АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 6

УДК 551.463.21

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА НЕРОВНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Воронович А. Г.

Предложен метод расчета рассеяния звука на неровных свободных поверхностях, заключающийся в разложении по степеням возвышений логарифма матрицы рассеяния. В случае малых возвышений метод дает результаты, соответствующие учету первых членов ряда теории возмущений, а в случае крупномасштабных пологих неровностей приводит по существу к приближению Кирхгофа.

Задача о рассеянии звука, падающего на неровную поверхность, относится к числу классических, довольно подробно изученных проблем [1]. Для гидроакустики наибольший интерес представляет случай свободной поверхности, на которой обращается в нуль полное поле давления. В приближенных расчетах рассеяния наибольшее распространение получили метод малых возмущений и метод касательной плоскости (приближение Кирхгофа) [1, 2]. Эти подходы применимы, вообще говоря, для различных типов неровностей. В данной работе предлагается приближенный метод расчета рассеяния, который для малых возвышений дает результаты, соответствующие учету первых членов ряда теории возмущений, а в случае крупномасштабных пологих неровностей приводит по существу к приближению Кирхгофа. Поскольку в спектре колебаний реальной морской поверхности присутствуют оба типа неровностей, предлагаемая методика может представлять определенный практический интерес. Основная идея подхода заключается в том, чтобы искать в виде разложения по степеням возвышений поверхности не саму матрицу рассеяния, а ее логарифм.

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат с осью z, направленной вертикально вверх, и зададим неровную поверхность Σ уравнением $z=\eta(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — горизонтальная компонента радиус-вектора $\mathbf{R}=(\mathbf{r}, z)$. Рассмотрим задачу о рассеянии плоской монохроматической волны вида $\Psi=\exp(i\varkappa_0 r+i\nu_0 z)$, падающей на эту поверхность со стороны $z=-\infty$ (снизу). В силу условий излучения в области $z<\min\eta(\mathbf{r})$, т. е. расположенной целиком ниже неровностей поверхности Σ, рассеянное поле представляется в виде суперпозиции уходящих волн

$$\Psi_{\text{расс}}=\int \tilde{S}(\boldsymbol{\varkappa}_0, \boldsymbol{\varkappa})\exp[i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}-i\nu(\boldsymbol{\varkappa})z]\,d\boldsymbol{\varkappa}, \tag{1}$$

где $\nu(\varkappa)=\sqrt{k^2-\varkappa^2}$, $\operatorname{Im}\nu(\varkappa)\geqslant 0$. Знание амплитуды рассеяния $\tilde{S}(\boldsymbol{\varkappa}_0, \boldsymbol{\varkappa})$ для всех значений аргументов позволяет, очевидно, с помощью простой квадратуры найти и поле точечного источника (функцию Грина), по крайней мере в том практически интересном случае, когда источник и приемник находятся в области $z<\min\eta(r)$. Первые два члена ряда теории возмущений для $\tilde{S}$ имеют, как легко проверить, следующий вид:

$$\begin{gathered}\tilde{S}_{\text{м.в}}(\boldsymbol{\varkappa}_0, \boldsymbol{\varkappa})=-\delta(\boldsymbol{\varkappa}_0-\boldsymbol{\varkappa})-2i\nu(\varkappa_0)\eta(\boldsymbol{\varkappa}_0-\boldsymbol{\varkappa})+\\ +2\nu(\varkappa_0)\int\nu(\boldsymbol{\varkappa}_1)\eta(\boldsymbol{\varkappa}_0-\boldsymbol{\varkappa}_1)\eta(\boldsymbol{\varkappa}_1-\boldsymbol{\varkappa})\,d\boldsymbol{\varkappa}_1+\ldots,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\eta(\mathbf{q})=(2\pi)^{-2}\int\exp(iq\mathbf{r})\eta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$, $\eta(\mathbf{q})=\eta(-\mathbf{q})^*$. Использование приближения Кирхгофа приводит к формуле

$$\tilde{S}_k(\varkappa_0, \varkappa) = -\frac{1}{4\pi^2\nu}\left(\nu + \varkappa\frac{\varkappa-\varkappa_0}{\nu+\nu_0}\right)\int \exp[i(\varkappa_0-\varkappa)r + i(\nu_0+\nu)\eta(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r};$$
$$\nu=\nu(\varkappa), \quad \nu_0=\nu(\varkappa_0). \tag{3}$$

