

УДК 534.

НОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Лавидус Ю. Р., Руденко О. В.

Предложен новый подход к решению задач нелинейного распространения звуковых пучков. Даны оценки границ применимости. Проведено сравнение полученных аналитических результатов с расчетами на ЭВМ.

Учет нелинейных эффектов распространения локализованных в пространстве волн большой интенсивности необходим при решении многих прикладных задач [1]. В [2] и [3-6] приведены данные численных экспериментов, представляющие общую картину поведения пучков интенсивных периодических волн и одиночных импульсов. Вместе с тем, занимая исключительно важное место в нелинейной акустике, расчеты на ЭВМ часто не дают зависимостей измеряемых величин от большого числа параметров. Это затрудняет выявление оптимальных условий наблюдения тех или иных эффектов, анализ статистических и ряда других проблем.

Обсудим некоторые подходы к решению задач теории нелинейных пучков и аналитические результаты.

Рассмотрим систему, эквивалентную [7] уравнению Хохлова - Заболотской:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (rv), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Здесь u, v - компоненты колебательной скорости вдоль и поперек оси пучка, ε - нелинейный параметр, c_0 - скорость звука, $\tau = t - x/c_0$, x, r - осевая и поперечная координаты. В безразмерных переменных $V = u/u_0$, $U = v \cdot (2l_d/u_0 a)$, $\theta = \omega \tau$, $z = x/l_p$, $R = r/a$ система примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{N}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0. \quad (2)$$

Здесь $N = l_p/l_d$ - отношение длины образования разрыва $l_p = c_0^2/\varepsilon \omega u_0$ к дифракционной длине $l_d = \omega a^2/2c_0$; u_0, ω, a - характерные амплитуда, частота и радиус пучка.

Перейдем от θ к новой независимой переменной $T = \theta + zV$, точно учитывающей нелинейные искажения профиля простой волны:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{N}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) = \frac{N}{4} z \left[\left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial U}{\partial T} \right]. \quad (3)$$

$$(\partial U/\partial T) + (\partial V/\partial R) = 0. \quad (4)$$

Формально система (3), (4) не проще, чем (2). Однако каждый член ряда теории возмущений для (3), (4) будет содержать частичные суммы членов ряда решений системы (2). Поэтому можно ожидать, что модифицированная теория даст более полную информацию о нелинейнодифракционных процессах в звуковых пучках.

Решение системы (3), (4) во втором приближении для гауссовского пучка исходного гармонического сигнала $V = V^{(1)} + V^{(2)}$,

$$V^{(1)}(z=0, R, T) = \exp(-R^2) \sin T, \quad V^{(2)}(z=0, R, T) = 0, \quad (5)$$

имеет вид:

$$V^{(1)} = \frac{\exp\left(-\frac{R^2}{1+N^2z^2}\right)}{\sqrt{1+N^2z^2}} \sin\left(T - R^2 \frac{Nz}{1+N^2z^2} + \operatorname{arctg} Nz\right). \quad (6)$$

$$V^{(2)} = -\frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial T} (V^{(1)})^2 +$$

$$+ \frac{1}{4N} \exp\left(-\frac{2R^2}{1+N^2z^2}\right) \sqrt{\frac{\ln^2(1+N^2z^2) + 4 \operatorname{arctg}^2 Nz}{1+N^2z^2}} \times$$

$$\times \cos 2\left[T - R^2 \frac{Nz}{1+N^2z^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} Nz - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{arctg} Nz}{\ln(1+N^2z^2)}\right)\right]. \quad (7)$$

Интересна структура формулы (7). Первое слагаемое с обратным знаком есть поправка второго приближения, найденная из уравнения простых волн (с точностью до замены $\theta \rightarrow T$). Второе слагаемое (при $\theta \rightarrow T$) совпадает с нелинейной поправкой второго приближения для системы (2) (см. [7], формула (9.4.3)).

