

УДК 534.29

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО МАЛОЙ СФЕРЫ

Данилов С. Д.

Получены выражения для эйлеровых и лагранжевых скоростей акустического течения около неподвижной сферы, радиус которой мал по сравнению с глубиной проникновения вязкой волны.

Как известно, вокруг препятствия, помещенного в жидкость, осциллирующую относительно него со скоростью  $v_0 = u_0 \exp(-i\omega\tau)$ , возникают стационарные вихревые потоки — акустические течения. Рассмотрение этого явления в литературе проводится в квадратичном приближении (см., например, работы [1—7]). В этом приближении нелинейный член  $\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  в уравнении Навье — Стокса

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial \tau + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{v} = -\rho (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} \tag{1}$$

предполагается настолько малым, что им можно пренебречь при расчете переменной части поля скоростей. Усредненная по периоду правая часть уравнения (1) рассматривается как сторонняя сила, возбуждающая акустические течения.

В настоящей работе на основе подхода, предложенного в [1], рассмотрены акустические течения около сферы в несжимаемой жидкости в случае  $a \ll \delta$ , где  $\delta = (2\eta/\rho\omega)^{1/2}$  — глубина проникновения вязкой волны,  $a$  — радиус сферы. Этот случай представляет практический интерес для ряда задач, в частности, для проблемы коагуляции аэрозолей.

Следуя работе [1], представим поле скоростей в виде

$$\mathbf{v} = -\text{rot } \Psi, \tag{2}$$

где  $\Psi$  — векторный потенциал. В силу осевой симметрии задачи  $\Psi = \Psi \mathbf{l}_\varphi$ ,  $\mathbf{l}_\varphi$  — единичный орт по оси  $\varphi$  сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$ , поэтому

$$v_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi), \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi). \tag{3}$$

Подставляя формулу (2) в уравнение (1) и взяв rot от обеих его частей, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 (\Psi \sin \varphi) - \nu \nabla^4 (\Psi \sin \varphi) = -(\mathbf{v}\nabla) \nabla^2 (\Psi \sin \varphi) + \\ + \left( \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \text{ctg } \theta \right) \nabla^2 (\Psi \sin \varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

Решая это уравнение в квадратичном приближении и проводя усреднение по периоду колебаний, можно получить следующее выражение для поля акустического течения:

$$\bar{\Psi} = f(x) \sin 2\theta; \quad x = r/a, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f(x)/a^4 = x^4 \left[ \frac{1}{70} \int_1^x \frac{1}{t} \sigma(t) dt + C_1 \right] + x^2 \left[ -\frac{1}{30} \int_1^x t \sigma(t) dt + C_2 \right] + \\ + \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{30} \int_1^x t^4 \sigma(t) dt + C_3 \right] + \frac{1}{x^3} \left[ -\frac{1}{70} \int_1^x t^6 \sigma(t) dt + C_4 \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\sigma(t)$  — взятый с обратным знаком и деленный на коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  радиальный множитель правой части уравнения (4):

$$\sigma(t) = \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \left\{ \exp[z(1-t)] \cos(z(1-t)) \left[ \frac{1}{zt^2} + \frac{1}{z^2t^3} + \frac{1}{z^2t^4} + \frac{3}{2z^3t^5} + \frac{1}{zt^4} - \frac{1}{zt^5} - \frac{3}{2z^3t^6} - \frac{1}{z^2t^6} \right] + \exp[z(1-t)] \sin(z(1-t)) \left[ -\frac{2}{3t} - \frac{1}{zt^2} + \frac{1}{zt^4} + \frac{2}{3t^4} + \frac{3}{2z^3t^5} + \frac{3}{z^2t^5} + \frac{3}{2z^4t^6} + \frac{3}{2z^3t^6} \right] + \exp[2z(1-t)] \left[ -\frac{1}{z^2t^4} - \frac{1}{zt^3} \right] \right\}, \quad (7)$$