Отметим предварительно некоторые общие соотношения, которым должна удовлетворять амплитуда рассеяния. Введем прежде всего величину $S(\varkappa_0, \varkappa) = (\nu/\nu_0)^{1/2}\tilde{S}(\varkappa_0, \varkappa)$, через которую поле в области $z < \min\eta(\mathbf{r})$ представляется в виде

$$\Psi = \exp(i\varkappa_0\mathbf{r} + i\nu_0 z) + \int (\nu_0/\nu(\varkappa))^{1/2} S(\varkappa_0, \varkappa)\exp(i\varkappa\mathbf{r} - i\nu(\varkappa)z)\,d\varkappa. \tag{4}$$

Для любых двух решений u и v однородного уравнения Гельмгольца для произвольной области Q имеет место формула Грина: $\int\limits_{\partial Q}(u\partial v/\partial\mathbf{n} - v\partial u/\partial\mathbf{n})\,d\mathbf{S} = 0$. Запишем это соотношение для области Q, заключенной между неровной поверхностью Σ и произвольной плоскостью $z=\mathrm{const}<\min\eta(r)$, и возьмем в качестве u и v функции Ψ_1 и Ψ_2^*, отвечающие равенству (4) при $\varkappa_0 = \varkappa_{1,2}$ соответственно. Интеграл по поверхности исчезает в силу граничного условия и в результате простых вычислений получаем

$$\int\limits_{|\varkappa'|<k} S(\varkappa_1, \varkappa')S^*(\varkappa_2, \varkappa')\,d\varkappa' = \begin{cases} \delta(\varkappa_1-\varkappa_2), & \text{если } |\varkappa_{1,2}|<k, & (5а)\\ -iS(\varkappa_1, \varkappa_2), & \text{если } |\varkappa_1|<k,\ |\varkappa_2|>k, & (5б)\\ iS^*(\varkappa_2, \varkappa_1) - iS(\varkappa_1, \varkappa_2), & \text{если } |\varkappa_{1,2}|>k & (5в)\end{cases}$$

Еще одно ограничение накладывает на функцию S теорема взаимности. Как можно убедиться, из симметрии функции Грина для рассматриваемой краевой задачи вытекает соотношение

$$S(\varkappa_0, \varkappa) = S(-\varkappa, -\varkappa_0). \tag{6}$$

Равенства (5а), (6) полностью аналогичны известным квантовомеханическим свойствам амплитуды рассеяния [3]. Применительно к данной задаче они были сформулированы в работах [4, 8]. Если рассматривать $S(\varkappa_1, \varkappa_2)$ (при $|\varkappa_{1,2}|<k$) как матрицу (оператор), где первый аргумент нумерует строки, а второй — столбцы, то соотношение (5а) есть, очевидно, условие унитарности для этого блока матрицы S. Как известно, каждая унитарная матрица может быть представлена в виде

$$\hat{S} = -\exp(i\hat{H}), \tag{7}$$

где $\hat{H}$ — некоторая эрмитова матрица (матричные величины будем отмечать крышками) [1]. Таким образом, если положить

$$-S(\varkappa_0, \varkappa) = \delta(\varkappa_0-\varkappa) + iH(\varkappa_0, \varkappa) + \frac{i^2}{2!}\int H(\varkappa_0, \varkappa_1)H(\varkappa_1, \varkappa)\,d\varkappa_1 +$$
$$+ \frac{i^3}{3!}\int H(\varkappa_0, \varkappa_1)H(\varkappa_1, \varkappa_2)H(\varkappa_2, \varkappa)\,d\varkappa_{1,2} + \ldots, \tag{8}$$

где $H(\varkappa_0, \varkappa) = H^*(\varkappa, \varkappa_0)$ и $H(\varkappa_0, \varkappa) = H(-\varkappa, -\varkappa_0)$ и интегрирование в (8) проводится по областям $|\varkappa_{1,2,..}|<k$, то соотношения (5а), (6) будут автоматически выполнены. Будем теперь искать в виде разложения по степеням малых отклонений свободной поверхности Σ не саму $\hat{S}$, а величину $\hat{H}$, т. е. логарифм $\hat{S}$-матрицы: $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \ldots$. Тогда, подставляя это разложение в (8) и сравнивая результат с формулой (2), в низшем порядке теории возмущений получаем

$$H_1(\varkappa_0, \varkappa) = 2(\nu(\varkappa_0)\nu(\varkappa))^{1/2}\eta(\varkappa_0-\varkappa). \tag{9}$$

[1] Возможность представления вида (7), для некоторой унитарной матрицы, которая может быть построена из S, отмечалась в [8]. Однако нам неизвестны работы, в которых это представление использовалось бы.