Удобно анализировать решение, представив его в виде

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} = B_1 \sin \psi + B_2 \sin 2\psi - A_2 \cos 2\psi. \quad (8)$$

Вид функций $B_1(z, R)$, $\psi(z, R)$ легко устанавливается сравнением первого слагаемого (8) с решением (6); другие функции равны

$$B_2 = \frac{1}{4N(1+N^2z^2)} \exp\left(-\frac{2R^2}{1+N^2z^2}\right) [Nz \ln(1+N^2z^2) + 2 \operatorname{arctg} Nz - 2Nz]. \quad (9)$$

$$A_2 = \frac{1}{4N(1+N^2z^2)} \exp\left(-\frac{2R^2}{1+N^2z^2}\right) [-\ln(1+N^2z^2) + 2Nz \operatorname{arctg} Nz]. \quad (10)$$

Границу применимости первого приближения оценим с помощью формулы (8) из условия, что амплитуда волны второго приближения $V^{(2)}$ не должна превышать половины амплитуды $V^{(1)}$:

$$\sqrt{A_2^2 + B_2^2} / B_1 < \alpha, \quad (\alpha \leq 1/2). \quad (11)$$

Вид области, определяемой неравенством (11), дан на фиг. 1. Ширина этой области минимальна, когда нелинейные и дифракционные эффекты сравнимы по величине.

В области (11) первое приближение позволяет определить координату образования разрыва z_p :

$$R^2 = (1+N^2z_p^2) \cdot \ln(z_p / \sqrt{1+N^2z_p^2}). \quad (12)$$

При $N < 1$ разрыв образуется сначала на оси пучка, а затем появляется и на периферии. Это иллюстрирует фиг. 2, где изображены границы областей существования разрывов для различных N .

При $N \geq 1$ разрыв вообще не образуется, происходит лишь укрупнение профиля на расстояниях $z \leq z_1$, где

$$z_1 = 1 / N \sqrt{N^2 - 1}. \quad (13)$$

На больших длинах $z > z_1$ наблюдается сглаживание профиля. Амплитуды гармоник первого приближения могут быть получены из анализа спектрального разложения:

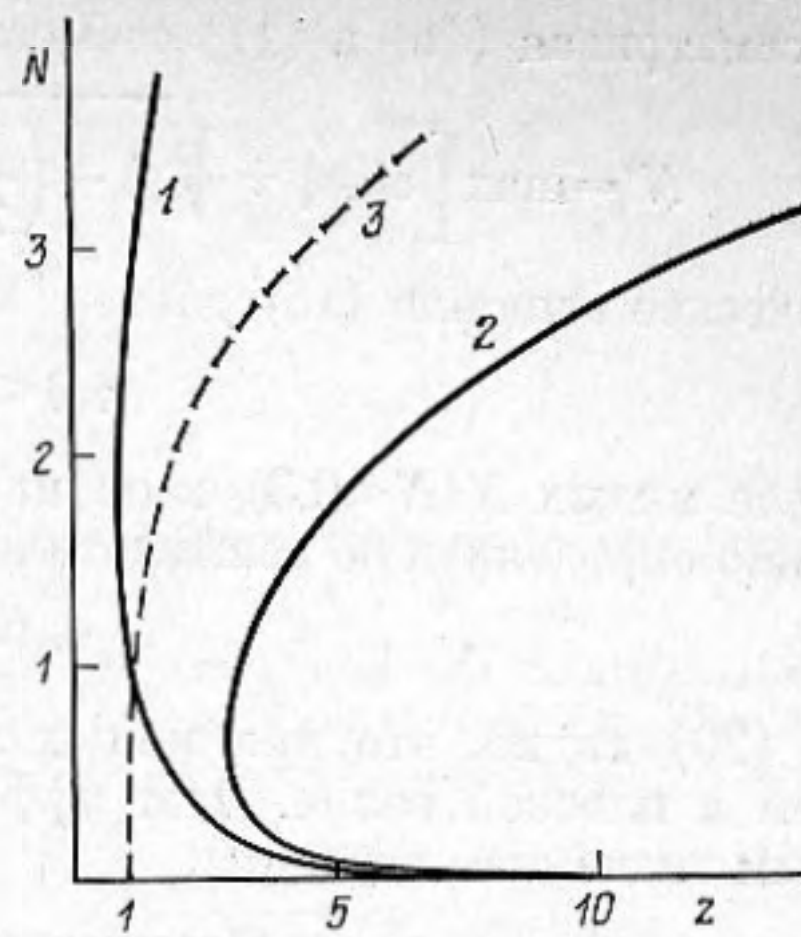
$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{nz} J_n\left(\frac{nz}{\sqrt{1+N^2z^2}} \exp\left(-\frac{R^2}{1+N^2z^2}\right)\right) \times$$