где  $z = a/\delta$ ,  $x^4 \sin 2\theta$ ,  $x^2 \sin 2\theta$ ,  $x^{-1} \sin 2\theta$ ,  $x^{-3} \sin 2\theta$  — линейно независимые решения уравнения  $\nabla^4(\Psi \sin \varphi) = 0$ , а  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — константы интегрирования. Значения  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия на бесконечности:  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ; значения  $C_3$  и  $C_4$  выбираются из условий на поверхности сферы:  $f(1) = f'(1) = 0$ . Эти константы оказываются равными:

$$C_1 = -\frac{1}{70} \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{t} dt; \quad C_2 = \frac{1}{30} \int_1^\infty t \sigma(t) dt; \quad (8)$$

$$C_3 = -\frac{7}{2} C_1 - \frac{5}{2} C_2; \quad C_4 = \frac{5}{2} C_1 + \frac{3}{2} C_2.$$

Укажем здесь, что в работе [1] при получении формулы, аналогичной (4), допущена ошибка — пропущено второе слагаемое в правой части. Поэтому выражение для  $\sigma(t)$ , приведенное в этой работе, является неправильным.

Отметим, что квадратичное приближение, использованное при получении выражений (5), (6), справедливо тогда, когда переменная компонента поля скорости с достаточной точностью удовлетворяет линеаризованному уравнению (4). Решение  $\Psi_0$  линеаризованного уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям на сфере и условию излучения, имеет вид

$$\Psi_0 = \frac{u_0 \sin \theta}{4} \left[ \frac{3h_1(\kappa r)}{\kappa h_0(\kappa a)} - r - \frac{a^3 h_2(\kappa a)}{r^2 h_0(\kappa a)} \right] \exp(-i\omega\tau) + \text{к. с.},$$

где  $\kappa = (1+i)/\delta$ . Оценивая по этому решению слагаемые  $\rho \partial \mathbf{v} / \partial \tau$ ,  $\eta \Delta \mathbf{v}$ ,  $\rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  в уравнении Навье — Стокса, нетрудно показать, что в случае  $a \ll \delta$  нелинейное слагаемое мало по сравнению с  $\rho \partial \mathbf{v} / \partial \tau$  или  $\eta \Delta \mathbf{v}$  при условии  $u_0/\omega\delta \ll 1$ . В соответствии с этим условием смещение сферы относительно колеблющейся среды должно быть мало по сравнению с  $\delta$ . В другом предельном случае  $a \gg \delta$  (ниже не рассматриваемом) линеаризация возможна при выполнении условия  $u_0/\omega a \ll 1$ .

Анализ поля течения начнем с определения констант  $C_1, C_2, C_3, C_4$  по формулам (8). Для этой цели заметим, что и  $C_1$  и неинтегрируемая в элементарных функциях часть  $C_2$  являются линейными комбинациями

интегральных показательных функций  $E_n(\alpha) = \int_1^\infty e^{-\alpha t} dt/t^n$ , где  $\alpha = 2z$ ,  $z(1+i)$ ;  $z(1-i)$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ , причем в силу неравенства  $z \ll 1$  модуль аргумента этих функций мал. Для интегральных показательных функций существует представление в виде сходящегося ряда [8]

$$E_n(\alpha) = \frac{(-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} [-\ln \alpha + \xi(n)] - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n-1}}^\infty \frac{(-\alpha)^m}{(m-n+1)m!} \quad (|\arg \alpha| < \pi); \quad (9)$$

$\xi(1) = -c$ , где  $c$  — постоянная Эйлера;  $\xi(n) = -c + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$  ( $n > 1$ ). Ограни-

чиваясь в этом представлении лишь несколькими первыми членами (в силу быстрой сходимости ряда при малых по модулю значениях аргумента), получим следующие выражения для  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \frac{1}{1680} \left( -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \dots \right); & C_2 &= \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \frac{1}{80} \left( \frac{1}{z^2} + \frac{2}{9z} + \dots \right); \\ C_3 &= \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \frac{7}{240} \left( -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{21z} + \dots \right); \\ C_4 &= \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \frac{29}{1680} \left( \frac{1}{z^2} + \frac{2}{29z} + \dots \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение для  $f(x)$  можно существенно упростить в предельных случаях малых ( $r \ll \delta$ ) и больших ( $r \gg \delta$ ) расстояний от сферы. Начнем со случая  $r \ll \delta$ . Разлагая экспоненту, синус и косинус в выражении для  $\sigma(t)$  (7) в ряд по степеням аргумента и ограничиваясь в полученном выражении лишь главными членами, получим после несложных, но громоздких вычислений

$$\sigma(t) = \frac{9\omega u_0^2}{16\nu^2} \left[ \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{3}{2t^4} + \frac{1}{2t^6} \right) + \frac{2}{z} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{3}{2t^4} + \frac{1}{2t^6} \right) + \dots \right]. \quad (11)$$

