

УДК 534.1

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С ДВИЖУЩИМСЯ ТОРЦОМ

Жарий О. Ю.

Получены выражения для волн в цилиндрическом, параболическом и конусоидальном стержне, излучаемых от движущегося с постоянной скоростью торца; на котором приложено изменяющееся во времени давление. Изучено отражение импульсов от движущегося свободного торца.

При решении некоторых задач акустики возникает необходимость изучения звуковых полей в областях с движущимися границами и закономерностей отражения импульсов от таких границ. Например, для используемых в качестве концентраторов упругих стержней переменного сечения [1] возможны такие режимы ударного нагружения, при которых в стержне возникает расширяющаяся зона пластических деформаций. В первом приближении распространение волн в упругой части стержня можно рассмотреть, считая, что нагрузка приложена на движущейся с определенной скоростью границе раздела упругой и пластической зон, не принимая во внимание процессы в пластической зоне.

Сходные по постановке задачи для области с движущейся границей изучались в теории теплопроводности, однако прямое использование методов, разработанных в [2, 3] для уравнений параболического типа, в задачах колебаний затруднено наличием второй производной по времени. Здесь может быть применен подход, основанный на возможности построения решений волнового уравнения из волн, отраженных от неподвижных и движущихся заданным образом границ полубесконечной области.

Рассмотрим стержень с круговым поперечным сечением переменной площади $S(x) = S_0(x/x_0)^m$, где x — осевая координата, S_0 — площадь сечения $x = x_0$. При $m = 0$ имеем цилиндрический стержень, $m = 1$ и 2 — стержни в виде парабоида вращения и конуса. Уравнение продольных колебаний записывается в виде [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (m=0, 1, 2). \tag{1}$$

Здесь u — перемещение, $c = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения волн, E — модуль Юнга, ρ — плотность. Будем отыскивать решение уравнения (1) в области $v_0 t < x < \infty$ при начальных и граничных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=v_0 t} = f(t), \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

где $v_0 = \text{const}$ — скорость движения торца ($0 < v_0 < c$), $f(t) = -\sigma(t)/E$, $\sigma(t)$ — приложенное на торце давление (фиг. 1).

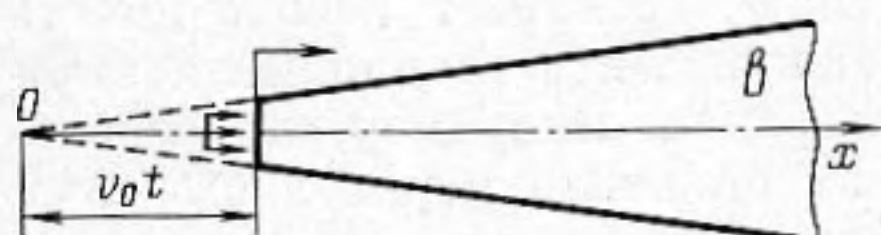
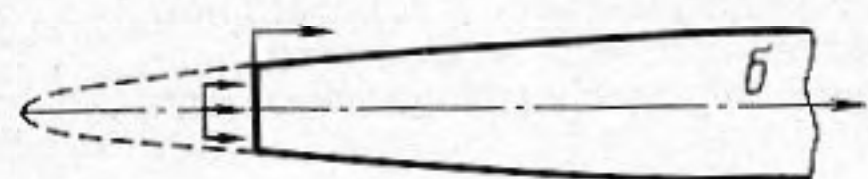
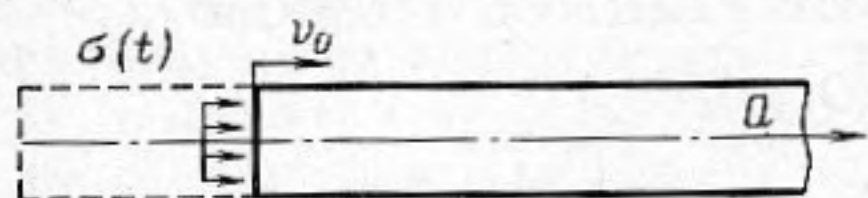
При $m = 0$ и 2 уравнению и начальным условиям удовлетворяют соответственно выражения $\Psi_1(ct-x)H(ct-x)$ и $x^{-1}\Psi_2(ct-x)H(ct-x)$, где $\Psi_{1,2}$ — произвольные функции, H — функция Хевисайда. Используя граничное условие (3) приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $\Psi_{1,2}$, после решения которых имеем

$$u = -(c-v_0) \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (m=0), \tag{4}$$

$$u = -v_0(c-v_0)x^{-1}\theta^{1-1/q} \int_0^\theta \tau^{1/q} f(\tau) d\tau \quad (m=2), \quad (5)$$

где $q=v_0/c < 1$, $\theta=(ct-x)/(c-v_0)$ (здесь и далее интегралы полагаются равными нулю в случае, когда верхний предел меньше нижнего).

