

УДК 534.222.2

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ ЧЕТЫРЕХФОНОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ

Заболотская Е. А.

Теоретически исследовано явление обращения волнового фронта при взаимодействии четырех волн в жидкости с пузырьками газа на квадратичной и кубической нелинейности пузырьков. Проанализирована частотная зависимость коэффициента, характеризующего обращение волнового фронта. Приведены численные оценки.

Большие потенциальные возможности явления обращения волнового фронта привлекают к нему внимание исследователей. В оптике это явление уже используется на практике [1]. В акустике пока рассмотрены три механизма обращения волнового фронта, основанные на взаимодействии звука с капиллярными волнами [2] (механизм, реализованный экспериментально [3]), с температурными волнами [4] и с пузырьками воздуха, равномерно распределенными в воде [5]. Общие принципы построения схем обращения волнового фронта для волн произвольной физической природы изложены в работе [6].

В данной статье теоретически исследуется явление обращения волнового фронта в жидкости с газовыми пузырьками. В отличие от работы [5] здесь учитывается не только кубическая нелинейность, обеспечивающая взаимодействие трех волн с образованием четвертой (4-х волновые взаимодействия), но и квадратичная нелинейность пузырьков. Эта нелинейность при повторных трехволновых взаимодействиях приводит к взаимодействию четырех волн.

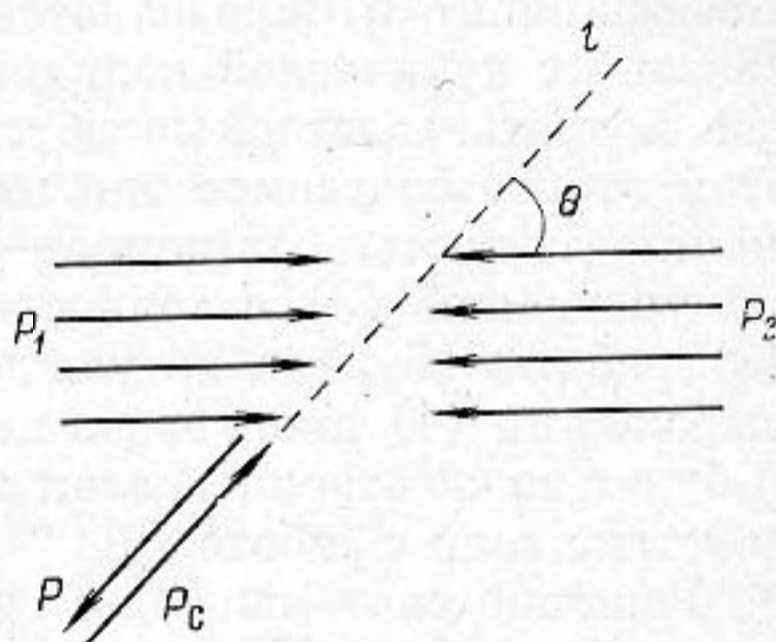
Допустим, что в нелинейной среде навстречу друг другу распространяются две мощные звуковые волны с амплитудами P_1 и P_2 — волны накачки, а под углом θ к ним — слабая волна сигнала с амплитудой P_c (фиг. 1). В результате взаимодействия этих волн возбуждается обращенная волна (ее амплитуду обозначим P), распространяющаяся навстречу сигнальной, аналогично тому, как это происходит в оптике [7]. Частоты всех волн одинаковы и равны ω .

