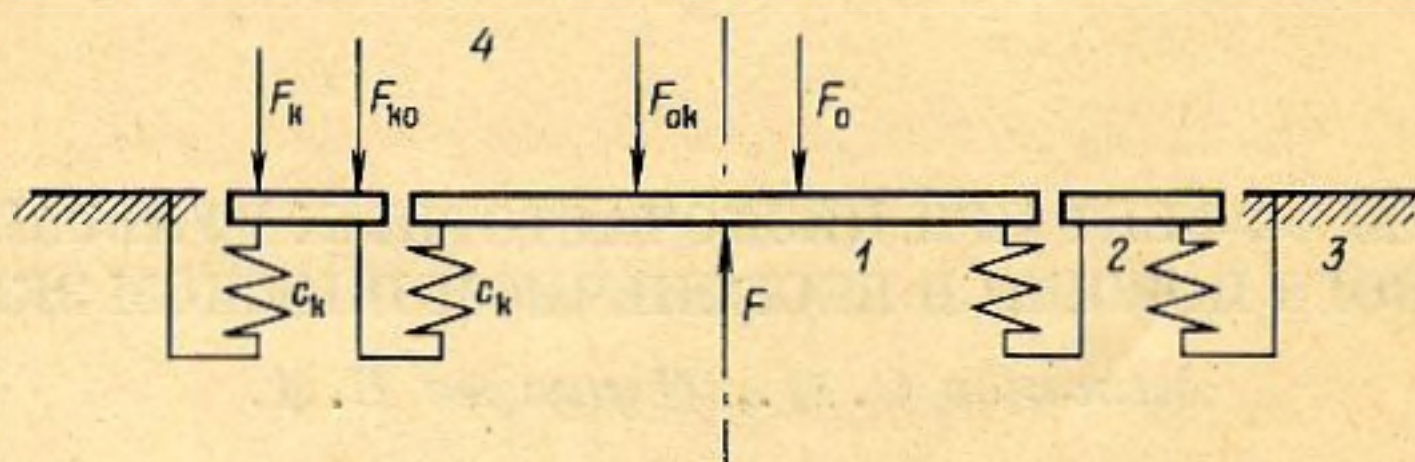
$$F_0 = i\omega x_0 (R_0 + i\omega M_0), \quad F_k = i\omega x_k (R_k + i\omega M_k),$$

$$F_{к0} = i\omega x_0 (R_{0к} + i\omega M_{0к}); \quad F_{0к} = i\omega x_к (R_{0к} + i\omega M_{0к}). \quad (2)$$

Индексы 0, к соответствуют так называемым собственным интегральным характеристикам поршня и кольца, индексы 0к — взаимным.

Подстановка представлений (2) в систему (1) приводит к уравнениям, описывающим гармоническое движение системы с двумя степенями свободы:

$$\left. \begin{aligned} (c_к - \omega^2 M + i\omega R_0) x_0 - (c_к + \omega^2 M_{0к} - i\omega R_{0к}) x_к &= F \\ - (c_к + \omega^2 M_{0к} - i\omega R_{0к}) x_0 + (2c_к - \omega^2 M_к + i\omega R_к) x_к &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Фиг. 1. Расчетная схема системы излучатель — уплотнение

Здесь $M = M_{00} + M_0$ — полная масса поршня; мнимые слагаемые, пропорциональные $R_0, R_к, R_{0к}$, определяют диссипацию энергии в системе вследствие излучения комбинации уплотнение — поршень в среду. Характерная особенность системы (3) — наличие нетрадиционных для классической механики инерционного слагаемого $\omega^2 M_{0к}$ и определенной взаимосвязи как между присоединенными массами, так и между активными импедансами, в общем случае являющимися сложными функциями частоты.