Очевидно, что матрица $\hat{H}_1$ — эрмитова и $H_1(\varkappa_0, \varkappa)=H_1(-\varkappa, -\varkappa_0)$. Если подставить выражение (9) в квадратичный член формулы (8), то получится в точности квадратичный член формулы (2), с той лишь разницей, что в (8) интегрирование идет по области $|\varkappa_1|<k$, а в (2) — по всем значениям $\varkappa_1$. Поэтому откажемся от ограничения $|\varkappa_0|<k$, $|\varkappa|<k$ и потребуем, чтобы при любых $\varkappa_0$, $\varkappa$ $\hat{S}$-матрица по-прежнему давалась соотношением (7), где $\hat{H}$ — некоторая (вообще говоря, не эрмитова) матрица. Тогда в представлении S по формуле (8) интегрирование уже будет происходить по всем значениям $\varkappa_{1,2}\ldots$. Матрица $\hat{H}_1$ при этом по-прежнему определяется (9) и в разложении величины $H(\varkappa_0, \varkappa)$ по степеням η квадратичный член обращается в нуль: $H_2(\varkappa_0, \varkappa)\equiv 0$. Однако теперь соотношение унитарности (5а) выполняется уже лишь приближенно.

Итак, суть предлагаемого способа расчета рассеяния звука на неровной поверхности заключается в том, чтобы искать S-матрицу в виде (7), где матрица $\hat{H}$ задается (в первом приближении) формулой (9). Далее имеются две возможности, либо рассматривать ограниченную область значений индексов, отвечающих учету только распространяющихся волн $|\varkappa_0|<k$, $|\varkappa|<k$, либо считать, что $\varkappa_0$, $\varkappa$ пробегают все вещественные значения.

Рассмотрим два простых примера. Если поверхность Σ является горизонтальной плоскостью, расположенной на уровне $z=h$, то $\eta(\mathbf{q})=h\delta(\mathbf{q})$ и матрица $\hat{H}_1$ будет диагональной: $H_1(\varkappa_0, \varkappa)=2\nu_0 h\delta(\varkappa_0-\varkappa)$. Поэтому из (7) следует $S(\varkappa_0, \varkappa)=-\exp(2i\nu_0 h)\delta(\varkappa_0-\varkappa)$, что в данном случае является точным результатом. Пусть теперь плоскость будет наклонена по отношению к горизонтали на угол α: $z=ax$, $a=\operatorname{tg}\alpha$. В этом случае $\eta(\mathbf{q})=-ia\delta'(q_x)\delta(q_y)$ (где δ — функция по поперечной координате y тривиальным образом переносится в конечную формулу для $\hat{S}$-матрицы, и далее ее опускаем, рассматривая тем самым двумерную ситуацию). Если формально применить в данном случае метод малых возмущений для $\hat{S}$, то в низшем порядке $\hat{S}(\varkappa_0, \varkappa)=-\delta(\varkappa_0-\varkappa)-2ia\nu(\varkappa_0)\delta'(\varkappa_0-\varkappa)$, и, подставляя результат в формулу (2), получаем в выражении для поля секулярные члены, что физически бессмысленно. Выясним, что дает в этом случае формула (7). Найдем собственные значения и собственные функции оператора $iH_1(\varkappa_0, \varkappa)=2a(\nu(\varkappa_0)\nu(\varkappa))^{1/2}\delta'(\varkappa_0-\varkappa)$. Нетрудно видеть, что это будут $\lambda=2iat$ и $\varphi_\lambda(\varkappa)=k^{-1-t}(k^2-t^2)^{1/2}(i\varkappa+\sqrt{k^2-\varkappa^2})^t=\cos^{-1/2}\theta\exp(it\theta)$, где t — некоторый параметр и θ — угол падения: $\cos\theta=\nu(\varkappa)/k$. Действительно: $i\hat{H}_1\varphi_\lambda=2a\nu^{1/2}(\varkappa_0)\dfrac{d}{d\varkappa}(\nu^{1/2}(\varkappa)\varphi_\lambda(\varkappa))=\lambda\varphi_\lambda$. Чтобы найти $S(\varkappa, \varkappa_0)$, нужно подействовать оператором $\hat{S}$ на $\delta(\varkappa-\varkappa_0)$. Проделаем это, для чего разложим $\delta(\varkappa_0-\varkappa)$ по собственным функциям φ_λ. Имеем

$$\delta(\varkappa-\varkappa_0)=\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{k\cos\theta_0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-it\theta_0)}{2\pi k\cos^{1/2}\theta_0}\cos^{-1/2}\theta\exp(it\theta)\,dt$$

