

УДК 534.6.534.22

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ  
В УЛЬТРАЗВУКОВОМ РЕЗОНАТОРЕ, СВЯЗАННОЙ  
СО СПЕКТРОМ ЕГО СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Кононенко В.С.

На основе теории открытого резонатора получено выражение для амплитуды резонансных пиков интерферометра в зависимости от частоты. Показано, что наличие спектра собственных частот интерферометра на высоких частотах ведет к дополнительному завышению результатов измерений поглощения и скорости распространения ультразвука.

Ультразвуковой резонатор в виде интерферометра с постоянной базой успешно применяется для измерений коэффициента поглощения ультразвука в жидкостях в диапазоне частот 0,14–30 МГц [1, 2]. При этом дифракционное завышение результатов измерений и другие погрешности в резонаторе исключаются путем сравнения с результатами измерений в эталонных жидкостях. Из-за конечной полуширины резонансных пиков в интерферометре и сгущения спектра собственных частот резонатора с повышением частоты возникает взаимное влияние соседних резонансных пиков, что приводит к существенным ошибкам при измерениях, рассмотренным в работе [2], которые устраняются с помощью соответствующих поправочных формул. Однако существует еще один неучтенный источник ошибок, связанный с наличием неосновных пиков малой амплитуды, которые не используются для измерений, расположены вблизи основных и которые для удобства назовем сателлитами. Для учета влияния сателлитов на измерения и оценки погрешностей, вносимых ими, рассмотрим модель ультразвукового интерферометра в виде открытого резонатора, описанного в работе [3], у которого пьезопреобразователи заменены идеально отражающими зеркалами. Теоретические расчеты дифракционных потерь для открытого резонатора достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами по дифракционным потерям в ультразвуковом резонаторе [4]. Следовательно, данную модель целесообразно применить и к анализу влияния сателлитов на измерения.

Пусть координаты параллельных круглых зеркал в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  определяются уравнениями:  $0 \leq r \leq a, z = \pm l, 2l$  — расстояние между зеркалами,  $a$  — радиус зеркал. Решение волнового уравнения в таком резонаторе для потенциала скорости  $\Phi$  в предположении, что  $\Phi$  не зависит от  $\varphi$ , имеет вид [3]

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(v_{0n}r/a) \{ C_{n,1} \exp[-ikz + i\pi p_n(1+z/l)] + C_{n,2} \exp[ikz - i\pi p_n(1+z/l)] \}, \quad (1)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $v_{0n}$  — корни  $J_0$ ,  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$  — постоянные, определяемые из граничных условий,  $k$  — волновое число, параметр  $p_n$  определяется по формуле  $p_n = v_{0n}^2(M + \beta + i\beta)^{-2}/\pi$ , где  $\beta = 0,824, M = a(2k/l)^{0,5}$ .

Пусть на нижнем зеркале для  $z = -l$  задан возбуждающий потенциал с амплитудой гармонических колебаний, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\text{при } 0 \leq r \leq a \quad d\Phi/dz = v_0, \text{ при } r > 0 \quad d\Phi/dz = 0. \quad (2)$$

Для нахождения  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$  продифференцируем выражение (1) по  $z$

и, умножив на  $J_0(v_{0m}r/a)r$ , проинтегрируем от 0 до  $\infty$  по  $r$  ( $m=1, 2, \dots, \infty$ ). При этом, используя свойство ортогональности функций Бесселя и условие (2) для  $z=-l$ , получим, пренебрегая  $p_n\pi/l$ ,

$$-C_{n,1} \exp(-ikl) + C_{n,2} \exp(ikl) = 2v_0/[v_{0n}J_1(v_{0n})k]. \quad (3)$$

Второе уравнение для  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$  находим аналогично, используя условие на верхнем зеркале для  $z=l$ :  $d\Phi/dz=0$  при  $0 \leq r \leq \infty$ . Получим

$$-C_{n,1} \exp(-ikl+i2\pi p_n) + C_{n,2} \exp(ikl-i2\pi p_n) = 0. \quad (4)$$

Находя  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$  из (3), (4) и подставляя их в (1), получим для  $z=l$

$$\Phi = (2iv_0/k) \sum_{n=1}^{\infty} J_0(v_{0n}r/a) / [v_{0n}J_1(v_{0n}) \sin 2(kl - \pi p_n)].$$

Усредняя величину  $\Phi$  по поверхности верхнего зеркала, получим  $\Phi_{cp} = i4v_0U/k$ , где

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} [v_{0n}^2 \sin 2(kl - \pi p_n)]^{-1}. \quad (5)$$

Величина  $|U|$  пропорциональна выходному напряжению в ультразвуковом резонаторе. Первый член суммы характеризует вклад в выходной сигнал основного резонансного пика, а остальные — соответствующих сателлитов. Экспериментальная проверка подтвердила наличие данных сателлитов. При этом их расположение в спектре частот резонатора согласуется с формулой (5), что подтверждает равенство  $\Phi(\varphi) = \text{const}$ .