Решения задач отражения приходящих из бесконечности импульсов $F(ct+x)$ ($m=0$) и $x^{-1}F(ct+x)$ ($m=2$) от движущейся свободной границы, на которой $\partial u/\partial x=0$ (это условие приближенно реализуется на оплавляющемся торце), с применением формул (4) и (5) получаются в виде



$$u = F(ct+x) + \frac{1-q}{1+q} F((c+v_0)\theta) \quad (m=0), \quad (6)$$

$$u = x^{-1} \left[F(ct+x) + \frac{1-q}{1+q} F((c+v_0)\theta) - \frac{2}{q} \frac{1-q}{1+q} \theta^{1-1/q} \int_0^\theta \tau^{1/q-2} F((c+v_0)\tau) d\tau \right] \quad (m=2). \quad (7)$$

Фиг. 1. Цилиндрический (а), параболаидальный (б) и конусоидальный (в) стержни, нагруженные на движущемся торце $x=v_0 t$

Формула (6) имеет простой физический смысл. В случае, когда падающий импульс имеет пространственную протяженность a ($F(x) \equiv 0$ вне промежутка длины a), отраженный имеет меньшую протяженность $a' = a(1-q)/(1+q)$. Этот результат согласуется с приведенным в [4] для частоты гармонических волн, отраженных от движущейся границы. Распределение деформаций описывается выражением $\epsilon = \partial u/\partial x = F'(ct+x) - F'((c+v_0)\theta)$.

Величины энергий падающего и отраженного импульсов W_i и W_r равны

$$W_i = ES_0 \int_0^a [F'(s)]^2 ds, \quad W_r = ES_0 \int_0^{a'} \left[F' \left(\frac{1+q}{1-q} s \right) \right]^2 ds.$$

Путем замены переменной во втором интеграле находим $W_r = (1-q)/(1+q) W_i$, т. е. импульс произвольной формы после отражения от движущейся навстречу ему свободной границы теряет $2q/(1+q)$ часть энергии, уносимую вместе с отделяющимся от стержня материалом. На фиг. 2 в безразмерных координатах $\xi = x/a$ изображены падающий (а) импульс амплитуды 1 и протяженности a , занимающий при $t=0$ промежуток $1 < \xi < 2$, и отраженный импульс (б) в момент прохождения фронта через точку $\xi=2$, а также положение торца стержня.

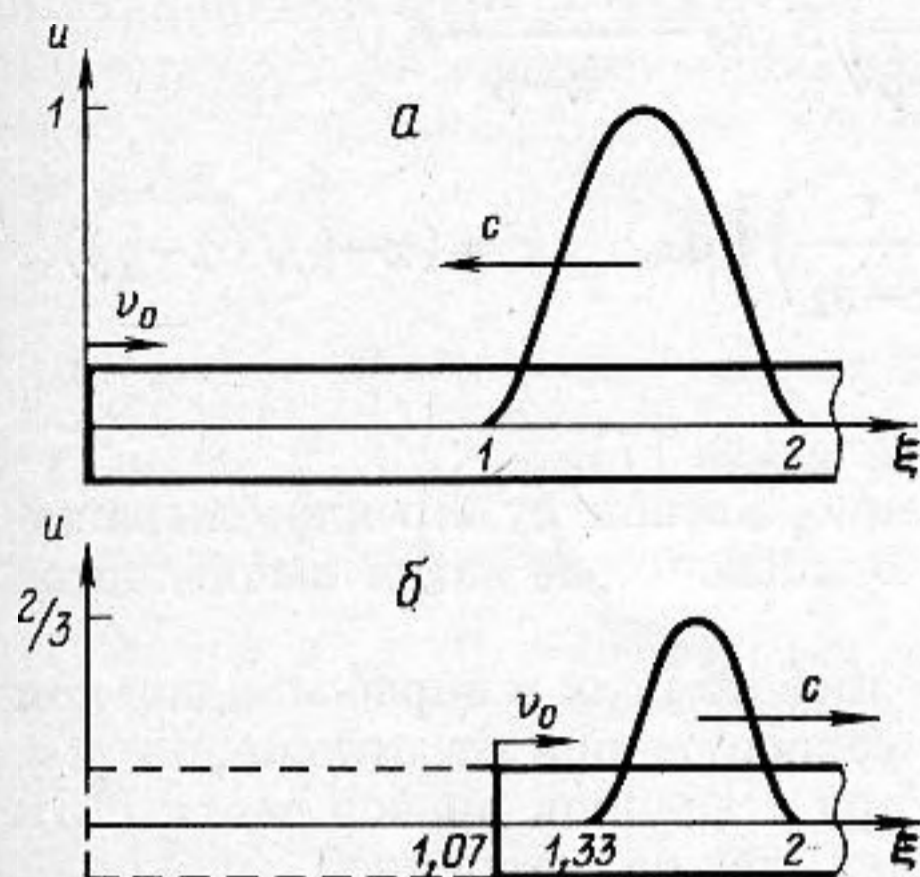
Процесс отражения в случае конусоидального стержня более сложен. Пусть при $t=0$ передний фронт падающего импульса протяженностью a находится в точке $x=b$, задний — в точке $x=b+a$ (фиг. 3, а). Анализируя выражение (7), можно установить, что отраженный импульс будет состоять из головной части протяженностью a' с передним фронтом $x = ct - b'$ и задним $x = ct - b' - a'$, где $b' = (1-q)/(1+q)b$, а также шлейфа, занимающего область $v_0 t < x < ct - b' - a'$ (фиг. 3, б). Вследствие наличия шлейфа простой связи между энергиями падающего и отраженного импульсов не существует.