Исследованию подлежит глобальная характеристика системы $p^\infty(\omega)$ — модуль звукового давления в дальнем поле, которое определяется суперпозицией давлений, создаваемых независимо пульсирующими круговым и кольцевым излучателями с перемещениями $x_0(x_к=0)$ и $x_к(x_0=0)$ соответственно.

Рассмотрим кольцевой излучатель, расположенный на бесконечном плоском экране. Его собственный импеданс определяется с помощью интеграла Гюйгенса — Френеля в виде [2]

$$R_к + i\omega M_к = i\omega\rho (2\pi)^{-1} \iint_{s_к} d\sigma_1 \iint_{s_к} e^{-ikr} \frac{d\sigma}{r}, \quad (4)$$

где ρ — плотность среды; $s_к = \pi(r_1^2 - r_0^2)$ — площадь излучающей поверхности; k — волновое число; r — расстояние между центрами инерции элементарных площадок $d\sigma$ и $d\sigma_1$. Как и в случае излучения кругового поршня [2], внутреннее интегрирование в равенстве (4) достаточно провести по площади внутреннего кольца с внешним радиусом u , равным расстоянию между центрами инерции кольца и площадки $d\sigma_1$. В результате

$$\left. \begin{aligned} R_к &= 2\pi\rho c \int_{r_0}^{r_1} \left(1 - I_0(2ku) - \frac{4}{\pi} I_s \right) u du, \\ i\omega M_к &= i2\pi\rho c \int_{r_0}^{r_1} \left(S_0(2ku) - \frac{4}{\pi} I_c \right) u du, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_s \\ I_c \end{array} \right\} = \int_0^{\arcsin r_0/u} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ku \cos \theta) \\ \cos(ku \cos \theta) \end{array} \right\} \sin(k\sqrt{r_0^2 - u^2} \sin^2 \theta) d\theta,$$

где I_0, S_0 — функции Бесселя и Струве нулевого порядка; c — скорость звука в среде.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\xi = k\eta = kr_0, \quad 0 \leq k = \frac{r_0}{r_1} < 1, \quad \beta = s_k/s_0 = 1 - k^2/k^2 \quad (6)$$

и рассмотрим только низкочастотные пульсации, для которых выполняется неравенство

$$\eta = kr_1 \ll 1. \quad (7)$$

Наличие малого частотного параметра η позволяет легко найти асимптотические разложения представлений (5), в которых здесь сохраняются только главные члены:

$$\left. \begin{aligned} R_k &\cong \rho c s_0 \cdot \frac{1}{2} \beta^2 \xi^2 + O(\xi^4), \quad \eta, \xi \ll 1, \\ M_k &\cong \rho r_0 s_0 \cdot \frac{8}{3\pi} \frac{1}{k^3} [1 + k^3 - (1 + k^2)E(k) + (1 - k^2)K(k)] + O(\xi^2), \end{aligned} \right\} (8)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода [3]; $s_0 = \pi r_0^2$ — площадь внутреннего круга. При $r_0 \rightarrow 0$ и последующей замене r_1 на r_0 из выражений (8) вытекают известные соотношения для собственного активного импеданса и присоединенной массы кругового излучателя радиуса r_0 [2]:

$$\left. \begin{aligned} \xi \ll 1 & \quad \xi \ll 1 \\ R_0 &\cong \rho c s_0 \cdot \frac{1}{2} \xi^2 + O(\xi^4), \quad M_0 \cong \rho r_0 s_0 \frac{8}{3\pi} + O(\xi^2). \end{aligned} \right\} (9)$$

Определим взаимные интегральные характеристики $R_{ок}$ и $M_{ок}$ на основании очевидного соотношения

$$Z_0 + 2Z_{ок} + Z_k = Z_1, \quad (10)$$

где через Z обозначены полные импедансы, причем Z_1 — полный импеданс кругового излучателя радиуса r_1 . Подстановка соотношений (8) и (9) в равенство (10) и выделение вещественной и мнимой частей приводит к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} R_{ок} &\cong \rho c s_0 \cdot \frac{1}{2} \beta \xi^2 + O(\xi^4), \quad \eta, \xi \ll 1 \\ M_{ок} &\cong \rho r_0 s_0 \cdot \frac{4}{3\pi} \frac{1}{k^3} [-2k^3 + (1 + k^2)E(k) - (1 - k^2)K(k)] + O(\xi^2) \end{aligned} \right\} (11)$$