и, пользуясь (7), легко находим

$$S(\varkappa, \varkappa_0)=\hat{S}\delta(\varkappa-\varkappa_0)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-it\theta_0)}{2\pi k\cos^{1/2}\theta_0}\exp(2iat)\cos^{-1/2}\theta\times$$

$$\times\exp(it\theta)\,dt=-(\nu(\theta_0)\nu(\theta))^{-1/2}\delta(\theta-\theta_0+2a).$$

Меняя местами аргументы $\varkappa_0$ и $\varkappa$, находим $S(\varkappa_0, \varkappa)$, и далее по формуле (4) получаем

$$\Psi_{\text{расс}}=\int(\nu_0/\nu)^{1/2}S(\varkappa_0, \varkappa)\exp(i\varkappa x-i\nu(\varkappa)z)\,d\varkappa=$$

$$=\int[\nu(\theta_0)\nu(\theta)]^{1/2}S(\theta_0, \theta)\exp[ik(\sin\theta x-\cos\theta z)]\,d\theta,$$

и в данном случае

$$\Psi_{\text{расс}}=-\exp[ik(\sin\theta_* x-\cos\theta_* z)], \tag{10}$$

где $\theta_* = \theta_0 + 2a = \theta_0 + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \theta_0 + 2\alpha + 2/3\alpha^3 + \ldots$. Точным решением является, разумеется, выражение (10) при $\theta_* = \theta_0 + 2\alpha$. Таким образом, в данном случае предлагаемый способ дает выражение для отраженного поля в виде плоской волны с правильной амплитудой и направлением, отличающимся от зеркального на величину $2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2\alpha = {}^2/_3\alpha^3 + \ldots$. Таким образом, для применимости данного способа расчета рассеяния звука на крупномасштабной поверхности во всяком случае требуется малость ее наклонов; $\alpha^3/3 \ll \alpha$.

Предположим теперь, что поверхность является, кроме того, плавной, так что ее спектр $\eta(\boldsymbol{\varkappa}_0 - \boldsymbol{\varkappa})$ сосредоточен в области $\boldsymbol{\varkappa}_0 \simeq \boldsymbol{\varkappa}$. В этом случае при интегрированиях в формуле (8) величины $\nu(\varkappa_i)$ можно приближенно считать постоянными $\nu(\varkappa_i) \simeq \bar{\nu} = \mathrm{const}$ и, используя теорему о свертке, получаем

$$S(\boldsymbol{\varkappa}_0, \boldsymbol{\varkappa}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \exp[i(\boldsymbol{\varkappa}_0 - \boldsymbol{\varkappa})\mathbf{r} + 2i\bar{\nu}\eta(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Выражение (11) совпадает с (3) для зеркального направления: $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\varkappa}_0$, $\bar{\nu} = \nu = \nu_0$. Для произвольного направления положим $\bar{\nu} = (\nu + \nu_0)/2$ и тогда отличие этих двух формул будет заключаться в множителе перед интегралом; если $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0)/\nu(\nu + \nu_0) = \mathrm{tg}\,\theta \cdot \mathrm{tg}[(\theta - \theta_0)/2] \ll 1$, где θ_0 и θ — углы падения и рассеяния, то это различие оказывается несущественным.

Рассмотрим теперь случай периодической поверхности; положим $\eta(r) = \Sigma A_n \exp(inpx)$, где $A_n = A^*_{-n}$ и $p = \mathrm{const}$. В данном случае рассеяние осуществляется лишь в дискретных направлениях (дифракционные спектры). Рассмотрим далее плоский случай и выпишем конечные формулы для амплитуды рассеяния, ограничиваясь тем простым вариантом предлагаемого способа, в котором не учитываются неоднородные волны (при этом приходится иметь дело лишь с конечномерными матрицами). Итак, поле при $z < \min \eta(r)$ представляется в виде

$$\Psi = \exp(i\varkappa_0 x + i\nu_0 z) + \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{S}_n \exp(i\varkappa_n x - i\nu_n z),$$