Шлейф образуется и при отражении импульса от неподвижного торца конусоидального стержня вследствие переменности по длине жесткости стержня $ES(x)$. Но в этом случае энергия отраженного импульса, конечно, равна энергии падающего.

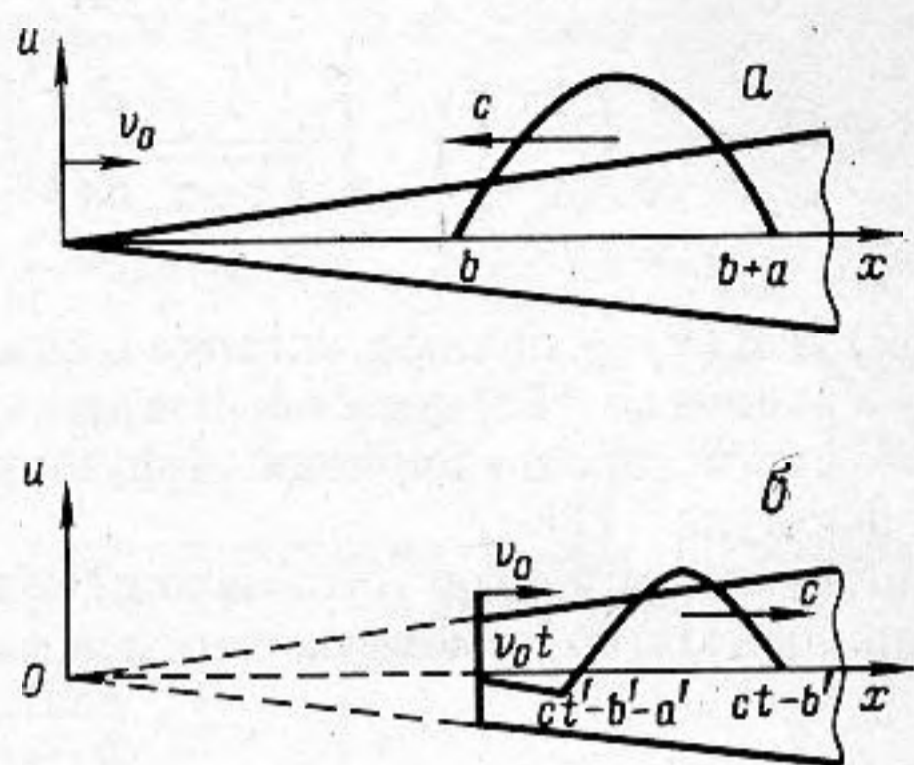
Решения (4), (5) можно получить применением к уравнению и гра-

ничному условию преобразования Лапласа по времени, предварительно перейдя к новой независимой переменной $x_1 = x - v_0 t$ и заменив при $m=2$ неизвестную функцию по формуле $u = x^{-1} u_1$.