По формулам (8), (11) могут быть вычислены отношения $M_{ок}/M_0$, M_k/M_0 как функции только одного параметра k . Однако безусловный практический интерес представляет только вариант узкого кольца, когда значения k близки к единице. При этом указанные формулы становятся мало пригодными из-за наличия малых разностей в квадратных скобках. Удобнее приближенные выражения, достаточно надежные при $0 < \beta \leq 0,6$ ($0,791 < k < 1$):

$$\left. \begin{aligned} \eta, \xi \ll 1 \\ M_k &\cong \rho r_0 s_0 \frac{\beta^2}{2\pi} \left[(1 - 0,25\beta) \ln \frac{16}{\beta} + \frac{3}{2} + O(\beta) \right], \\ \eta, \xi \ll 1 \\ M_{ок} &\cong \rho r_0 s_0 \frac{2\beta}{\pi} \left[1 - 0,125\beta (1 - 0,25\beta) \ln \frac{16}{\beta} + \frac{1}{16} + O(\beta^2) \right]. \end{aligned} \right\} (12)$$

На фиг. 2 приведены кривые $M_{ок}/M_0$ (1) и M_k/M_0 (2), построенные по точным и приближенным (штриховая линия) формулам. Важно отметить, что для рассматриваемого диапазона β справедливы неравенства

$$R_k < R_{ок} < R_0, \quad M_k < M_{ок} < M_0, \quad M_0 M_k - M_{ок}^2 > 0, \quad (13)$$

причем последнее оказывается правильным для любого β .

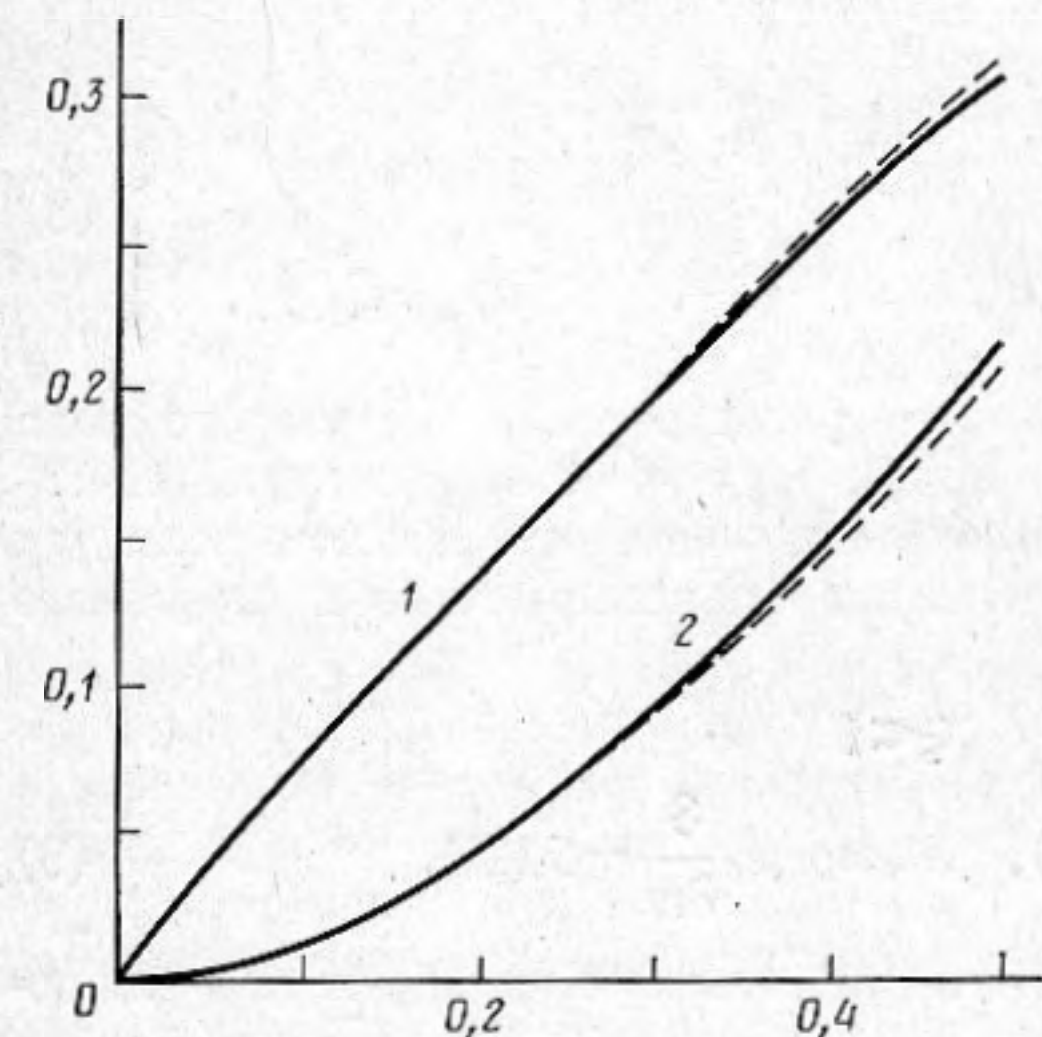
Звуковое давление кольцевого излучателя в дальнем поле вычисляется так же, как и давление p_0 круглого [2]. В принятых обозначениях оно определяется выражением