где $\varkappa_n = \varkappa_0 + np$, $\nu_n = \sqrt{k^2 - \varkappa_n^2}$, $N_1 = [(k + \varkappa_0)/p]$, $N_2 = [(k - \varkappa_0)/p]$. Положим, что $\hat{\nu}^{1/2} = \mathrm{diag}(\nu_{-N_1}^{1/2}, \ldots, \nu_{N_2}^{1/2})$ — диагональная вещественная матрица размерности $N_1 + N_2 + 1$ и

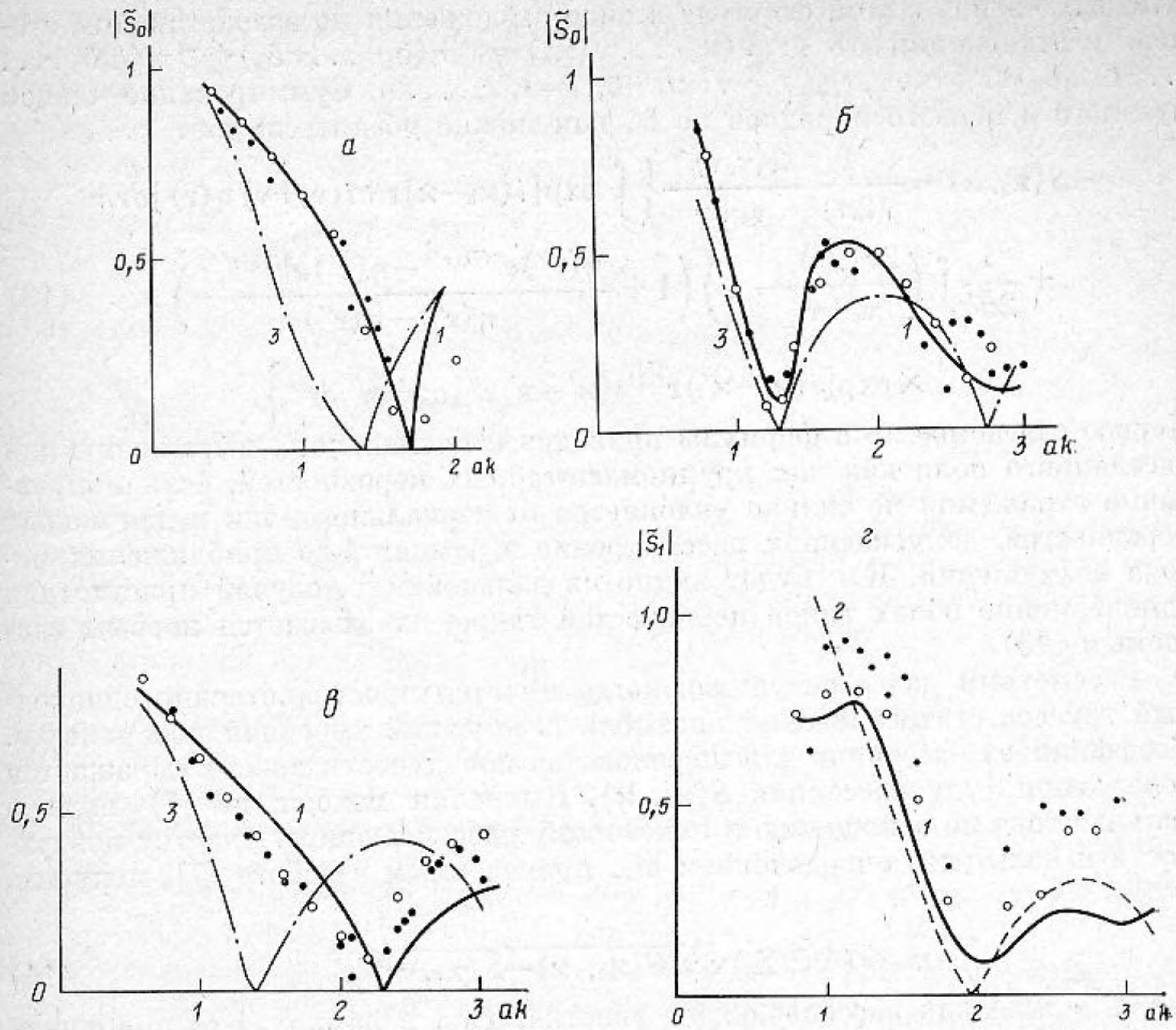
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_0 A_1 \ldots A_{N_1+N_2} \\ A_{-1} A_0 A_1 \ldots \\ \ldots \\ A_{-N_1-N_2} \ldots A_{-1} A_0 \end{pmatrix}$$