Такое представление справедливо вплоть до  $t \sim 1/2z$ . Подставляя формулу (11) в выражение для  $f(x)$  (6) и проводя интегрирование, с точностью до главного по степеням  $1/z$  члена можно получить

$$f(x) = \frac{9\omega u_0^2 a^4}{16\nu^2} \left[ \frac{1}{96z^2} \left( -\frac{2}{x^2} - 6 + 4x + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x} \right) \right]. \quad (12)$$

Наибольшее из слагаемых следующей степени по  $1/z$ , отброшенных при получении формулы (12), имеет вид  $\Delta f(x) = (x^2/45z) 9\omega u_0^2 a^4/16\nu^2$ . Поэтому выражением (12) для радиального множителя векторного потенциала можно пользоваться при выполнении условия  $x \ll 1/z$  или  $r \ll \delta$ , означающего малость расстояния от центра сферы по сравнению с глубиной проникновения вязкой волны. В этой области выражение (11), использованное нами, справедливо. Подставляя значение  $\Psi$ , вычисленное с учетом формулы (12), в соотношения (3), найдем следующие выражения для радиальной  $\bar{v}_r$  и касательной  $\bar{v}_\theta$  компонент скорости акустического течения:

$$\bar{v}_r = -\frac{3}{64} u_0 \frac{u_0 a}{\nu} \left( -\frac{a^3}{r^3} - 3 \frac{a}{r} + 2 + \frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (13)$$

$$\bar{v}_\theta = \frac{3}{128} u_0 \frac{u_0 a}{\nu} \left( \frac{a^3}{r^3} - 3 \frac{a}{r} + 4 - 2 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \quad (14)$$

Согласно этим формулам, акустическое течение направлено к сфере вдоль оси осцилляций жидкости и от сферы в перпендикулярном направлении. Отметим, что, как следует из формул (13), (14), при  $r \gg a$ , но  $r \ll \delta$  скорость акустического течения не зависит от расстояния до сферы и равна:

$$\bar{v}_r = -\frac{3}{32} u_0 \frac{u_0 a}{\nu} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad \bar{v}_\theta = \frac{3}{32} u_0 \frac{u_0 a}{\nu} \sin 2\theta.$$

Рассмотрим теперь поле скоростей акустического течения вдали от сферы. При  $r \gg \delta$  подынтегральное выражение в формуле (6) экспоненциально спадает и верхний предел в интегралах можно считать бесконечным. Тогда все интегралы можно вычислить с любой степенью точности, воспользовавшись там, где это необходимо, представлением для интегральных экспонент (9). Первые два слагаемых в выражении (6) при  $r \gg$

$\gg \delta$  дают в силу условия на бесконечности нулевой вклад в  $f(x)$ . Проводя вычисления остальных интегралов, найдем

$$\int_1^{\infty} t^4 \sigma(t) dt = \left( \frac{3}{4z^3} + \frac{1}{2z^2} + \dots \right) \frac{9\omega u_0^2}{16v^2},$$

$$\int_1^{\infty} t^6 \sigma(t) dt = \left( -\frac{35}{2z^6} - \frac{161}{8z^5} + \dots \right) \frac{9\omega u_0^2}{16v^2}. \quad (15)$$

С учетом формулы (15) выражение для  $f(x)$  при  $r \gg \delta$  запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{9\omega u_0^2 a^4}{16v^2} \left[ \frac{1}{x} \left( \frac{1}{40z^3} - \frac{1}{80z^2} \right) + \frac{1}{x^3} \left( \frac{1}{4z^6} + \frac{23}{80z^5} \right) \right]. \quad (16)$$

Подставляя значение  $\bar{\Psi}$ , вычисленное в соответствии с формулой (16), в формулу (3), для радиальной и касательной составляющих скорости акустического течения при  $r \gg \delta$  будем иметь

$$\bar{v}_r = -\frac{9}{4} u_0 \frac{u_0 a}{v} \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{40z} - \frac{1}{80} \right) + \frac{a^4}{r^4} \left( \frac{1}{4z^4} + \frac{23}{80z^3} \right) \right] (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (17)$$

$$\bar{v}_\theta = -\frac{9}{4} u_0 \frac{u_0 a}{v} \frac{a^4}{r^4} \left( \frac{1}{4z^4} + \frac{23}{80z^3} \right) \sin 2\theta. \quad (18)$$