Процесс распространения и взаимодействия волн в жидкости с пузырьками газа описывается волновым уравнением и уравнением движения одиночной газовой полости:

$$\Delta p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho_0 n \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} + \omega_0^2 V - \alpha V^2 - \beta (2\dot{V}V - \dot{V}^2) + \mu V^3 + \\ + \nu (V^2\dot{V} + \dot{V}^2V) = -\varepsilon p. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения: p — звуковое давление, V — возмущение объема пузырька, c_0 — скорость звука в воде, n — концентрация пузырьков, ρ_0 — равновесная плотность воды, $\omega_0^2 = 3\gamma P_0 / \rho_0 R^2$, $\alpha = (\gamma + 1) \omega_0^2 / 2V_0$, $\beta = 1/6 V_0$, $\mu = (\gamma + 1) (\gamma + 2) \omega_0^2 / 6V_0^2$, $\nu = 2/9 V_0^2$, $\varepsilon = 4\pi R_0 / \rho_0$, γ — показа-



Фиг. 1. Взаимное расположение взаимодействующих волн

тель адиабаты в уравнении состояния газа, R — радиус пузырька, индекс 0 отмечает равновесное значение соответствующей величины.

Сначала проанализируем, при каких взаимодействиях можно получить частоту ω в данном случае, когда частоты всех взаимодействующих волн одинаковы и равны ω . Кубическая нелинейность обеспечивает взаимодействие сразу 4 волн, в частности, частоту ω можно получить за счет взаимодействий $\omega = \omega - \omega + \omega$. На квадратичной нелинейности осуществляется взаимодействие 3 волн, однако возможны повторные взаимодействия. В данном случае квадратичная нелинейность при первом смешении частот дает частоты 2ω и 0 . При втором акте взаимодействия можно получить частоту ω : $\omega = 2\omega - \omega$; $\omega = 0 + \omega$.

Используя стандартную процедуру получения укороченных уравнений, напомним эти уравнения в виде

$$-ik \frac{dP_0}{dl} = \eta P_1 P_2 P^*, \quad ik \frac{dP}{dl} = \eta P_1 P_2 P_c^*, \quad (3)$$

где l — координата вдоль направления распространения сигнала (фиг. 1), k — волновое число, учитывающее дисперсию среды и самовоздействие звуковых волн. Выражение для коэффициента η , определяющего взаимодействие волн, можно записать в виде

$$\eta = \frac{\rho_0 n \omega^2 \varepsilon^3 \left[\left(\frac{3}{2} \mu - \nu \omega^2 \right) \omega_0^2 (\omega_0^2 - 4\omega^2) - \right.}{2\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^4 (\omega_0^2 - 4\omega^2)} \\ \left. - (\alpha - 3\beta \omega^2)^2 \omega_0^2 - 2(\alpha - \beta \omega^2)^2 (\omega_0^2 - 4\omega^2) \right]}{\quad} \quad (4)$$

Коэффициент η определяется суммой трех слагаемых: первое слагаемое связано с кубической нелинейностью пузырька (см. уравнение (2)), второе и третье слагаемые обусловлены квадратичной нелинейностью. При этом второе слагаемое описывает взаимодействие волн через вторую гармонику, а третье слагаемое — через нулевую частоту. Заметим, что система уравнений (3) с точностью до коэффициентов совпадает с системой (3) работы [5], где не учитывалась квадратичная нелинейность. Если в выражении (4) пренебречь квадратичной нелинейностью, то коэффициент η будет тождественно равен коэффициенту β , характеризующему взаимодействие волн в работе [5].

Решение системы (3) с граничными условиями, аналогичными приведенным в работе [5], представим в виде модуля отношения амплитуд обращенной волны и волны сигнала:

$$K = \left| \frac{P^*}{P_0} \right| = \operatorname{tg} \frac{\eta |P_1| |P_2|}{k} L, \quad (5)$$

здесь L — длина области взаимодействия.