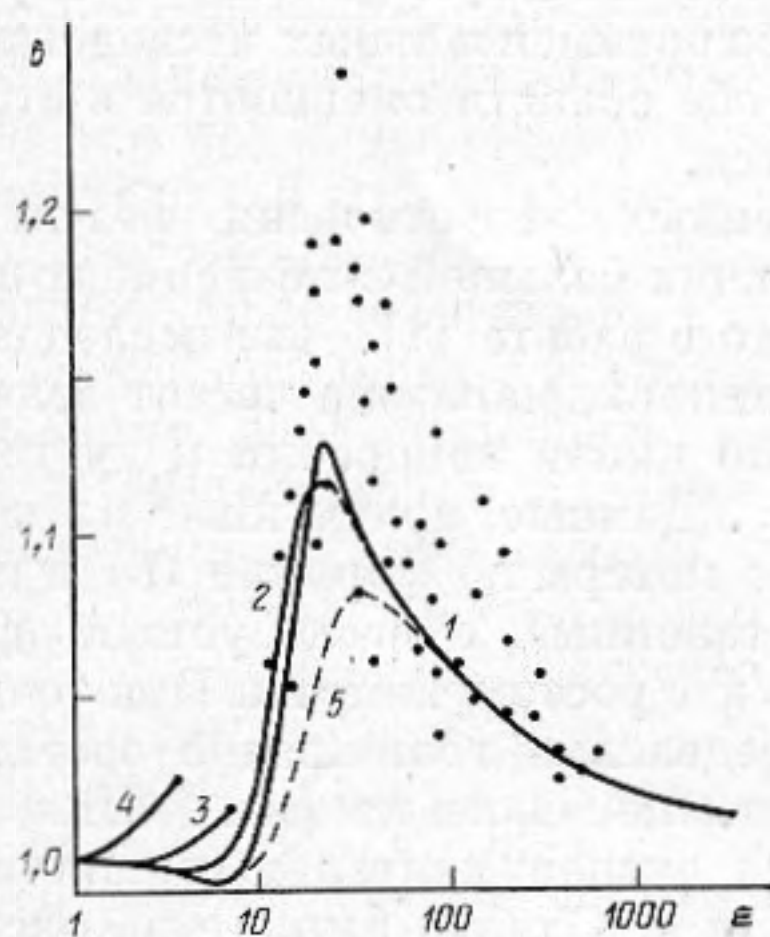
Так как частотный интервал между сателлитами намного меньше, чем между основными резонансными пиками, то при достаточно большой полуширине пиков происходит слияние основных пиков с сателлитами, ведущее к искажению результатов измерений затухания. Для проведения численных оценок этого эффекта представим величину  $kl$  в виде  $kl = 0,5\pi q + \Delta kl + i\alpha l$ , где  $\alpha$  — коэффициент поглощения ультразвука в жидкости,  $\Delta kl$  — расстройка относительно  $q$ -го пика резонатора, имеющего  $p_n = 0$ . Подставляя  $kl$  в формулу (5), получим

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} [v_{0n}^2 \sin 2(\Delta kl - \pi p_n + i\alpha l)]^{-1} \quad (6)$$