$$R \gg r_1 \quad p_k \cong -\frac{1}{2} \rho c x_k \frac{r_1}{R} \eta \left[2 \frac{I_1(\eta \sin \theta)}{\eta \sin \theta} - 2k^2 \frac{I_1(\xi \sin \theta)}{\xi \sin \theta} \right] e^{-ikR}, \quad (14)$$

где R — расстояние от центра кольца до точки наблюдения, θ — угол между направлением на точку наблюдения и внешней нормалью к поверхности излучения s_k ; I_1 — функции Бесселя. При $r_0 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) и замене r_1 на r_0 , x_k на x_0 равенство (14) сводится к выражению для звукового давления в дальнем поле p_0 круглого поршня в бесконечном плоском экране [2]. При рассмотрении низкочастотных пульсаций (условие (7)) и сохранении, как и всюду раньше, только главного члена разложения p_k и p_0 не зависят от θ . При этом глобальная характеристика определяется следующим соотношением:

$$p^\infty(\omega) \cong \frac{1}{2\pi} \rho s_0 R^{-1} \omega^2 |x_{0m}(\omega) \mp \beta x_{km}(\omega)|, \quad \eta, \xi \ll 1, \quad R \gg r_1, \quad (15)$$

где x_{0m} , x_{km} — модули перемещений x_0 и x_k ; знак минус берется для тех значений частоты, при кото-



Фиг. 2. Относительные взаимная присоединенная масса кольца и диска $M_{ок}/M_{00}$ (1) и собственная присоединенная масса кольца M_k/M_{00} (2)

рых поршень и кольцо движутся в противофазе (при отсутствии диссипации).