Согласно формуле (17), величина  $\bar{v}_r$  в области  $r \gg \delta$  ведет себя как сумма двух слагаемых, из которых первое слагаемое убывает как  $r^{-2}$ , а второе — как  $r^{-4}$ . Начиная со значений  $r$ , удовлетворяющих неравенству  $r \gg \gg \delta (10/z)^{1/2}$ , второе слагаемое вносит малый по сравнению с первым слагаемым вклад в  $\bar{v}_r$ . Наоборот, для  $r$ , подчиняющихся неравенству  $r \ll \delta (10/z)^{1/2}$ , в выражении для  $\bar{v}_r$  можно ограничиться только вторым членом. Это, однако, удастся сделать только для случая очень больших отношений  $1/z (1/z \gg 10)$ , поскольку одновременно с требованием  $r \ll \delta (10/z)^{1/2}$  необходимо удовлетворить требованию  $r \gg \delta$  — условию, при котором получено выражение (17). Отметим также разный характер убывания на бесконечности радиальной и касательной составляющих скорости акустического течения. Так,  $\bar{v}_r$  убывает как  $r^{-2}$ , а  $\bar{v}_\theta$  — как  $r^{-4}$ , т. е. значительно быстрее. Примерное проведение поля скоростей акустического течения в областях  $r \ll \delta$  и  $r \gg \delta$  представлено на фиг. 1. Зависимости даны для случая  $1/z = 100$ .

Поле скоростей, определенное выше, есть поле эйлеровых скоростей. Частицы жидкости движутся не с эйлеровыми, а с лагранжевыми скоростями (см., например, работы [5, 7]). Отличие между этими скоростями обусловлено тем, что выделенная частица жидкости, осциллируя, в разные моменты времени находится в разных точках пространства. Эйлерова  $\bar{v}$  и лагранжева  $\bar{v}_L$  скорости связаны между собой скоростью перехода  $\bar{v}_T$ ,

$$\bar{v}_L = \bar{v} + \bar{v}_T, \text{ которая равна [1, 4]: } \bar{v}_T = \left( \int \bar{v} d\tau \nabla \right) \bar{v} = -\text{rot } \Psi_T \mathbf{1}_\varphi = \text{rot} \left( -\frac{1}{2} \bar{v} \times \right.$$

$$\left. \times \int \bar{v} d\tau \right). \text{ Для } \Psi_T \text{ в работе [1] получено следующее выражение: } \Psi_T =$$

$= f_T(x) \sin 2\theta$ , где радиальный множитель  $f_T(x)$  равен:

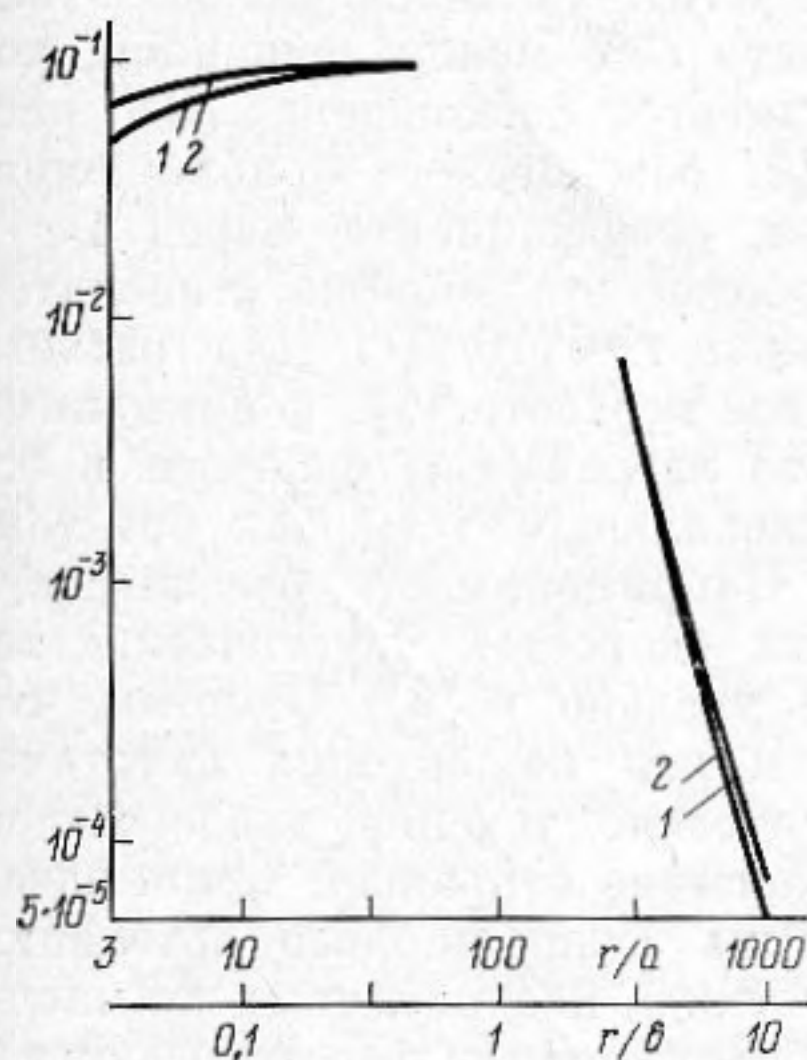
$$f_T(x) = \frac{9u_0^2}{16\omega} \left\{ \exp[z(1-x)] \left[ \cos(z(1-x)) \left( \frac{1}{zx^2} + \frac{1}{x^3z^2} + \frac{1}{z^2x^4} + \frac{1}{zx^4} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin(z(1-x)) \left( -\frac{2}{3x} - \frac{1}{zx^2} + \frac{1}{zx^4} + \frac{2}{3x^4} \right) + \right. \right.$$