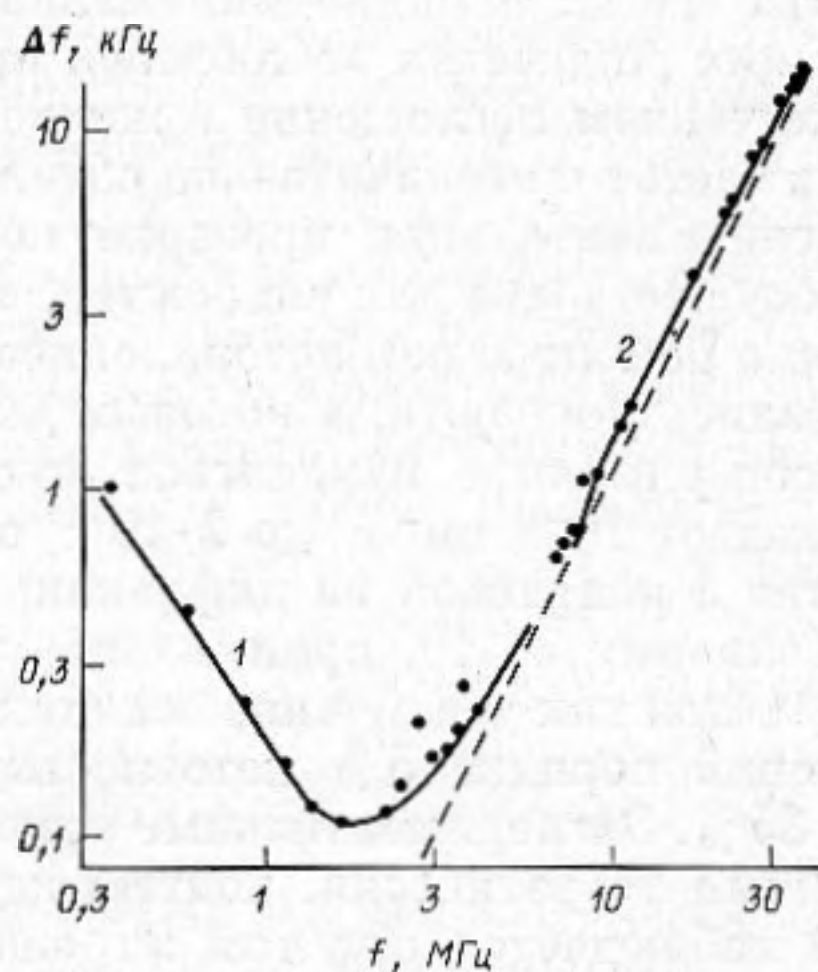
Из выражения (6) следует, что амплитуда сателлитов пропорциональна  $v_{0n}^{-4}$  при  $\pi \text{Im}(p_n) \gg \alpha l$  и пропорциональна  $v_{0n}^{-2}$  при  $\pi \text{Im}(p_n) \ll \alpha l$ . Это означает, что при малом поглощении в жидкости и большом дифракционном затухании, т. е. при достаточно низких частотах, амплитуда 1-го сателлита должна быть меньше основного пика на 29 дБ. С увеличением частоты резонансных пиков в резонаторе амплитуда 1-го сателлита растет и в пределе должна стать меньше основного пика на 14,5 дБ. Эксперимент подтверждает данную зависимость, причем отношения амплитуды остальных сателлитов к амплитуде основного пика согласуются с формулой (6). Однако на высоких частотах в некоторых случаях экспериментальное значение амплитуды 1-го сателлита может отличаться от амплитуды основного пика всего на 2–3 дБ.

Расчеты по формуле (6) проводились с помощью ЭВМ. В зависимости от величины расстройки резонансного пика  $\Delta kl$  находилось резонансное значение  $|U|$ , полуширина резонансного пика с сателлитами и без сателлитов и отношение этих полуширин  $\delta$ . При этом параметры в формуле (6) выражались через обобщенное расстояние  $S = 2\lambda l/a^2$ , добротность жидкости  $Q = \pi/(\alpha\lambda)$  и величину  $ka$ , где  $\lambda$  — длина волны ультразвука. Анализ расчетных данных показал, что величина  $\delta$ , характеризующая отношение измеренного затухания к затуханию, которое было бы при отсутствии сателлитов, зависит в основном от величины  $\epsilon = (ka)^2/Q$  и слабая зависимость наблюдается от величины  $S$ . Теоретические зависимости  $\delta$  от  $\epsilon$  (фиг. 1)

для  $S=(0,0001\div 0,01)$  практически совпадают друг с другом, особенно для  $\epsilon > 30$ , и изображены кривой 1. При повышении  $S$  от 0,01 до 0,25 кривая 1 постепенно приближается к положению кривой 2, соответствующей  $S=0,25$  и существующей лишь для  $\epsilon > 2,5$ . Кривые 3 и 4, соответствующие значениям  $S=0,5$  и  $S=1$ , существуют лишь для  $\epsilon > 10$  и  $\epsilon > 4$  и практически не реализуются. Поэтому кривая 1 с учетом кривой 2 может быть применена для обработки практически всех экспериментальных данных. Область значений  $\epsilon < 10$  соответствует измерениям с основным резонансным пиком, когда сателлиты не влияют на измерения. С повышением частоты  $\epsilon$  увеличивается, теоретически рассмотренное завьшение затухания достигает 12,5% при  $\epsilon=23,8$  и затем медленно убывает с повышением час-