Проведем анализ амплитудно-частотной характеристики (15) связанной системы уплотнение — излучатель — среда, основанный на решении уравнений (3) при условии $R_0 = R_k = R_{ок} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right) \Delta^{-1}(\omega) x_{ст}, \\ x_k &= -\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{ок}^2}\right) \Delta^{-1}(\omega) x_{ст}/2, \\ \Delta(\omega) &= \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right), \quad x_{ст} = \frac{2F}{c_k}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь $x_{ст}$ — статическое смещение поршня под действием силы F ; ω_1 , ω_2 — резонансные частоты системы; ω_k — парциальная частота кольца; частота $\omega_{ок}$ не имеет четкого механического истолкования. Выражения для квадратов частот таковы:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_k}{M + M_{ок} + 0,5M_k \pm \sqrt{(M + M_{ок})^2 + (0,5M_k + M_{ок})^2}} \quad (17)$$

$$\omega_k^2 = 2c_k/M_k, \quad \omega_{ок}^2 = c_k/M_{ок}.$$

Вещественность ω_2^2 обеспечивается последним неравенством (13). Независимо от значений жесткости c_k , параметра β , множителя $\rho r_0 s_0$, входящего во все присоединенные массы M_0 , M_k , $M_{ок}$, а также собственной мас-

сы поршня M_{00} , справедливо неравенство

$$\omega_1 < \omega_k < \omega_2. \quad (18)$$

Функция $x_0(\omega)$ — типичная характеристика динамического гасителя колебаний [4] с частотой гашения ω_k . При $\omega < \omega_k$ поршень и кольцо движутся в фазе, при $\omega > \omega_k$ — в противофазе. Последнее обстоятельство приводит к тому, что глобальная характеристика $p^\infty(\omega)$, вычисляемая с помощью соотношений (15), (16) и определяющаяся выражением

$$p^\infty(\omega) = \frac{1}{2\pi} \rho s_0 R^{-1} (1 + 0,5\beta) \omega^2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2} \right| \frac{x_{ст}}{|\Delta(\omega)|}, \quad (19)$$

k	1	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819
β	0	0,0718	0,132	0,218	0,333	0,490
ω_1	0	0,0297	0,0490	0,0713	0,0953	0,119
ω_2		0,0261	0,0442	0,0665	0,0922	0,120
ω_m	0	0,238	0,291	0,337	0,374	0,402
ω_2		0,197	0,248	0,295	0,338	0,377
ω_*	1	1,16	1,19	1,23	1,28	1,35
ω_2		1,33	1,40	1,47	1,56	1,70
p_m^∞	1	1,01	1,03	1,04	1,05	1,06
p_{00}^∞		1,04	1,08	1,12	1,18	1,26
p_0^∞	1	0,734	0,683	0,627	0,565	0,489
p_{00}^∞		0,569	0,519	0,469	0,417	0,355

обращается в нуль на некоторой глобальной частоте гашения ω_* . Последняя выражается через частоты ω_k , $\omega_{ок}$ и параметр β в виде

$$\omega_*^2 = \frac{1 + 0,5\beta}{1 - 0,5\beta \frac{\omega_k^2}{\omega_{ок}^2}} \omega_k^2 > \omega_2^2 \quad (20)$$

и оказывается больше второй резонансной частоты ω_2 . На фиг. 3—5 приведены кривые, определяющие отношения $x_0/x_{ст}$, $x_k/x_{ст}$, p^∞/p_{00}^∞ как функции безразмерной частоты ω/ω_2 при фиксированных $\beta=1/3$ и $M=1,75 M_0$. В относительной глобальной характеристике p^∞/p_{00}^∞ фигурирует номинальное, постоянное давление