$$\times \sin n\left[\theta + \operatorname{arctg} Nz - R^2 \frac{Nz}{1+N^2z^2}\right]. \quad (14)$$

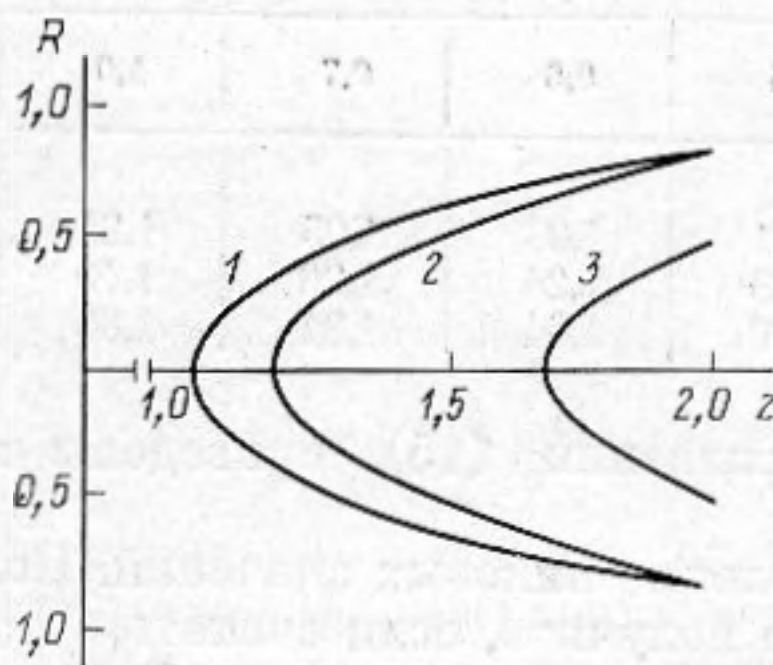
Фиг. 1. Границы областей применимости первого приближения на оси пучка ($R=0$). 1 и 2 соответствуют (8) ($\alpha=1/5; 1/2$), 3 — решению (2) обычным методом последовательных приближений, $\alpha=1/2$ (см. [7] формула (9.4.3))

Фиг. 2. Границы областей существования разрывов (12) для различных N : $N=0$ — кривая 1; 0,5—2; 0,8—3