Коэффициент η имеет сложную зависимость от частоты. Для анализа этой зависимости введем безразмерную частоту $\xi = \omega^2 / \omega_0^2$ и представим выражение (4) в виде

$$\eta = \frac{\rho_0 n \varepsilon^3}{2V_0^2 \omega_0^4} \Phi(\xi) = \frac{3}{2} \frac{nV_0}{\gamma^2 P_0^2 R_0^2} \Phi(\xi), \quad (6)$$

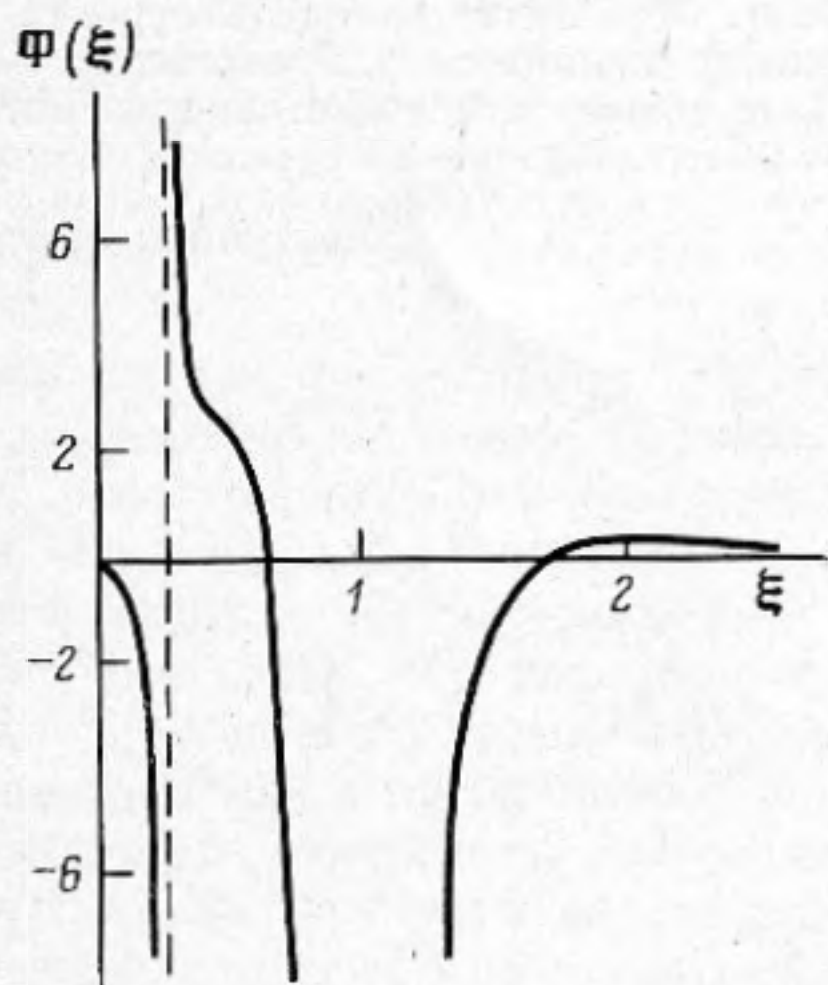
где

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi \left[\left(\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{4} - \frac{2}{9} \xi \right) (1-4\xi) - \right.}{(1-\xi)^4 (1-4\xi)} \\ \left. - \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\xi}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\xi}{6} \right)^2 (1-4\xi) \right]}{\quad} \quad (7)$$

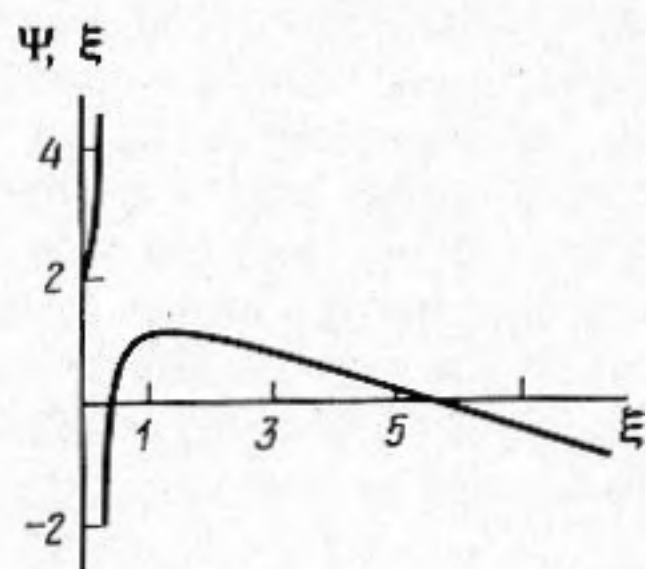
График функции $\Phi(\xi)$ для пузырьков воздуха изображен на фиг. 2. Значения $\xi=1$ и $0,25$ соответствуют резонансу собственных колебаний пузырьков на частотах ω и 2ω , поэтому функция $\Phi(\xi)$ обращается в бесконечность. Эти частоты нужно исключить из рассмотрения, так как при них существенно не учитываемое здесь затухание.