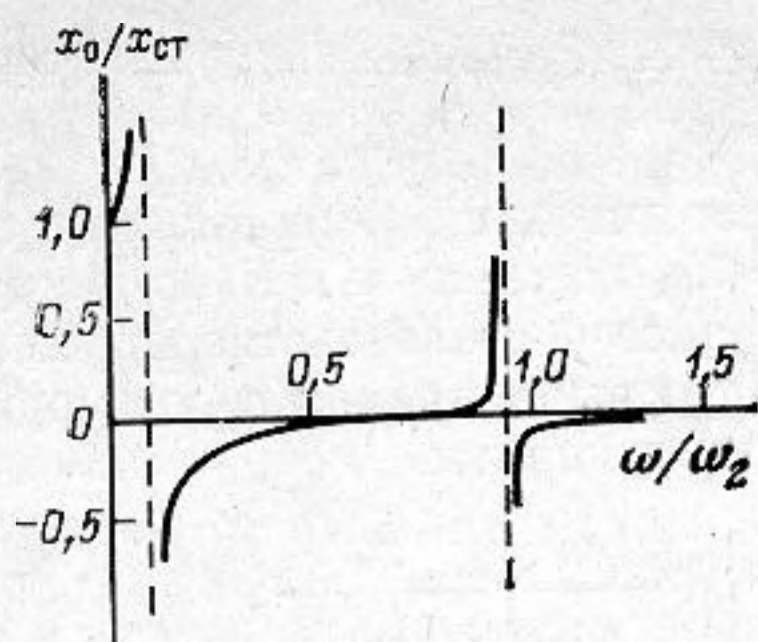
$$p_{00}^\infty = \frac{1}{2\pi} \rho s_0 R^{-1} F M^{-1} = \frac{1}{2\pi} \rho s_0 R^{-1} \omega_0^2 x_{ст}, \quad \omega_1^2 \leq \omega_0^2 = c_k/2M < \omega_2^2, \quad (21)$$

соответствующее движению вырожденной системы без уплотнения, когда $c_k=0$, $\beta=0$. Частота ω_0 , введенная в соотношении (21), суть собственная частота колебаний поршня полной массы M на пружине полной жесткости уплотнения $c_k/2$. Она является характерной резонансной частотой для другого случая, когда $c_k \neq 0$, но $\beta=0$, а значит, $M_k=M_{ок}=0$, и исходная система вырождается в систему с одной степенью свободы. Ее предельное движение при $\omega \rightarrow \infty$ обеспечивает в дальнем поле номинальное давление p_{00}^∞ .

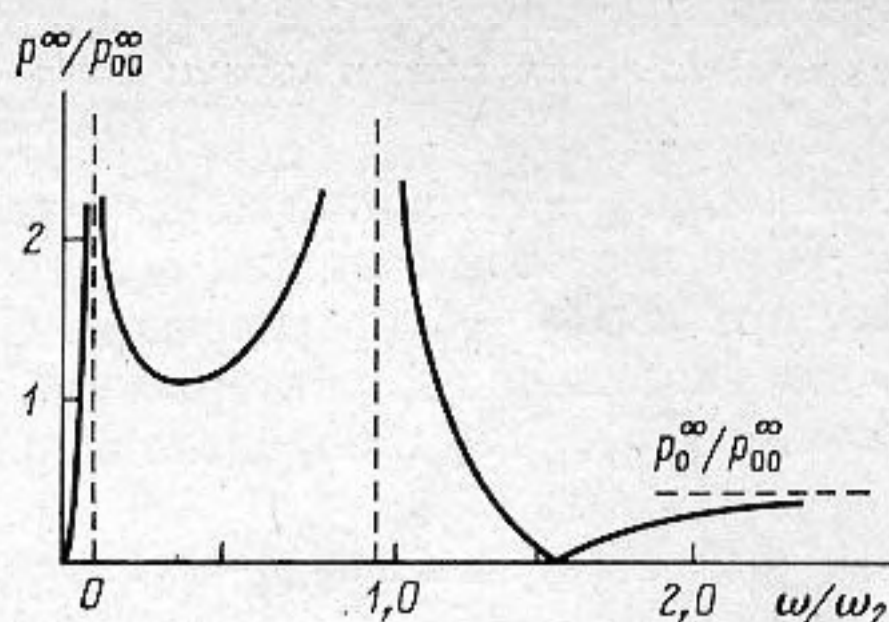
Представляет интерес и еще один вырожденный вариант, когда отсутствует упругая связь между уплотнением и экраном, уплотнением и поршнем, т. е. $c_k=0$, но $\beta \neq 0$. При этом звуковое давление в дальнем поле также постоянное:

$$p_0^\infty = \frac{1}{2\pi} \rho s_0 R^{-1} (1 + 0,5\beta) \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_*^{-2} x_{ст} \leq p_{00}^\infty \quad (22)$$