Фиг. 1



Фиг. 2

тоты. Следовательно, на высоких частотах даже при малом поглощении следует ожидать завьшения результатов измерений поглощения в резонаторе. Диапазон частот, в котором сателлиты не влияют на измерения, может быть определен из следующего условия:

$$ka \leq \sqrt{10Q}. \quad (7)$$

В качестве конкретного примера проанализируем результаты измерений полуширины резонансных пиков  $\Delta f$  в воде, выполненные в работе [2] для прецизионного резонатора, имеющего пьезоэлементы с основной частотой 5 мГц,  $a=5$  мм и  $2l=3$  мм.

Согласно работе [4], величину дифракционных потерь для резонатора можно рассчитать по формуле, которую удобнее представить в следующем виде:

$$\Delta f_1/f = 0,0483\lambda^{2,5}(2l)^{0,5}(1-0,5\sqrt{S})/a^3, \quad (8)$$

где  $\Delta f_1$  — полуширина резонансного пика, определяемая только потерями на дифракцию,  $f$  — частота ультразвука.

С ростом рабочей частоты резонатора дифракционные потери быстро убывают и при измерениях в воде на частотах выше 7 мГц будут составлять менее 2% от потерь на поглощение в воде. Зависимость  $\Delta f_2$  от  $f$ , где  $\Delta f_2$  — полуширина резонансного пика, определяемая только поглощением в воде, показана на фиг. 2 штриховой линией. Кривая 1 соответствует теоретическим значениям  $\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$ . Экспериментальные данные, взятые из работы [2], для частот ниже 7 мГц хорошо согласуются с теоретической кривой 1 (точки, связанные с резонансными потерями энергии пьезоэлементами около частот 5 и 15 мГц, опущены). Однако для частот выше 8 мГц наблюдается систематическое завьшение результатов измерений потерь в резонаторе, превышающее потери в воде (порядка 10%),

причину которого нельзя объяснить дифракционным расхождением ультразвукового луча и потерями энергии в пьезопреобразователях ввиду их малости. Данное завышение результатов можно объяснить влиянием сателлитов на измерения. Согласно условию (7), влияние сателлитов на завышение результатов измерений должно начинаться свыше 8 мГц и даже при частоте 30 мГц завышение, определяемое кривой 1 (фиг. 1), должно составлять 3%. Максимум завышения приходится на частоту 10,4 мГц. Кривая для  $\Delta f = \Delta f_2 \cdot \delta$  в зависимости от  $f$  показана на фиг. 2 — 2. Экспериментальные данные в целом согласуются с теоретическими.

Рассмотренный пример показывает, что области частот, в которых дифракционные потери сравнимы с поглощением в жидкости и проявляется влияние сателлитов, находятся рядом, причем равенство (7) определяет частоты, где их влияние минимально. Этот минимум для  $\alpha/f^2$  в нерелаксирующих жидкостях наблюдался при экспериментальных исследованиях. С увеличением поглощения в жидкости обе области смещаются в сторону низких частот и незначительно сближаются.

Экспериментальная проверка полученных теоретически результатов была осуществлена для жидкостей, имеющих большой коэффициент поглощения, с помощью резонатора, описанного в работе [1]. Для исследований выбирались жидкости, в которых для данного диапазона частот величина  $\alpha/f^2 = \text{const}$  и могла изменяться от одного цикла измерений к другому в пределах от  $10^{-14} \text{ см}^{-1}\text{с}^2$  до  $2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-1}\text{с}^2$ . Данные, полученные на низких частотах с поправкой на дифракционные потери по формуле (8) и имеющие величину  $\epsilon < 10$ , принимались за эталонные, а исследуемый эффект определялся как увеличение величины  $\alpha/f^2$  с ростом частоты. При точности измерений порядка 5% неточность определения величины  $\delta$  составляла более 25%. Экспериментальные результаты показаны на фиг. 1. Пик, предсказанный теоретически, подтверждается экспериментальным пиком, который наблюдается при том же значении  $\epsilon$ . Однако амплитуда экспериментального пика иногда вдвое больше, что, по-видимому, связано с неточностью граничного условия на излучателе в теоретической модели резонатора. Для выяснения этого обстоятельства автор провел аналогичные расчеты на ЭВМ для случая, когда в формуле (6) вместо  $v_{0n}^2$  использовалось значение  $v_{0n}$ . Эта замена должна соответствовать возбуждающему потенциалу, сосредоточенному лишь в небольшой центральной области зеркала. В этом случае теоретическое значение максимума для  $\delta$  наблюдалось для  $\epsilon = 17$ , максимальное значение  $\delta$  достигало 1,35 и в области значений  $\epsilon$  от 17 до 1000 величина  $\delta = 1,15 \div 1,2$ , что превышает экспериментальные результаты особенно для  $\epsilon > 25$ . Проведенный расчет показывает, что неточность условия (3) на зеркале может являться причиной различия экспериментальных и теоретических результатов.