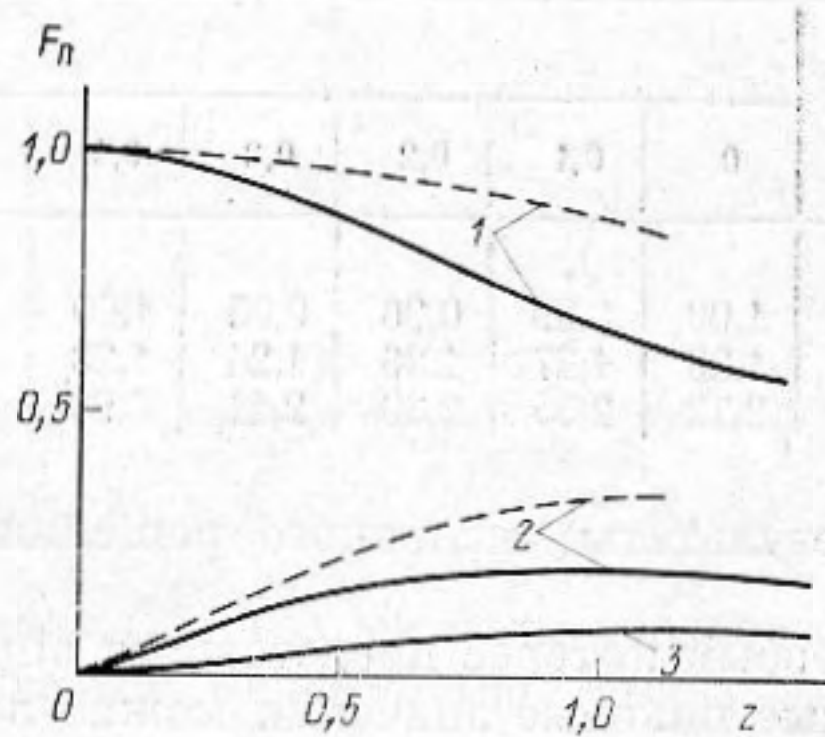
Фиг. 3. Зависимость от расстояния z амплитуд гармоник. Номер кривой соответствует номеру гармоники. Сплошные кривые $N=1$; штриховые $N=0$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Амплитуда основной волны монотонно уменьшается с ростом z , а амплитуды гармоник сначала увеличиваются, достигают максимального значения, а затем спадают. Поведение амплитуд основной волны и двух ее гармоник на оси пучка показаны на фиг. 3.

Приближение $V^{(1)}$ учитывает только внешнее наложение дифракционных и нелинейных эффектов и не позволяет описать асимметрию искажения фаз сжатия и разрежения, а также превышение положительным пиковым значением единицы. Все эти явления могут быть объяснены с учетом второго приближения (8).

Анализ результатов, получаемых во втором приближении, начнем с определения координаты образования разрыва z_p . Общее выражение для z_p найдем из решения (8) при условии $\partial\theta/\partial V=0$

$$z_p^{-1} = \max [B_1 \cos \psi + 2B_2 \cos 2\psi + 2A_2 \sin 2\psi]_{z, R}. \quad (15)$$

Область существования разрыва можно получить непосредственно, не решая (15). Действительно, пусть разрыв на оси образуется при $N < N^*$, тогда при $N \rightarrow N^*$ будет $N \cdot z_p(N) \gg 1$. Асимптотическое разложение (15) при $N z_p(N) \gg 1$ дает:

$$N^* = \max \left[\cos \psi + \frac{1}{N^*} (\ln N^* z_p(N^*) - 1) \cos 2\psi + \frac{\pi}{2N^*} \sin 2\psi \right]. \quad (16)$$

Но с другой стороны нельзя выходить из области применимости (11) ($\alpha=1/2$), разложение (11) при $Nz \gg 1$ и определяет это условие,

$$\frac{1}{N^*} (\ln N^* z_p(N^*) - 1) \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2N^*}\right)^2}. \quad (17)$$

Рассматривая (16) и (17) совместно, получаем:

$$N^* = \max \left[\cos \psi + \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2N^*} \right)^2 \cos 2\psi} + \frac{\pi}{2N^*} \sin 2\psi \right]. \quad (18)$$

Графическое решение (18) дает

$$1,9 < N^* < 2. \quad (19)$$

В случае малых N ($N < 0,3$) координату образования разрыва на оси пучка можно определить по асимптотической формуле:

$$z_p = 1 - 2N^2/3. \quad (20)$$

Из (20) видно, что при малых N разрыв образуется несколько раньше, чем в плоской волне. Этот эффект является следствием превышения пиковым значением единицы.

Зависимость расстояния образования разрыва (15) от числа N на разных удалениях R от оси

R	N									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1,0	1,5
0	1,00	0,99	0,96	0,95	1,00	1,01	1,03	1,05	1,21	2,04
0,5	1,28	1,27	1,26	1,24	1,23	1,23	1,24	1,26	1,40	2,24
1,0	2,72	2,55	2,30	2,11	1,98	1,89	1,84	1,81	1,86	1,60

Результаты численного решения уравнения (15) приведены в таблице.