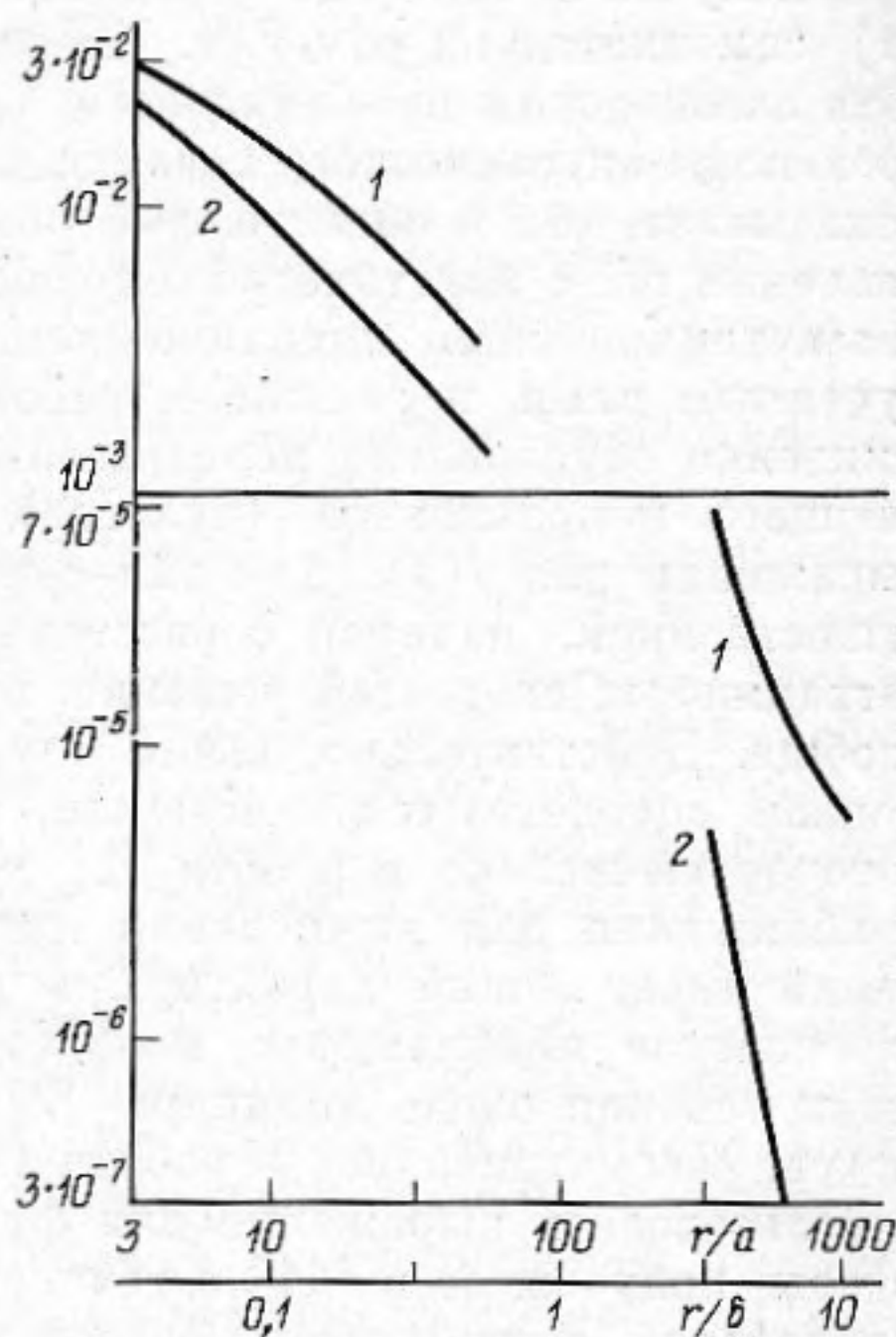
$$\left. \left. + \exp[z(1-x)] \left( -\frac{1}{z^2x^4} - \frac{1}{zx^3} \right) \right] - \frac{1}{zx^3} - \frac{1}{z^2x^3} \right\}. \quad (19)$$