Незначительное уменьшение погрешности измерений, связанной с сателлитами, получается, если измерять ширину резонансного пика не на уровне 3 дБ, а на уровне 1 дБ от максимального значения с последующим пересчетом результатов при определении поглощения. Соответствующая кривая для  $\delta$ , полученная с помощью ЭВМ, изображена на фиг. 1 — 5.

Сателлиты влияют не только на уширение резонансного пика, но и смещают резонансную частоту в сторону увеличения, что приводит к дополнительному завышению скорости ультразвука при измерениях. Поэтому в формуле дифракционного завышения скорости, полученной в работе [4], необходимо вводить поправочный коэффициент  $\sigma$ , равный отношению дифракционного завышения скорости для резонансного пика с сателлитами к дифракционному завышению скорости для пика без сателлитов. Величина  $\sigma$  определялась с помощью ЭВМ по формуле  $\sigma = (f_2 - f_0) / (f_1 - f_0)$ , где  $f_0$ ,  $f_1$  и  $f_2$  — рассчитанные частоты резонатора для  $p_n = 0$ , для основного пика и для пика с сателлитами соответственно. Полученные результаты практически не зависят от  $S$ , а зависимость  $\sigma$  от  $\epsilon$  показана ниже, т. е. с увеличением  $\epsilon$ , начиная со значения  $\epsilon = 33$ , величина  $\sigma$  возрастает до 6,89.

$\epsilon$	1	4	8	15	25	33	100	1,53	200	400	833	1670	3300
$\sigma$	1	0,98	0,93	0,87	0,91	1,01	50	0,71	2,01	2,72	3,72	5,11	6,89

Полученные результаты показывают, что существует область значений  $\epsilon$ , при которых наблюдается завышение экспериментальных результатов при измерении коэффициента поглощения ультразвука, вызываемое сателлитами. Причем это завышение нельзя исключить за счет сравнения с измерением в эталонных жидкостях, имеющих другое значение коэффициента поглощения. Для иллюстрации рассмотрим исследуемую и эталонную жидкости, имеющие поправки на сателлиты 8%, а измеренные на одной из частот полуширины резонансных пиков 1000 и 100 Гц соответственно. Легко видеть, что вычитая поправку на сателлиты в эталонной жидкости, равную 8 из 1000 Гц, нельзя исключить поправку на сателлиты в исследуемой жидкости, равную 80 Гц. Рассмотренное завышение экспериментальных данных наблюдается при исследовании поглощения, проведенного в работе [2] для раствора  $MnSO_4$  методом резонатора. По сравнению с данными других авторов, приведенных в статье, получено систематическое превышение результатов измерений на 6–12% в области частот, начиная с 4 мГц и выше ( $\epsilon \geq 10$ ), хотя данные измерений, проведенные этими же авторами импульсным способом, совпадают. Аналогичное завышение экспериментальных данных наблюдается и в работе [1]. Область частот, имеющих  $\epsilon$  близкие к 24, можно исключать из исследований, использовать для нее теоретические или вводить экспериментальные поправки. Прецизионные измерения для  $\epsilon > 10$  лучше проводить другим методом, например импульсным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Eggers F.* Eine Resonatormethode zur Bestimmung von Schall-Geschwindigkeit und Dämpfung an geringen Flüssigkeitsmengen.— *Acustica*, 1967–1968, v. 19, № 6, p. 323–328.
2. *Eggers F., Funck Th.* Ultrasonic Measurements with Milliliter Liquid Samples in the 0,5–100 MHz Range.— *Rev. Sci. Instrum.*, 1973, v. 44, № 8, p. 969–977.
3. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966, с. 475.
4. *Кононенко В. С.* Ультразвуковая дифракция в интерферометре.— В кн.: Применение ультразвуки к исследованию вещества. М.: Изд-во ВЗМИ, 1981, вып. 31, с. 18–20.

Куйбышевский институт инженеров  
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию  
21.III.1983