Особый интерес представляет определение пиковых значений. Положительные пиковые значения можно легко получить, если считать, что максимум (8) достигается при $\psi = \pi/2 + \delta$, где δ малая величина. Тогда с точностью до δ^2 :

$$V_+ = B_1 + A_2 + 4B_2^2 / (B_1 + 4A_2). \quad (21)$$

Формулу (21) можно использовать при $z \leq z^*$, где z^* соответствует такому профилю волны, что разрыв проходит через максимальное возмущение. Координату z^* можно определить, если считать, что разрыв проходит (как и в первом приближении) через $V=0$

$$z^* = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2B_2}{B_1 + 4A_2} - \frac{A_2}{B_1 + 2B_2} \right) / V_+. \quad (22)$$

На оси пучка при малых N ($N < 0,3$) (22) принимает вид

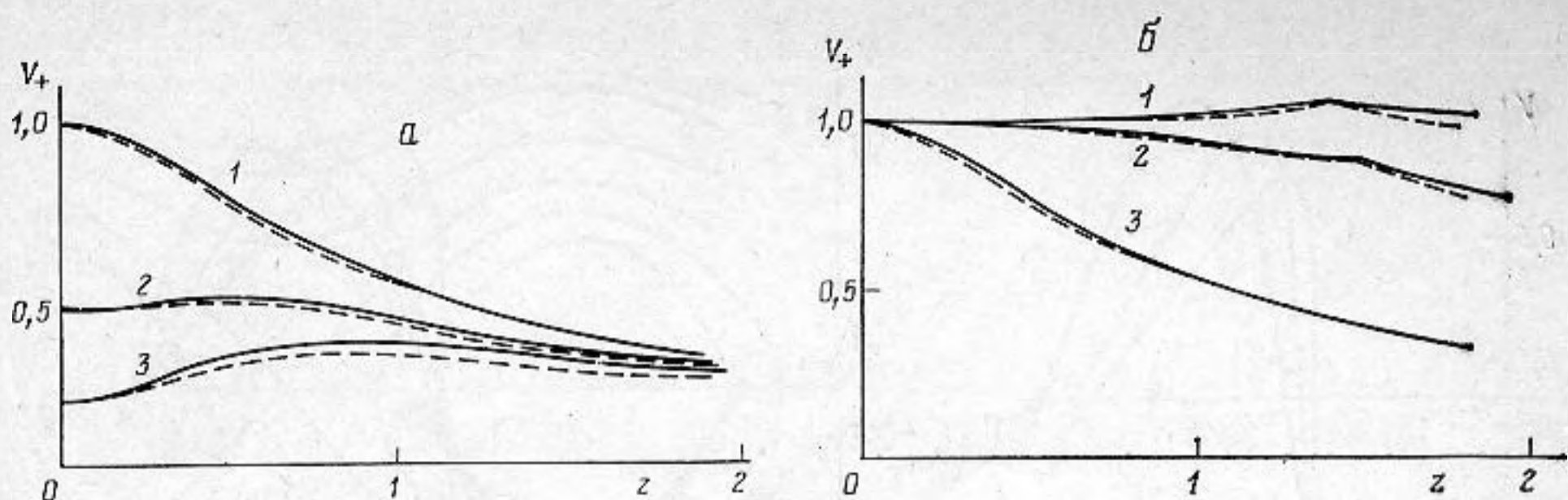
$$z^* = \frac{\pi}{2} - N \left(\frac{\pi}{4} \right)^2. \quad (23)$$

При $z > z^*$ положительные пиковые значения определяются выражением:

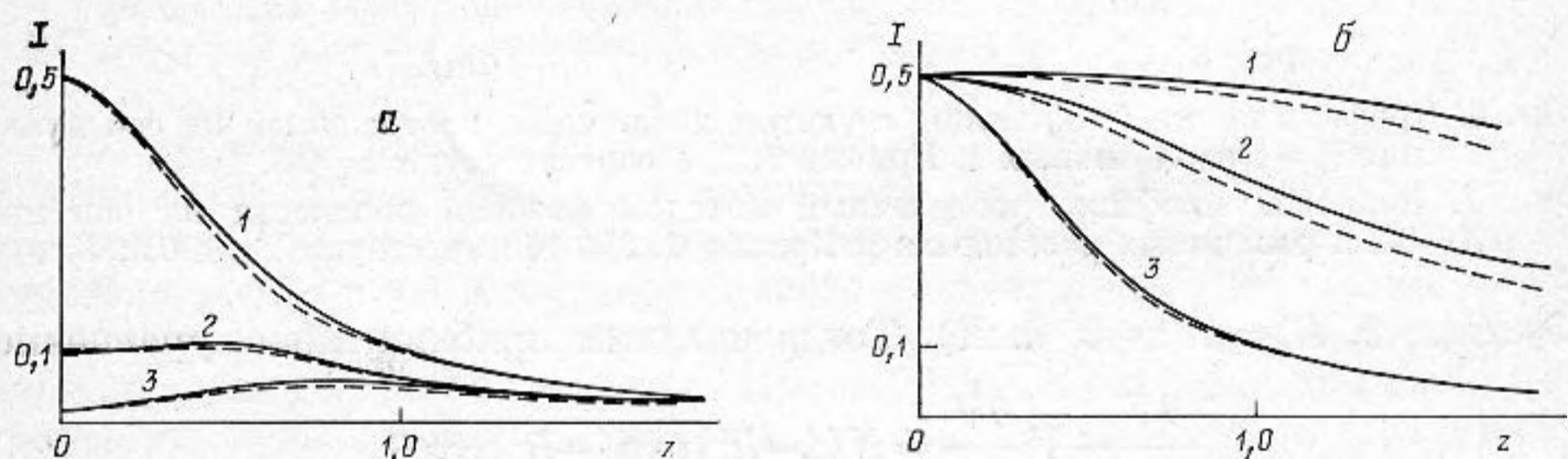
$$V_+ = B_1 \sin \left(\frac{A_2}{B_1 + 2B_2} + zV_+ \right) + \\ + B_2 \sin 2 \cdot \left(\frac{A_2}{B_1 + 2B_2} + zV_+ \right) - A_2 \cos 2 \left(\frac{A_2}{B_1 + 2B_2} + zV_+ \right). \quad (24)$$

При получении (24) было вновь использовано предположение о прохождении разрыва в окрестности $V=0$.

Сравнение пиковых значений, определяемых формулами (21) и (24), с результатами численного счета на ЭВМ, приведенными в книге [2], даны на фиг. 4. На этой и последующих фигурах сплошные кривые построены по нашим формулам, а штриховые соответствуют данным [2]. Как видно из фиг. 4, значения, определяемые по формуле (21), завышены по сравнению с результатами численного решения (2). Это превышение



Фиг. 4. Зависимость от расстояния z положительных пиковых значений возмущения. *a* — для $N=2$ при различных удалениях от оси пучка: $R=0$ — кривая 1; 0,9—2; 1,3—3; *б* — на оси пучка при различных N : $N=0,2$ — кривая 1; 0,67—2; 2—3



Фиг. 5. Зависимость от расстояния z средней за период интенсивности волны. *a* — для $N=2$ при различных удалениях от оси пучка: $R=0$ — кривая 1; 0,9—2; 1,3—3; *б* — на оси при различных N : $N=0,2$ — кривая 1; 0,67—2; 2—3

связано с тем, что при решении системы (3), (4) методом последовательных приближений, дифракция учитывается менее точно. Подтверждением этого служит возрастание ошибки с ростом R .

Используя (21) можно определить область, где будет наблюдаться превышение положительным пиковым значением единицы ($V_+ > 1$). На оси пучка эта область определится из системы неравенств:

$$N < \frac{2Nz \operatorname{arctg} Nz - \ln(1 + N^2 z^2)}{4\sqrt{1 + N^2 z^2} (\sqrt{1 + N^2 z^2} - 1)}, \quad z < z^* \quad (25)$$

здесь z^* определяется из (22).