В силу одинаковой угловой зависимости  $\bar{\Psi}$  и  $\Psi_T$  поле лагранжевых скоростей характеризуется векторным потенциалом с радиальным множителем  $f_L(x) = f(x) + f_T(x)$ . При малых значениях аргумента выражение (19) для  $f_T(x)$  можно упростить, разлагая в ряд Тейлора экспоненту и косинус с точностью до четырех первых членов по степеням аргумента, а синус — с точностью до трех первых членов. В результате для  $r \ll \delta$  получим

$$f_T(x) = \frac{9\omega u_0^2 a^4}{16v^2} \left[ \frac{1}{96z^2} \left( -4x + 12 - \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) \right]. \quad (20)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Поведение поля эйлеровых скоростей. 1 — зависимость  $-\bar{v}_r v / (u_0^2 a (3 \cos^2 \theta - 1))$  от  $r/a$ , 2 — зависимость  $|\bar{v}_\theta v / u_0^2 a \sin 2\theta|$  от  $r/a$

Фиг. 2. Поведение поля лагранжевых скоростей. 1 — зависимость  $-\bar{v}_{Lr} v / (u_0^2 a (3 \cos^2 \theta - 1))$  от  $r/a$ , 2 — зависимость  $|\bar{v}_{L\theta} v / u_0^2 a \sin 2\theta|$  от  $r/a$

Из формул (12) и (20) следует, что в области  $r \ll \delta$

$$f_L(x) = \frac{9\omega u_0^2 a^4}{16v^2} \left[ \frac{1}{96z^2} \left( 6 - \frac{6}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{14}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right) \right]. \quad (21)$$

При расчете  $f_T(x)$  в области  $r \gg \delta$  в правой части (19) можно пренебречь слагаемыми, содержащими экспоненты. С учетом выражения (16) получим, что при  $r \gg \delta$

$$f_L(x) = \frac{9\omega u_0^2 a^4}{16v^2} \left[ \frac{1}{x} \frac{1}{40z} + \frac{1}{x^3} \frac{23}{80z^5} \right]. \quad (22)$$

В этом выражении первое слагаемое в квадратных скобках превосходит второе уже при  $r = 3\delta/2$ . Поскольку второе слагаемое убывает при увеличении расстояния быстрее, чем первое, при  $r \gg \delta$  оно мало по сравнению с первым слагаемым. В связи с этим при вычислении радиальной компоненты лагранжевой скорости достаточно учитывать только первое слагаемое в формуле (22). В соответствии с выражением (3) при вычислении касательной компоненты скорости второе слагаемое учитывать необходимо. Сравнивая формулы для радиальной части векторного потенциала эйлеровой и лагранжевой скоростей в области  $r \ll \delta$  — выражения (12) и (21), нетрудно видеть, что при  $r \ll \delta$  величина  $f(x)$  превышает  $f_L(x)$ , причем с удалением от поверхности сферы это превышение становится все более существенным:  $f/f_L \rightarrow 2x/3$ . В области  $r \gg \delta$   $f(x)$  (см. формулу (16))

по-прежнему превышает  $f_L(x)$  (формула (22)), стремясь, однако, к  $f_L(x)$  при  $r > \delta (10/z)^{1/2}$ :  $f/f_L \sim (x^2 + 10z^3)/x^2$  при  $r \gg \delta$ . Примерное поведение поля лагранжевых скоростей в области  $r \ll \delta$  и  $r \gg \delta$  показано на фиг. 2. Зависимости даны для случая  $z = 1/100$ .