— эрмитова матрица, составленная из коэффициентов Фурье поверхности. Тогда $\hat{S}$-матрица дается формулой $\hat{S} = -\exp(i\hat{H})$, где $\hat{H} = 2\hat{\nu}^{1/2}\hat{A}\hat{\nu}^{1/2}$ — эрмитова матрица, строки и столбцы которой занумеруем числами $(-N_1, \ldots, 0, \ldots N_2)$. В частности, коэффициенты $\tilde{S}_n$ определяются нулевой строкой $\hat{S}$-матрицы: $\tilde{S}_n = (\nu_0/\nu_n)^{1/2} S_{0n}$. Матрицу $\hat{S}$ в общем случае удобнее всего вычислить в диагональном представлении $\hat{H}$: $\hat{H} = \hat{T}\,\mathrm{diag}(h_{-N_1}, \ldots, h_{N_2})\,\hat{T}^+$, где $\hat{T}$ — унитарная матрица, составленная из нормированных собственных векторов матрицы $\hat{H}$, и h_i — соответствующие собственные значения. Тогда

$$-\hat{S} = \exp(i\hat{H}) = \hat{T}\,\mathrm{diag}\,(\exp(ih_{-N_1}), \ldots, \exp(ih_{N_2}))\,\hat{T}^+. \tag{12}$$

Учет неоднородных волн сводится к расширению матриц за граничные значения индексов $-N_1$, N_2; при этом матрица $\hat{\nu}^{1/2}$ и соответственно $\hat{H}$ перестают быть эрмитовыми.

В литературе имеется ряд работ, посвященных исследованию рассеяния на синусоидальной поверхности $\eta = a\cos px$. В этом случае оказываются отличными от нуля лишь коэффициенты $A_1 = A_{-1} = a/2$. Найти спектр



Амплитуды дифракционных спектров при рассеянии плоской волны на синусоидальной поверхности как функции параметра ak. Угол падения плоской волны θ и наклон свободной поверхности ap имеют следующие значения: *а* – $\theta=40°$, $ap=0{,}46$, *б* – $\theta=0$, $ap=0{,}75$, *в* – $\theta=40°$, $ap=0{,}75$, *г* – $\theta=0$, $ap=0{,}75$

матрицы $\hat{H}$ аналитически не удалось, собственные значения h_i и матрица $\hat{S}$ по формуле (12) рассчитывались с помощью ЭВМ. Результаты представлены на фигуре, где они кружками нанесены на графики, взятые из работы [5]. На этих графиках величины $|\tilde{S}_n|$ для различных n представлены как функции от параметра ak при различных значениях угла падения θ и параметра ap. Кривые *1* отвечают точному решению, полученному Уретским с помощью достаточно сложного численного расчета, *2* и *3* соответствуют приближенным методам Кирхгофа и Рэлея. Точками нанесены экспериментальные данные, полученные в работе [6] (выбраны те графики, где приближенные и точное решения достаточно сильно отличаются друг от друга). Можно видеть, что предлагаемый метод дает результаты, неплохо согласующиеся с точным решением и экспериментальными данными.

Рассмотрим теперь некоторое простое приближение, которое можно сделать при вычислениях по формуле (8), и которое позволяет учесть процессы, существенные для рассеяния как на крупномасштабных, так и на мелкомасштабных компонентах поверхности, ответственных за рассеяние в зеркальном и соответственно незеркальном направлениях. Имеем следующее приближенное выражение для амплитуды рассеяния (см. (8), (9)): $-S(\varkappa_0, \varkappa)=\delta(\varkappa_0-\varkappa)+i2(\nu_0\nu)^{1/2}\eta(\varkappa_0-\varkappa)+(i^2/2!)2(\nu_0\nu)^{1/2}\int\eta(\varkappa_0-\varkappa_1)\times 2\nu(\varkappa_1)\eta(\varkappa_1-\varkappa)d\varkappa_1+\dots$ Как видели, для получения результатов, соответствующих 1-му приближению метода Рэлея, требуется удержание в этой формуле лишь первых двух членов, тогда как для крупномасштабных компонент существенно удержать все слагаемые, однако для них можно приближенно считать $\nu(\varkappa_i)=\bar{\nu}$ (крупномасштабные компоненты считаются имеющими малый наклон). Поэтому представим ядра интегральных членов в этой формуле в виде разложения по возрастающим степеням отклонений от $\bar{\nu}$: $\nu(\varkappa_1)\ldots\nu(\varkappa_n)=\bar{\nu}^n+(\delta_1+\ldots+\delta_n)\bar{\nu}^{n-1}+(\delta_1\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}\delta_n)\bar{\nu}^{n-2}+\ldots$, где $\delta_i=\nu(\varkappa_i)-\bar{\nu}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Суммирование членов нулевого и первого порядков по δ_i, как можно убедиться, дает