Превышение единицы связано с различной расходимостью гармоник. Из (25) следует, что превышение будет наблюдаться при $N < 0,5$. Анализ формулы (21) показывает, что максимальное превышение положительным пиковым возмущением единицы будет наблюдаться на оси пучка при $N=0,25$, $z=1,4$ и составит 6%.

Различие в пиковых значениях фаз сжатия и разрежения в силу правила равенства площадей должно приводить к изменению длительности полупериодов. Используя формулу (8), можно показать, что положительный полупериод уменьшается, а отрицательный увеличивается на величину:

$$\Delta = 2A_2/B_1, \quad (26)$$

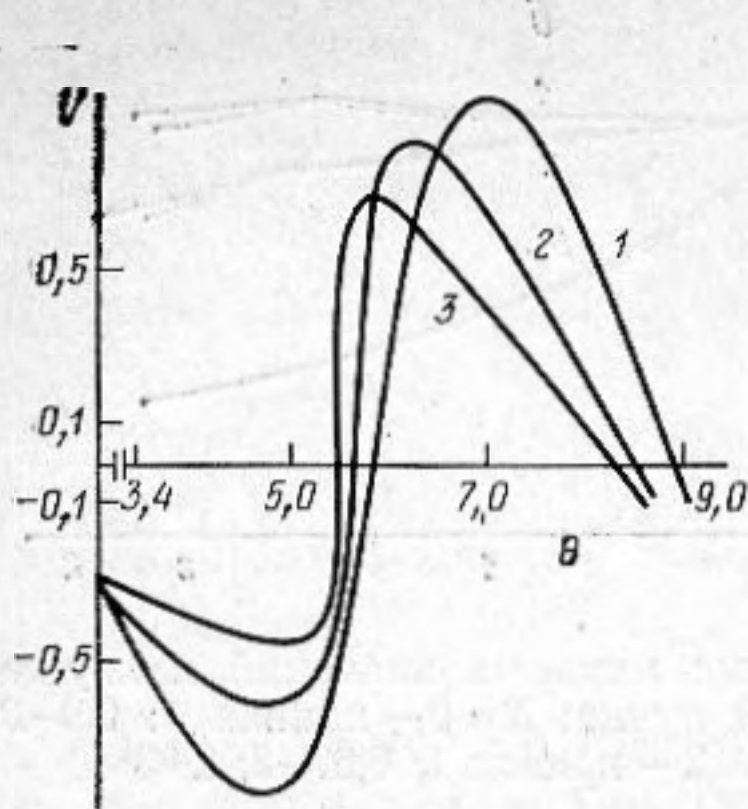
Из (8) также легко определить среднюю за период интенсивность I