В заключение упомянем работы, связанные с проблемой расчета акустических течений в случае  $a \ll \delta$ . В работе [2] поле эйлеровых скоростей акустического течения около сферы исследуется с помощью метода асимптотического сшивания. Поле течения в области  $r \ll \delta$  находится в квазистационарном приближении и сшивается с полем течения в области  $r \gg \delta$ , при получении которого нелинейный член в уравнении Навье — Стокса (1) заменяется на  $\rho(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}$ . Последнюю аппроксимацию принято называть озееновским приближением. Сравнение нашего результата для эйлерова поля акустического течения с решением, полученным в работе [2], показывает, что в области  $r \ll \delta$  они совпадают. Таким образом, при вычислении поля акустического течения в области  $r \ll \delta$  можно пользоваться квазистационарным приближением. В области  $r \gg \delta$  между решением, полученным нами, и решением работы [2] имеется расхождение. Это расхождение обусловлено использованием в [2] озееновского приближения, дающего неправильное (нулевое) значение коэффициента перед  $1/x$  в выражении для  $f(x)$ . Для эйлеровых скоростей эта ошибка становится существенной, начиная с расстояний порядка  $r \sim \delta (10/z)^{1/2}$ . Для расчета лагранжевых скоростей решение, приведенное в работе [2], неприменимо вообще. Действительно, выше показано, что лагранжевы скорости в основном определяются слагаемым, пропорциональным  $1/x$ , — как раз тем, которое вычислено в работе [2] неверно. Неприменимость озееновского приближения для вычисления лагранжевых скоростей акустических течений имеет общий характер, на что было указано в [9]. Отметим, что озееновское приближение использовалось и для нахождения акустического течения около цилиндра [3]. Акустические течения около малой сферы рассматривались в работе [10]. В качестве отправной точки здесь использовалось выражение для функции тока стационарного обтекания сферы, полученное в [11] с точностью до членов, квадратичных по числу Рейнольдса. В силу этого обстоятельства область применимости результатов работы [10] ограничена, как можно убедиться, такими амплитудами осцилляций жидкости и расстояниями от сферы, которые удовлетворяют неравенствам  $r \ll \delta$ ,  $u_0 a / \nu \ll 1$ ,  $r \ll u_0 / \omega$ . В области  $r \ll \min \{ \delta, \nu / u_0 \}$  решение, полученное нами, и решение работы [10] совпадают.

Автор благодарит М. А. Миронова за полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lane C. A. Acoustical streaming in the vicinity of sphere. — J. Acoust. Soc. Amer. 1955, v. 27, № 6, p. 1082–1086.
2. Riley N. On a sphere oscillating in a viscous fluid. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1966, v. 19, № 4, p. 461–472.
3. Andres J. M., Ingard U. Acoustical streaming at Low Reynolds number. — J. Acoust. Soc. Amer., 1953, v. 25, № 5, p. 932–938.
4. Raney W. P., Corelli J. S., Westerwelt P. J. Acoustical streaming in the Vicinity of a Cylinder. — J. Acoust. Soc. Amer., 1954, v. 26, № 6, p. 1006–1014.
5. Зарембо Л. К. Акустические течения. — В кн.: Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968.
6. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
7. Ниборг В. Акустические течения. — В кн.: Физическая акустика. Т. II. Ч. Б. М.: Мир, 1969.
8. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
9. Westerwelt P. J. Hydrodynamic Flow and Oseen's Aproxsimation. — J. Acoust. Soc. Amer., 1953, v. 25, № 5, p. 951–953.
10. Медников Е. П. Теория акустических течений, возникающих около очень малых сферических препятствий. — Акуст. журн., 1968, т. 14, № 4, с. 582–589.
11. Proudman J., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds number for the flow past a sphere and circular cylinder. — J. Fluid Mech., 1957, v. 2, № 3, p. 237–262.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
7.IV.1983