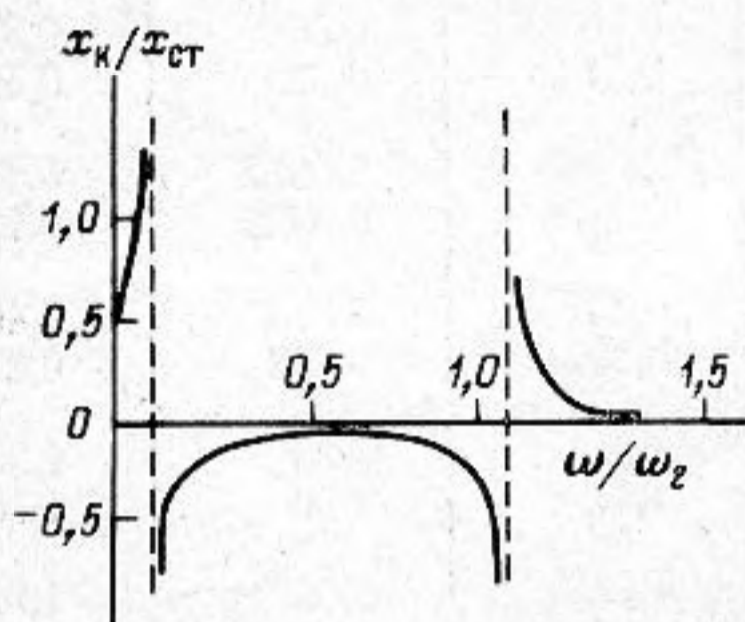
и является предельным при $\omega \rightarrow \infty$ для глобальной характеристики $p^\infty(\omega)$ (на фиг. 5 отмечено штриховой прямой). Знак равенства в соотношении (22) достигается при $\beta \rightarrow 0$. Важным представляется также значение



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

Фиг. 3. Амплитудно-частотная характеристика колебаний диска

Фиг. 4. Амплитудно-частотная характеристика колебаний кольца

Фиг. 5. Амплитудно-частотная характеристика звукового давления в дальнем поле $p^\infty(\omega)$

$p_m^\infty = \min_{\omega_1 < \omega < \omega_2} p^\infty(\omega)$ в межрезонансной области. Оно достигается на частоте ω_m , определяемой с использованием равенства (19) в виде

$$\omega_m^2 = \omega_*^2 \left(1 + \sqrt{\left(\frac{\omega_*^2}{\omega_1^2} - 1 \right) \left(\frac{\omega_*^2}{\omega_2^2} - 1 \right)} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Следует отметить, что все характерные частотные отношения ω_1/ω_2 , ω_m/ω_2 , ω_*/ω_2 и отношения характерных давлений p_m^∞/p_{00}^∞ , p_0^∞/p_{00}^∞ зависят только от параметра β и соотношения масс поршня M_{00} и M_0 . В таблице приведены значения указанных отношений для двух вариантов: масса поршня $M_{00} = 0$ (верхняя строка); $M_{00} = 0,75 M_0$ ($M = 1,75 M_0$). Анализ расчетных данных позволяет заключить, что все отношения, за исключением p_0^∞/p_{00}^∞ , растут с ростом β в обоих вариантах. Степень роста, разумеется, различная. Важно подчеркнуть быстрое сужение диапазона $\omega_1 \div \omega_2$ (при фиксированном ω_2) и вместе с тем «инерцию» отношения p_m^∞/p_{00}^∞ . Безусловно, отрицательным является факт довольно сильного уменьшения величины отношения p_0^∞/p_{00}^∞ , хотя он имеет место при сравнительно медленном росте ω_*/ω_2 . Отрицательно сказывается и рост собственной массы диска M_{00} : значение p_0^∞/p_{00}^∞ уменьшается, а ω_*/ω_2 растет (почти одинаково для всех рассмотренных значений β).