$$-S(\varkappa_0,\varkappa)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{2(\nu_0\nu)^{1/2}}{\nu_0+\nu}\left\{\int\exp[i(\varkappa_0-\varkappa)\mathbf{r}+i(\nu_0+\nu)\eta(\mathbf{r})]d\mathbf{r}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\left(\frac{2\nu(\varkappa')}{\nu_0+\nu}-1\right)\left(1+\frac{\eta(\mathbf{r}'')e^{2i\bar{\nu}\eta(\mathbf{r}')}-\eta(\mathbf{r}')e^{2i\bar{\nu}\eta(\mathbf{r}'')}}{\eta(\mathbf{r}')-\eta(\mathbf{r}'')}\right)\times \tag{13}$$

$$\left.\times\exp[i(\varkappa_0-\varkappa')\mathbf{r}'+i(\varkappa'-\varkappa)\mathbf{r}'']d\varkappa'\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}''\right\}.$$

Первое слагаемое этой формулы приводит к правильному выражению для рассеянного поля как для крупномасштабных неровностей, если направление отражения не сильно уклоняется от зеркального, так и для малых неровностей, допускающих рассмотрение в рамках 1-го приближения метода возмущений. Как будет видно из дальнейшего, случай присутствия одновременно обоих типов неровностей также охватывается первым слагаемым (13).

Рассмотрим далее ситуацию, когда имеется пространственно однородный гауссов статистический ансамбль реализаций неровной поверхности. Коэффициент рассеяния для шероховатой поверхности просто выражается через амплитуду рассеяния $S(\varkappa_0, \varkappa)$. Вычисляя исходя из (7) поле в дальней зоне по отношению к некоторому рассеивающему участку поверхности и пользуясь определением m_s, приведенным в работе [7], получим, что

$$m_S=(4\pi^2/\Sigma_0)\nu_0\nu\overline{|S(\varkappa_0,\varkappa)-\bar{S}(\varkappa_0,\varkappa)|}, \tag{14}$$

где Σ_0 — площадь рассеивающего участка. Так, в рамках 1-го приближения метода малых возмущений $S(\varkappa_0,\varkappa)-\bar{S}(\varkappa_0,\varkappa)=-2i(\nu_0\nu)^{1/2}\eta(\varkappa_0-\varkappa)$. Поскольку $\overline{\eta(\mathbf{k}_1)\eta^*(\mathbf{k}_2)}=G(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$, где $G(\mathbf{k})$ — спектр неровностей, то $m_S=4\nu^2\nu_0^2G(\varkappa_0-\varkappa)$ — известный результат [7] (мы воспользуемся здесь формальным соотношением $\delta(0)=\Sigma_0/(2\pi)^2$, которое следует из представления $\delta(\varkappa)=\dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int\exp(i\varkappa\mathbf{r})d\mathbf{r}$).

В общем случае, как легко видеть, можно записать $S(\varkappa_0,\varkappa)=\bar{V}(\varkappa)\delta(\varkappa_0-\varkappa)+\Delta S(\varkappa_0,\varkappa)$, где ΔS — флуктуационная часть амплитуды рассеяния с нулевым средним и $\bar{V}$ — средний коэффициент отражения. Если подставить это соотношение в (5а) и усреднить, то получим

$$\int\overline{\Delta S(\varkappa_0,\varkappa')\Delta S^*(\varkappa,\varkappa')}d\varkappa'=0,\qquad \varkappa_0\neq\varkappa,$$

$$|\bar{V}(\varkappa)|^2+(4\pi^2/\Sigma_0)\int\overline{|\Delta S(\varkappa,\varkappa')|^2}d\varkappa'=1.$$

Последнее равенство, выражающее закон сохранения энергии, есть форма записи оптической теоремы.