В случае $m=1$ уравнение (1) совпадает с уравнением осесимметричных цилиндрических волн. Решений типа $x^\lambda \Psi(ct \pm x)$ не существует [5], а переход к движущейся системе координат приводит к уравнению с не-



Фиг. 2, а, б. Отражение импульса от движущегося торца цилиндрического стержня при $q=0,2$



Фиг. 3, а, б. Отражение импульса от движущегося торца конусоидального стержня, $q=0,2$

разделяющимися переменными. Здесь необходимо отойти от общего решения уравнения (1) в виде уходящей волны [5]

$$u = \int_0^{\infty} F\left(t - \frac{x}{c} \operatorname{ch} \eta\right) d\eta. \quad (8)$$

Введя замену переменной $\operatorname{ch} \eta = x^{-1}(x^2 + z^2)^{1/2}$, $d\eta = (x^2 + z^2)^{-1/2} dz$, запишем представление типа (8), удовлетворяющее нулевым условиям

$$u = \int_0^{\infty} \varphi(ct - \sqrt{x^2 + z^2}) H(ct - \sqrt{x^2 + z^2}) \frac{dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}. \quad (9)$$

Подынтегральное выражение в (9) отлично от нуля лишь при $0 < z < (c^2 t^2 - x^2)^{1/2}$. На подлежащую определению функцию φ нужно наложить условие $\varphi(0) = 0$, обеспечивающее сходимость интеграла.

Заменив неизвестную функцию по формуле

$$\varphi'(\alpha) = g(\alpha), \quad \varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(\beta) d\beta, \quad (10)$$

из (9) получаем

$$u = \int_0^{ct-x} \ln \frac{ct-\alpha + \sqrt{(ct-\alpha)^2 - x^2}}{x} g(\alpha) d\alpha, \quad (11)$$

а граничное условие (3) приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^{(c-v_0)t} \frac{ct-\alpha}{\sqrt{(ct-\alpha)^2 - v_0^2 t^2}} g(\alpha) d\alpha = -v_0 t f(t). \quad (12)$$

Ядро этого уравнения имеет корневую особенность в верхнем пределе интегрирования. Выделяя особенность в чистом виде и используя решение уравнения Абеля [6], из (12) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно новой функции $h(\alpha) = (\alpha - q\alpha)^{1/2} /$

$/(1+q)g(\alpha)$:

$$h(\alpha) + \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha Q(\alpha, \beta) h(\beta) d\beta = p(\alpha), \quad (13)$$

где

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left(\frac{q}{\alpha-q\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta} \right) E(k) - \frac{\sqrt{1-k^2}}{\alpha-\beta} K(k),$$

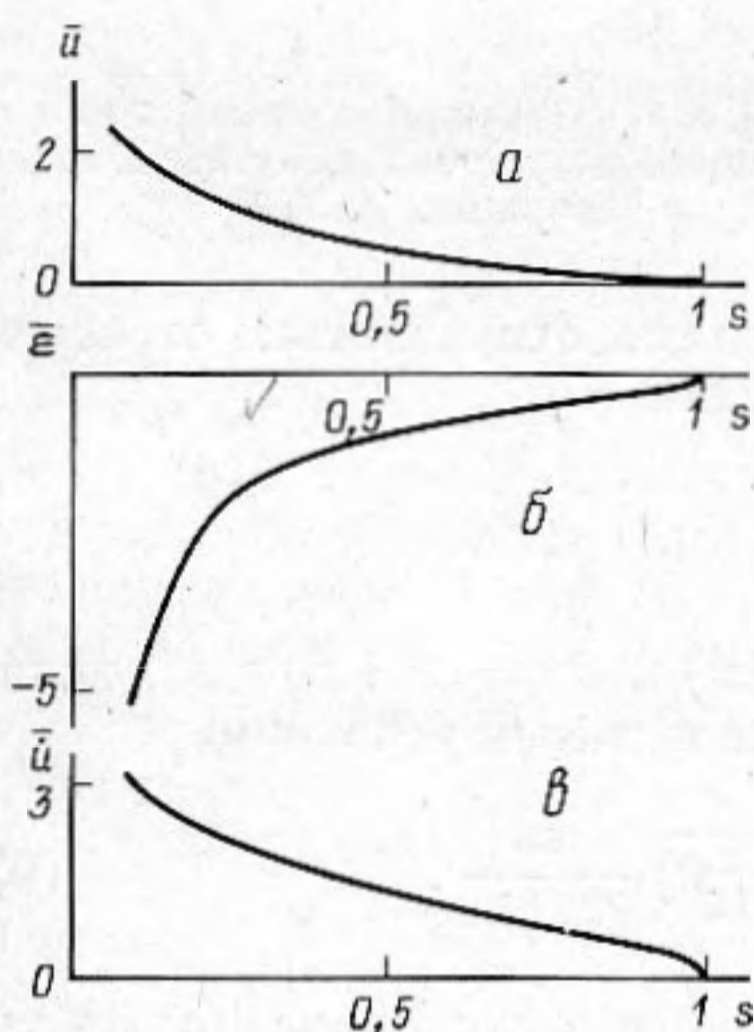
$$p(\alpha) = -\frac{q}{\pi} \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^{1/2} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha-\tau}} \frac{d}{d\tau} \left[\tau f \left(\frac{\tau}{c-v_0} \right) \right] d\tau, \quad k^2 = (\alpha-\beta)/(\alpha-q\beta),$$