Анализ глобальной характеристики, вычисленной с учетом диссипации, т. е. при $R_0, R_{0k}, R_k \neq 0$, опускаем. Здесь приводим основные выводы: учет диссипации приводит к малому сдвигу резонансных частот, на которых достигаются истинные максимумы давления, влево, а частоты, соответствующей минимуму давления в межрезонансной области, — вправо от значений ω_1 , ω_2 и ω_m соответственно; этот сдвиг существеннее для ω_2 и ω_m , причем для последней сдвиг уменьшается с ростом собственной массы M_{00} ; влияние диссипации мало и кривая глобальной характеристики для всех ω (за исключением ω_1 , ω_2) совершенно незначительно отходит от ограничивающей ее сверху кривой $p^\infty(\omega)$.

При этом следует отметить весьма важное обстоятельство. Известно [4], что динамический гаситель теряет свою эффективность при наличии вязкого сопротивления — полного гашения не происходит. В настоящем случае также не происходит полного гашения колебаний поршня, однако

значение звукового давления в дальнем поле по-прежнему обращается в нуль на частоте гашения ω_* . Это означает отсутствие излучения на этой частоте. Можно показать, что на частоте ω_* средняя за период работа силы F равна нулю. Равны нулю также и суммарные активные составляющие сил сопротивления излучения, действующие на диск и кольцо.

Итак, учет диссипативных членов в системе (3) по сути дела не влияет на основные выводы, касающиеся глобальной характеристики $p^\infty(\omega)$. Выяснено исключительно сильное влияние упругого уплотнения, вызывающего резкое качественное и количественное изменения номинального давления p_{00}^∞ , которое реализуется при низкочастотных пульсациях только одного заэкранированного поршня.

При заданных параметрах поршня управляющими параметрами глобальной характеристики $p^\infty(\omega)$ могут служить β и одна из характерных частот $\omega_1, \omega_2, \omega_*$, определяющих межрезонансную область и область низких давлений. Но какую именно частоту и ее величину выбрать при фиксированном β , величина которого, вообще говоря, выбирается из конструктивных соображений? Ответ зависит от ограничений, накладываемых на характеристику $p^\infty(\omega)$ в наперед заданном диапазоне частот $\omega_n \div \omega_b$. Строго говоря, оптимальный выбор β и c_n является задачей нелинейного программирования, решение которой может представить значительные вычислительные трудности. Предпочтительнее в таком случае обычная переборка — изучение множества характеристик при различных практически реализуемых заданных β и конкретной частоте. Определенные коррективы в поведении глобальной характеристики можно ввести с помощью вязкого демпфирования уплотнения и поршня, а также собственного подпружинивания поршня, например за счет перераспределения полной жесткости уплотнения $c_n/2$. Последнее, как показывает опускаемый здесь анализ, приводит в основном к уменьшению частоты ω_2 , т. е. к сокращению межрезонансной области, и к смещению частоты гашения ω_* в сторону низких частот. Асимптотическое значение p_0^∞ при этом не меняется. Отсюда следует, что при широкополосном возбуждении подпружиненного поршня и необходимости получить плавную, без завалов характеристику необходимо выбирать частоту ω_n большей, чем частота ω_* .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Claude C. Sims*. High Fidelity Underwater Sound Transducers.— Proc. IRE, 1959, № 5, p. 866–871.
2. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960.
3. *Градштейн Л. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию
4.IV.1983