Подставляя в (14) первое слагаемое формулы (13), получаем

$$m_S=\frac{4\nu_0^2\nu^2}{4\pi^2(\nu_0+\nu)^2}e^{-(\nu_0+\nu)^2W(0)}\int e^{i(\varkappa_0-\varkappa)\mathbf{r}}(e^{(\nu_0+\nu)^2W(\mathbf{r})}-1)\,d\mathbf{r}. \tag{15}$$

Здесь $W(\mathbf{r})=\overline{\eta(\boldsymbol{\rho})\eta(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})}$ — корреляционная функция возвышений. Данное выражение дает для малых $W(\mathbf{r})$: $m_S=4\nu_0^2\nu^2G(\varkappa_0-\varkappa)$; от известной формулы для m_S, получаемой в приближении Кирхгофа [7], (15) отличается множителем

$$\{1+[(\varkappa-\varkappa_0)^2+(\nu-\nu_0)^2]/4\nu\nu_0\}^2=\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\Big/\cos^2\theta_0,$$

где θ_0 и θ — углы падения и рассеяния. В случае, когда наклоны поверхности невелики, рассеяние в зеркальном направлении сосредоточено в узком конусе углов при $\theta \simeq \theta_0$; при этом данный множитель обращается в единицу и его наличие не является существенным.

Если спектр колебаний поверхности достаточно широк, то для вычисления m_s по формуле (15) можно при некоторых условиях применить схему вычислений, соответствующую двухмасштабной модели. Именно представим $W(r)$ в виде суммы $W = W_1 + W_2$, где $W_1(\mathbf{r}) = \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_*} G(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}r)\, d\mathbf{k}$ и $W_2(\mathbf{r}) = \int\limits_{|\mathbf{k}|>k_*} G(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k}$ и k_* – некоторый параметр, выбранный так, чтобы выполнялось условие $(\nu+\nu_0)^2 W_2(0) = (\nu+\nu_0)^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|>k_*} G(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \ll 1$ и высокочастотные компоненты волнения можно было бы учесть по теории возмущений. Тогда $\exp[(\nu+\nu_0)^2 W(\mathbf{r})] \simeq \exp[(\nu+\nu_0)^2 W_1(\mathbf{r})](1+(\nu+\nu_0)^2 W_2(\mathbf{r}))$. Если разложить $W_1(\mathbf{r})$ в показателе экспоненты в ряд по $\mathbf{r}$ и ограничиться первыми двумя членами разложения (что должно быть справедливо для звука достаточно высокой частоты), то получим

$$m_s = \frac{4\nu_0^2\nu^2}{(\nu_0+\nu)^4} P\left(\frac{\Delta\varkappa}{\nu+\nu_0}\right) + \frac{4\nu_0^2\nu^2}{(\nu_0+\nu)^2} \int\limits_{|\varkappa'|>k_*} P\left(\frac{\Delta\varkappa-\varkappa'}{\nu+\nu_0}\right) G(\varkappa')\, d\varkappa',$$

где $\Delta\varkappa = \varkappa - \varkappa_0$ и $P(\mathbf{a}) = \exp(-a_x^2/2\delta_x^2 - a_y^2/2\delta_y^2)/2\pi\delta_x\delta_y$ – плотность вероятности наклонов крупномасштабной поверхности; $\delta_{x,y}^2 = \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_*} G(\mathbf{k})\, k_{x,y}^2\, d\mathbf{k}$ – среднеквадратичные наклоны. Нетрудно видеть, что второе слагаемое данного выражения совпадает с вкладом в коэффициент рассеяния m_s в двухмасштабной модели мелкомасштабной компоненты [7], если учесть малость наклонов у крупномасштабной поверхности, что для реального океана всегда выполняется с высокой точностью ($|\nabla\eta| < 0{,}1$).

Важно отметить, что двухмасштабная модель использовалась выше лишь на этапе вычисления интеграла (15) и принципиально параметр разделения масштабов в данном рассмотрении не участвует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. Акустика океана. Ч. 4, гл. 2 / Под ред. Бреховских Л. М. М.: Наука, 1974.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика, нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974, с. 583.
4. *Uretsky J.* The scattering of plane waves from periodic surfaces.– Ann. Physics, 1965, v. 33, № 3, p. 400–427.
5. *Uretsky J.* Reflection of plane sound wave trom a sinusoidal surface.– J. Acoust. Soc. Amer., 1963, v. 35, № 8, p. 1293–1294.
6. *LaCasce E., Jr., Tamarkin P.* Underwater sound reflection from a corrugated surface.– J. Appl. Phys., 1956, v. 27, p. 138–148.
7. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Гл. 9. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
8. *Waterman P. C.* Scattering by periodic surfaces.– J. Acoust. Soc. Amer., 1975, v. 57, p. 791–802.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11.V.1983