Кроме того, коэффициент η зависит от концентрации пузырьков и от их равновесного радиуса. Для увеличения коэффициента η выгоднее работать с мелкими пузырьками.

Интересно сравнить вклады, вносимые квадратичной и кубической нелинейностью, в процессе возбуждения обращенной волны. Отношение со-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. График функции $\Phi(\xi)$, определяемой выражением (7)

Фиг. 3. График функции $\Psi(\xi)$, характеризующей соотношение вкладов квадратичной и кубической нелинейностей пузырька в процесс возбуждения обращенной волны

ответствующих слагаемых в выражении (7) можно записать в виде

$$\Psi(\xi) = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\xi}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\xi}{6}\right)^2 (1-4\xi)}{(1-4\xi) \left(\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{4} - \frac{2}{9}\xi\right)}. \quad (8)$$

График функции $\Psi(\xi)$ для воздушных пузырьков представлен на фиг. 3. Таким образом, вклады от квадратичной и кубической нелинейностей одного порядка. Соответствующие члены в выражении (7), описывающие эти вклады, вычитаются, поэтому выгодно, чтобы у них были разные знаки. Функция $\Psi(\xi)$ отрицательна при $0,25 < \xi < 0,35$ и при $\xi > 6$, но в последнем случае нелинейности пузырька как квадратичная, так и кубическая малы (на 4–5 порядков меньше, чем при частотах $\xi \leq 2$).

Оценим расстояние, при котором аргумент tg (выражение (5)) достигнет значения $\pi/2$. На этом расстоянии можно ожидать обращения волнового фронта с усилением. При концентрации пузырьков $nU=10^{-5}$, равновесном радиусе $R_0=1,6 \cdot 10^{-2}$ см, частоте сигнала 12 кГц и интенсивности звуковой волны накачки $0,1$ Вт/см² это расстояние составит 120 см. Расчет проводился для пузырьков воздуха в воде. Кроме того, предполагалось, что амплитуды волн накачек равны: $P_1=P_2$.

Проведенный расчет показывает, что при обращении волнового фронта в воде с пузырьками воздуха существенна не только кубическая, но и квадратичная нелинейность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. / Под ред. Беспалова В. И. Горький. ИПФ АН СССР. 1979.
2. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта и самофокусировка за счет нелинейного взаимодействия с поверхностью жидкости.— Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, вып. 6, с. 325–329.
3. Андреев Н. П., Бункин Ф. В., Власов Д. В., Каршиев К. Экспериментальное наблюдение явления обращения волнового фронта звука на поверхности жидкости.— Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, вып. 2, с. 104–108.
4. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Заболотская Е. А., Кравцов Ю. А. Температурный механизм четырехфононного обращения волнового фронта звуковых пучков.— Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, вып. 9, с. 560–563.
5. Власов Д. В., Заболотская Е. А., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта в воде с пузырьками.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 1, с. 118–120.
6. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта в акустике: нелинейные механизмы и возможные применения. Препринт № 90, 1982.
7. Jariv A., Pepper D. M. Amplified reflection phase conjugation and oscillation in degenerate four-wave mixing.— Opt. Lett., 1977, v. 1, p. 16–21.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1.VI.1983