$E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы [7].

Уравнение (13) удобно решать численно, поскольку его ядро выражается через хорошо изученные функции. Волновое поле затем вычисляется по формуле (11).

Имеется и другой путь нахождения волнового поля в параболическом стержне. Легко заметить, что $\alpha Q(\alpha, \beta)$ зависит лишь от отношения β/α ,

поэтому при степенной правой части (13), $h(\alpha)$ будет также степенной функцией. Именно $p(\alpha) = p_0 \alpha^{\lambda+0,5}$ и $h(\alpha) = h_0 \alpha^{\lambda+0,5}$ при $f(t) = f_0 t^\lambda$. В этом случае из (10) следует, что $\varphi(\alpha) = \varphi_0 \alpha^{\lambda+1}$. Таким образом,



$$U_\lambda(x, t) = U_\lambda^0 \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} (ct - \sqrt{x^2 + z^2})^{\lambda+1} \times \frac{dz}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad (14)$$

удовлетворяют условию (3) с $f(t) = f_0 t^\lambda$ и нужно лишь выразить постоянные U_λ^0 через f_0 . Это требует вычисления интеграла (14), который лишь при целом λ берется в элементарных функциях. Например, при $f(t) = -H(t)$, $\lambda=1$ и имеем решение

$$u = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} ct f(s),$$

$$f(s) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{s} - \sqrt{1-s^2}, \quad s = \frac{x}{ct}. \quad (15)$$

Деформации и скорости частиц определяются формулами

$$\varepsilon = -\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} f(s), \quad \dot{u} = \frac{qc}{\sqrt{1-q^2}} [f(s) - sf'(s)]. \quad (16)$$

На фиг. 4 изображено распределение безразмерных величин $\bar{u} = f(s)$, $\bar{\varepsilon} = f'(s)$, $\bar{\dot{u}} = f(s) - sf'(s)$ в возмущенной области как функций автомобильной координаты s . При заданном q графики нужно рассматривать лишь в промежутке $q < s < 1$, соответствующем $v_0 t < x < ct$.

Скорости и деформации обращаются на фронте волны в нуль как $(ct-x)^{1/2}$. Заметим, что в силу автомобильности выражений (15), (16) графики на фиг. 4 дают полное представление о волновом поле в параболическом стержне при любых x и t .

В случае произвольной зависимости приложенного давления от времени нужно приближенно представить $f(t)$ в виде многочлена от t , а затем построить решение задачи (1)–(3) по принципу суперпозиции. Если же

для воспроизведения особенностей $f(t)$ типа быстрых изменений самой функции или ее производной требуется построение многочлена высокой степени, выгоднее решать уравнение (13), а затем применять формулу (11) для построения волнового поля.

Описанная методика применима к решению задачи отражения от движущейся свободной границы. Однако в силу большей сложности процесса распространения импульсов в параболоидальном стержне по сравнению с цилиндрическим и конусоидальным явных формул типа (4)–(7) здесь не существует и установить общие закономерности отражения затруднительно. Здесь ясно лишь то, что при отражении энергия волнового движения уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Именигова Е. В.* Расчет концентраторов произвольной формы.— Акуст. журн., 1979, т. 25, № 1, с. 137–140.
2. *Гринберг Г. А.* Об одном общем методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии границ, движение которых задано или подлежит определению.— ЖТФ, 1974, т. 44, № 10, с. 2033–2042.
3. *Гринберг Г. А.* О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан временной ход температуры или концентрации.— ПММ, 1969, т. 33, № 6, с. 1051–1060.
4. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Физматгиз, 1973. 495 с.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Привалов И. И.* Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 248 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.

Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию
12.IV.1983