$$I = (B_1^2 + B_2^2 + A_2^2)/2. \quad (27)$$

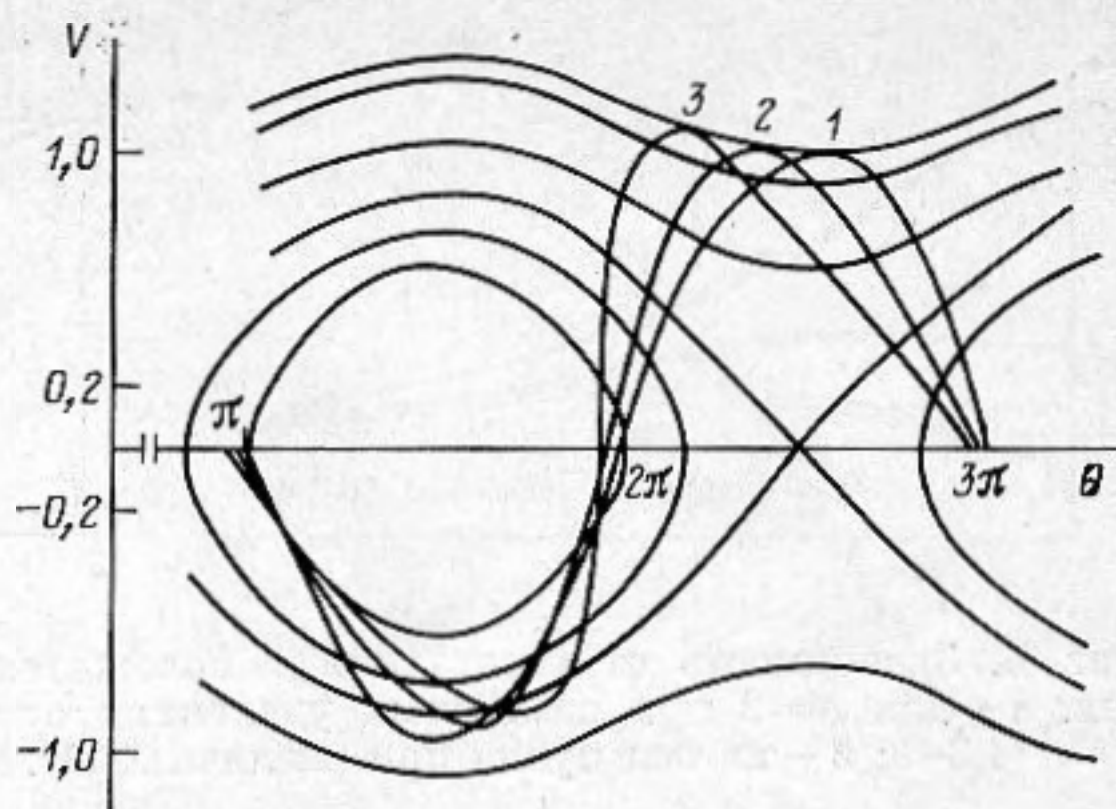
Очевидно, что поведение интенсивности должно быть аналогичным поведению пиковых значений. Это подтверждает фиг. 5.

На фиг. 6 показаны профили волны на оси пучка при $N=1$ и различных z , построенные при помощи решения (8).

В заключение укажем, что существует еще один эффективный метод построения формы волны при малых N . Он основан на модификации метода фазовой плоскости для неоднородных уравнений типа простых волн [8]. Положим в первом уравнении системы (2) с граничным условием



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Профиль нелинейной волны с учетом дифракции, построенный на оси пучка для $N=1$ и различных z . Кривые 1, 2, 3 соответствуют $z=0,5; 1; 1,5$

Фиг. 7. Волновой профиль, построенный методом фазовой плоскости на оси при $N=0,2$ и различных расстояниях z . Кривые 1, 2, 3 соответствуют $z=0; 0,5; 1$

(5) $U(z, \theta, R) = U(z=0, \theta, R)$. Тогда получим приближенное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = N(1-R^2) \exp(-R^2) \cos \theta, \quad (28)$$

которое выполняется тем более точно, чем меньше N и z . Характеристики (28) имеют вид:

$$\partial \theta / \partial z = -V, \quad V \partial V / \partial \theta = -N(1-R^2) \exp(-R^2) \cos \theta. \quad (29)$$

Фазовый портрет системы и построенные профили волны изображены на фиг. 7. Она демонстрирует несимметричные искажения фаз сжатия и разрежения, изменение длительности полупериодов, а также эффект превышения единицы. Этот метод построения дает удовлетворительные качественные результаты при $N < 0,5; Nz < 0,3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
2. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
3. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Особенности работы мощных параметрических излучателей звука. — Акуст. журн., 1978, т. 24, № 1, с. 125–127.
4. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Параметрическое взаимодействие звуковых пучков. — Акуст. журн., 1979, т. 25, № 4, с. 488–494.
5. Жилейкин Я. М., Журавлева Т. М., Руденко О. В. Нелинейные явления при распространении высокочастотных звуковых волн в трубах. — Акуст. журн., 1980, т. 26, № 1, с. 62–66.
6. Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Нелинейно-дифракционная трансформация акустических импульсов. — Акуст. журн., 1981, т. 27, № 3, с. 363–366.
7. Руденко О. В., Солуян С. Н. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
8. Гусев В. Э., Карabutov А. А. К вопросу о возбуждении акустических импульсов распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью. — Акуст. журн., 1981, т. 27, № 2, с. 213–219.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
4.V.1983